ȘTEFAN BĂLAN

Culegere de probleme de MECANICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1972

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

ȘTEFAN BĂLAN

Culegere de probleme de MECANICĂ

Ediția a II-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1972

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea conține probleme din principalele capitole ale mecanicii.

După o succintă enumerare a legilor și formulelor corespunzătoare, fiecare capitol cuprinde un număr de probleme rezolvate detaliat, după care urmează probleme propuse pentru rezolvare, însoțite de răspunsurile finale.

Cartea se adresează studenților de la institutele tehnice de învățămînt superior, cadrelor didactice, precum și studenților de la unele facultăți ale universității. De asemenea, ea poate servi ca un prețios material auxiliar inginerilor și tehnicienilor, care întîlnesc în practica lor diferite probleme de mecanică.

Redactor: ing. *ALEX. NICOLAE*
Tehnoredactor: *ANA ȚIMPĂU*
Coperta de *V. GEORGESCU*

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A DOUA

Ediția a II-a a „Culegerii de probleme de Mecanică" este o reluare a primei ediții, din anul 1964, — cu revederea unor probleme și cu unele adaosuri. A fost introdus un capitol de „Mișcări oscilatorii" și au fost extinse unele capitole din Mecanica analitică. Și de data aceasta ne-am menținut îndeosebi în cadrul Mecanicii teoretice, considerînd că astfel de culegeri se completează totdeauna prin lucrările similare ale disciplinelor înrudite.

Mulțumesc celor care au sprijinit în continuare apariția acestei ediții și în mod cu totul aparte Ministerului Învățămîntului și Editurii didactice și pedagogice.

AUTORUL

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Prezenta lucrare reprezintă în parte o reluare a unor culegeri de probleme similare mai vechi ale autorului — cu actualizările și completările care pot interveni de-a lungul unei practici de peste 25 de ani, de seminarii și cursuri la această disciplină. Problemelor cu caracter tehnic li s-au adăugat și probleme cu un caracter mai teoretic, pentru cititorii care se interesează de acest gen de probleme.

S-a menținut sistemul de prezentare din lucrările anterioare: o expunere pe scurt a teoriei corespunzătoare capitolului respectiv, un număr de probleme complet rezolvate și un număr de probleme propuse cititorului, avînd, pentru control, rezultate finale.

Recomandăm cititorului, ca și în lucrările noastre anterioare, multă atenție și multă răbdare la rezolvarea problemelor, precum și ducerea problemelor pe care le lucrează pînă la capăt, executînd și aplicațiile numerice, pentru a pătrunde mai bine toate amănuntele.

Mulțumesc pe această cale tovarășei conf. Sanda Hangan, care mi-a dat un ajutor foarte prețios la redactarea acestei ediții, precum și asistenților mei Ileana Slatineanu și Mihai Alexandrescu, care au contribuit la verificarea problemelor și corectarea lucrării.

Mulțumesc Editurii tehnice, care și-a propus să ducă pînă la capăt realizarea unui material complet pentru studiul Mecanicii (curs, probleme etc.), și care reușește aceasta în cele mai bune condiții.

Aș fi foarte mulțumit dacă cititorii vor putea să găsească în această culegere un material care să sprijine studiile lor în domeniul mecanicii teoretice.

București, 1964 ȘTEFAN BĂLAN

Scanned with OKEN Scanner

I. CALCULUL VECTORIAL

Definiţii şi formule

Vectorii sînt mărimi orientate, complet determinate prin valoarea numerică, direcţia şi sensul lor în spaţiu. Pentru vectorii legaţi e necesar să se cunoască şi punctul de aplicaţie (originea).

Calculul vectorial cuprinde:

— algebra vectorială (adunarea, scăderea, înmulţirea vectorilor, ecuaţiile vectoriale şi vectorii reciproci);

— analiza vectorială (derivarea şi integrarea vectorilor, cîmpurile de vectori, calculul cu operatori, teoremele integrale vectoriale).

Sistemele de referinţă folosite curent în mecanica teoretică sînt sistemele drepte (fig. I. 1, *a*). Se pot utiliza şi sisteme stîngi (fig. I. 1, *b*), menţionîndu-se aceasta.

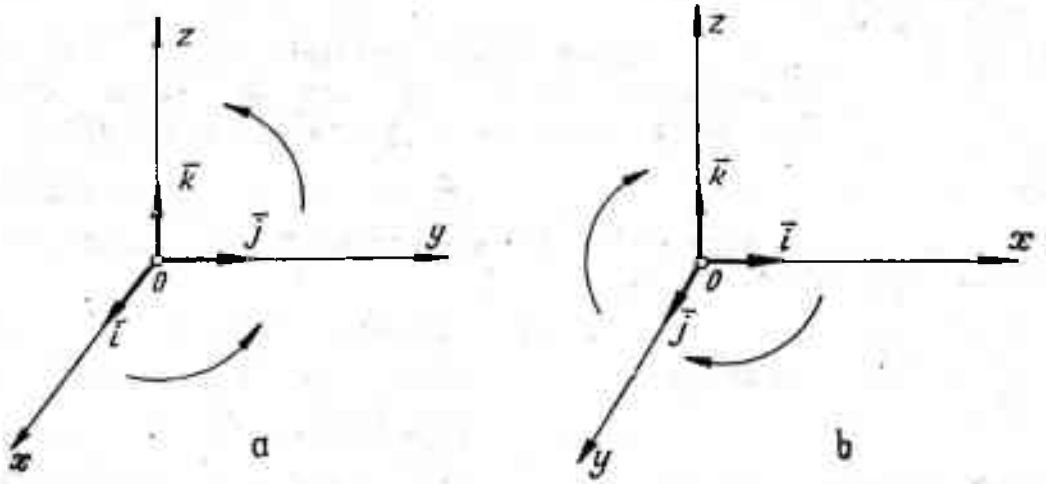


Fig. I. 1

Orice vector poate fi exprimat prin proiecţiile sale pe axele sistemului de referinţă *Oxyz* sub forma

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k},$$

dacă se notează cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ vectorii unitari ai axelor de coordonate (versorii) şi cu v_x, v_y şi v_z proiecţiile vectorului pe axele de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

Adunarea vectorilor concurenţi se efectuează după regula paralelogramului: suma a doi vectori concurenţi este dată în mărime, direcţie şi sens de diagonala paralelogramului construit cu vectorii respectivi ca laturi (fig. 1.2, *a*)

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}.$$

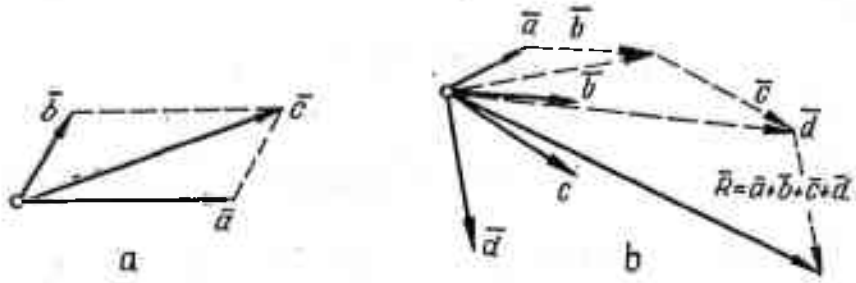


Fig. I.2

Vectorul sumă se poate exprima şi prin componente, sub forma

$$c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k} = (a_x + b_x)\bar{i} + (a_y + b_y)\bar{j} + (a_z + b_z)\bar{k};$$

de unde

$$c_x = a_x + b_x, \qquad c_y = a_y + b_y, \qquad c_z = a_z + b_z.$$

În cazul adunării mai multor vectori, regula de sumare se aplică succesiv (regula poligonului) (fig. I.2, *b*).

Scăderea a doi vectori revine la sumarea lor, vectorul-descăzut fiind considerat cu sens opus în paralelogramul construit cu cei doi vectori ca laturi; rezultatul scăderii celor doi vectori este cea de-a doua diagonală a paralelogramului (fig. I.3)

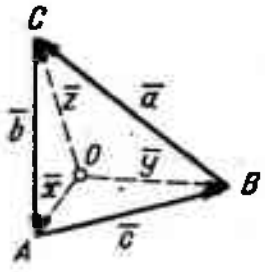


Fig. I.3

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}.$$

Produsul scalar a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ (notat $\bar{a} \cdot \bar{b}$ sau $\bar{a}\,\bar{b}$) este un scalar

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})$$

sau

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Produsul vectorial a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ (notat $\bar{a} \times \bar{b}$) este un vector, avînd ca mărime suprafaţa paralelogramului construit cu cei doi vectori ca laturi, iar direcţia-perpendiculară pe planul acestora. Semnul produsului vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ este pozitiv dacă vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ formează un triedru drept; este negativ dacă triedrul format este stîng (fig. I.4)

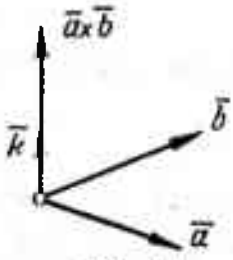


Fig. I.4

$$\bar{a} \times \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b})\ \bar{k}.$$

Produsul vectorial $\bar{a}\times\bar{b}$ se exprimă prin componentele vectorilor sub forma

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\bar{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\bar{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\bar{k}(a_xb_y-a_yb_x).$$

Produsul mixt a trei vectori $\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ este un scalar avînd ca mărime volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori ca muchii. În funcție de componentele vectorilor, produsul mixt se exprimă (fig. I.5)

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

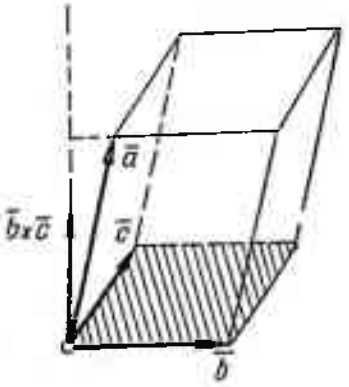


Fig. I.5

Produsul dublu vectorial a trei vectori este

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}(\bar{a}\bar{c})-\bar{c}(\bar{a}\bar{b}).$$

Regulile de derivare din analiza scalară se mențin neschimbate în analiza vectorială. De asemenea se mențin regulile de integrare din analiza scalară.

Cîmp de vectori este o regiune din spațiu în care fiecărui punct $M(xyz)$ îi corespunde un vector $\bar{v}$ de componente $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$. Dacă există o funcție $U(x, y, z)$ astfel încît

$$v_x=\frac{\partial U}{\partial x},\ v_y=\frac{\partial U}{\partial y},\ v_z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

vectorul $\bar{v}$ devine

$$\bar{v}=\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}=\text{grad } U=\nabla U,$$

gradientul funcției U.

Funcția U se numește *funcție de forțe*. Funcția $V=-U$ se numește *potențial*.

Divergența unui vector $\bar{v}$ este scalarul

$$\text{div } \bar{v}=\nabla\bar{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Rotorul unui vector (rot $\bar{v}$) este vectorul

$$\text{rot } \bar{v}=\nabla\times\bar{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial y_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{k}$$

unde s-a notat $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$ — operatorul lui Hamilton (nabla).

Scanned with OKEN Scanner

Probleme rezolvate

11.1. Să se determine mărimea şi poziţia vectorilor $\bar{v}_1(1, -2, 3)$ şi $\bar{v}_2(-2, 4, -6)$ în sistemul de referinţă cartezian triortogonal drept $Oxyz$. Să se calculeze expresiile: $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$, $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$, $\bar{v}_1\bar{v}_2$, $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$.

Rezolvare. Vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ se exprimă în sistemul $Oxyz$ sub forma

$$\bar{v}_1 = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{v}_2 = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k} = -2(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}).$$

Se observă că $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sînt coliniari şi de semne contrare, iar între modulii lor există relaţia

$$|\bar{v}_2| = 2|\bar{v}_1| = 2\sqrt{1+4+9} = 2\sqrt{14}.$$

Înclinarea vectorilor faţă de axe este dată de cosinuşii directori

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{3}{\sqrt{14}},$$

espectiv

$$\cos\alpha_2 = \frac{-2}{2\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}, \cos\beta_2 = \frac{2\cdot 2}{2\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\gamma_2 = \frac{-2\cdot 3}{2\sqrt{14}} = \frac{-3}{\sqrt{14}}.$$

Expresiile cerute sînt

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) - 2(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) = -(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}).$$

Vectorul sumă $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ este un vector coliniar cu vectorul $\bar{v}_1$, egal în mărime cu aceasta, dar de semn contrar.

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = (\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) + 2(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}) = 3(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}).$$

Vectorul diferenţă $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ este un vector coliniar cu vectorul $\bar{v}_1$ avînd valoarea de trei ori mai mare decît acesta

$$|\bar{v}_1 - \bar{v}_2| = 3|\bar{v}_1| = 3\sqrt{14}.$$

$$\bar{v}_1\bar{v}_2 = (\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k})[-2(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k})] = -2 - 8 - 18 = -28$$

Produsul scalar $\bar{v}_1\bar{v}_2 = -28$.
Produsul vectorial $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = 0$, deoarece cei doi vectori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sînt coliniari.

1.2. Să se calculeze unghiul dintre vectorii $\bar{v}_1(2, -4, 4)$ şi $\bar{v}_2(4, 6, 4)$, precum şi produsele $\bar{v}_1\bar{v}_2$ şi $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$.

Rezolvare. Vectorii consideraţi pot fi scrişi utilizînd componentele lor pe axe sub forma

$$\bar{v}_1 = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}, \bar{v}_2 = 4\bar{i} + 6\bar{j} + 4\bar{k}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$|\bar{v}_1| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36}, \quad |\bar{v}_2| = \sqrt{16+36+16} = \sqrt{68}.$$

Cosinusul unghiului dintre ei are expresia

$$\cos(v_1, v_2) = \frac{\bar{v}_1\bar{v}_2}{|\bar{v}_1|\,|\bar{v}_2|} = \frac{v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}}{\sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2}\sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2}} =$$

$$= \frac{8 - 24 + 16}{\sqrt{4+16+16}\sqrt{16+36+16}} = 0,$$

ceea ce înseamnă că cei doi vectori sînt perpendiculari, deci

$$\bar{v}_1\bar{v}_2 = 0.$$

Produsul vectorial $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ este dat de determinantul

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \bar{i}(-16-24) + \bar{j}(16-8) + \bar{k}(12+16) = -40\bar{i} +$$

$$+ 8\bar{j} + 28\bar{k} = 4(-10\bar{i} + 2\bar{j} + 7\bar{k})$$

și are mărimea

$$|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2| = 4\sqrt{100+4+49} = 4\sqrt{153}.$$

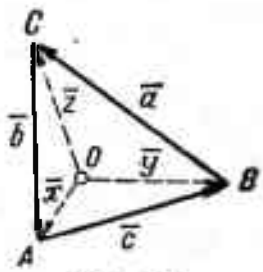


Fig. 1.3

1.3. Să se demonstreze că cele trei înălțimi ale unui triunghi sînt concurente (fig. 1.3).

Rezolvare. Fie O punctul de intersecție al înălțimilor coborîte din punctele A și B. Notăm $\overline{OA} = \bar{x}$, $\overline{OB} = \bar{y}$, $\overline{OC} = \bar{z}$ și avem

$$\bar{a} = \bar{z} - \bar{y}, \quad \bar{b} = \bar{x} - \bar{z}, \quad \bar{c} = \bar{y} - \bar{x}.$$

Condiția de ortogonalitate dintre $\overline{OA}$ și $\overline{BC}$, respectiv $\overline{OB}$ și $\overline{AC}$, este

$$\bar{x}\bar{a} = \bar{x}(\bar{z} - \bar{y}) = \bar{x}\bar{z} - \bar{x}\bar{y} = 0$$

$$\bar{y}\bar{b} = \bar{y}(\bar{x} - \bar{z}) = \bar{y}\bar{x} - \bar{y}\bar{z} = 0.$$

Adunînd cele două relații rezultă

$$\bar{x}\bar{z} - \bar{y}\bar{z} = (\bar{x} - \bar{y})\bar{z} = \bar{c}\bar{z} = 0,$$

adică $\overline{OC}$ este perpendicular pe $\overline{AB}$ și deci punctul O este situat pe înălțimea care pornește din punctul C.

1.4. Ce condiție trebuie să îndeplinească vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ pentru a avea relațiile:

a) $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3) = (v_1 + v_2 + v_3)^2$

b) $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3) = (v_1 - v_2 + v_3)^2$

c) $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)(\bar{v}_2 + \bar{v}_3) + (\bar{v}_1 + \bar{v}_3)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + (\bar{v}_1 + \bar{v}_3)(\bar{v}_2 + \bar{v}_3) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$

d) $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3) \times (\bar{v}_1 - \bar{v}_2 - \bar{v}_3) = 0.$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Dezvoltînd relațiile date se obțin următoarele condiții:

a) $v_1^2+v_2^2+v_3^2+2\bar{v}_1\bar{v}_2+2\bar{v}_2\bar{v}_3+2\bar{v}_1\bar{v}_3=v_1^2+v_2^2+v_3^2+2v_1v_2+2v_2v_3+2v_1v_3,$

relație satisfăcută dacă vectorii $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ sînt coliniari și au același sens;

b) $v_1^2+v_2^2+v_3^2+2\bar{v}_1\bar{v}_2+2\bar{v}_2\bar{v}_3+2\bar{v}_1\bar{v}_3=v_1^2+v_2^2+v_3^2-2v_1v_2-2v_2v_3+2v_1v_3,$

relație satisfăcută dacă vectorii $\bar{v}_1, \bar{v}_3$ sînt coliniari și de același sens, iar vectorul $\bar{v}_2$ este coliniar cu aceștia dar are sens contrar;

c) $v_1^2+v_2^2+v_3^2+3(\bar{v}_1\bar{v}_2+\bar{v}_2\bar{v}_3+\bar{v}_1\bar{v}_3)=v_1^2+v_2^2+v_3^2,$

egalitate satisfăcută dacă

$$\bar{v}_1\bar{v}_2+\bar{v}_2\bar{v}_3+\bar{v}_3\bar{v}_1=0;$$

d) $\bar{v}_1\times\bar{v}_1-\bar{v}_1\times\bar{v}_2-\bar{v}_1\times\bar{v}_3+\bar{v}_2\times\bar{v}_1-\bar{v}_2\times\bar{v}_2-\bar{v}_2\times\bar{v}_3+\bar{v}_3\times\bar{v}_1-$

$$-\bar{v}_3\times\bar{v}_2-\bar{v}_3\times\bar{v}_3=0$$

sau

$$2\bar{v}_2\times\bar{v}_1+2\bar{v}_3\times\bar{v}_1=2(\bar{v}_2+\bar{v}_3)\times\bar{v}_1=0,$$

ecuație satisfăcută dacă vectorul $\bar{v}_1$ este coliniar cu rezultanta vectorilor $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$.

1.5. Să se calculeze produsul mixt al vectorilor $\bar{v}_1(2, 4, 6)$, $\bar{v}_2$ (1, 3, 5) și $\bar{v}_3(-2, 0, 2)$ și să se explice rezultatul.

Rezolvare.

$$\bar{v}_1(\bar{v}_2\times\bar{v}_3)=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Produsul mixt $\bar{v}_1(\bar{v}_2\times\bar{v}_3)$ fiind nul, rezultă că vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$ sînt coplanari; $\bar{v}_3$ este o combinație liniară a vectorilor $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$

$$\bar{v}_3=-3\bar{v}_1+4\bar{v}_2.$$

1.6. Să se calculeze expresiile

$$E_1=(\bar{v}_1\bar{v}_2)(\bar{v}_3\bar{v}_4), \qquad E_2=(\bar{v}_1\bar{v}_2)(\bar{v}_3\times\bar{v}_4)$$

$$E_3=(\bar{v}_1\times\bar{v}_2)(\bar{v}_3\bar{v}_4), \qquad E_4=(\bar{v}_1\times\bar{v}_2)(\bar{v}_3\times\bar{v}_4)$$

$$E_5=(\bar{v}_1\times\bar{v}_2)\times(\bar{v}_3\times\bar{v}_4)$$

pentru vectorii

$$\bar{v}_1=-\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k},\ \bar{v}_2=-4\bar{j},\ \bar{v}_3=-5\bar{k},\ \bar{v}_4=-6\bar{i}+7\bar{j}-8\bar{k}.$$

Rezolvare.

$E_1 = [(-\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k})\,(-4\bar{j})]\,[-5\bar{k}\,(-6\bar{i} + 7\bar{j} - 8\bar{k})] = -8 \cdot 40 = -320$

$\bar{E}_2 = -8[-5\bar{k} \times (-6\bar{i} + 7\bar{j} - 8\bar{k})] = +40\,(-6\bar{j} - 7\bar{i}) = -40\,(7\bar{i} + 6\bar{j})$,

vector în planul xOy.

$\bar{E}_3 = (-\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) \times (-4\bar{j})\,40 = 160\,(\bar{k} - 3\bar{i}) = 160\,(-3\bar{i} + \bar{k})$,

vector în planul xOz.

$$E_4 = 4(-3\bar{i} + \bar{k}) \cdot 5(7\bar{i} + 6\bar{j}) = 20(-21) = -420$$

$$\bar{E}_5 = 4(-3\bar{i} + \bar{k}) \times 5(7\bar{i} + 6\bar{j}) = 20(7\bar{j} - 18\bar{k} - 6\bar{i}) = 20(-6\bar{i} + 7\bar{j} - 18\bar{k}).$$

1.7. Să se rezolve ecuația vectorială

$$\bar{v} \times \bar{a} = \bar{v} \times \bar{b}$$

unde $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt doi vectori cunoscuți.

Rezolvare. Ecuația vectorială dată poate fi scrisă și sub forma

$$\bar{v} \times (\bar{a} - \bar{b}) = 0,$$

expresia satisfăcută pentru $\bar{v} = 0$ sau $\bar{v}$ coliniar cu diferența $\bar{a} - \bar{b}$ a celorlalți doi vectori.

1.8. Să se determine vectorul $\bar{v}$ care satisface sistemul de ecuații vectoriale

$$\bar{v}\bar{a} = m, \quad \bar{v} \times \bar{a} = \bar{b}$$

unde $\bar{b}$ este perpendicular pe $\bar{a}$.

Rezolvare. Se descompune vectorul $\bar{v}$ în două componente, una paralelă cu $\bar{a}$ și cealaltă perpendiculară pe $\bar{a}$

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}\bar{a}}{a^2}\,\bar{a} + \frac{1}{a^2}\,\bar{a} \times (\bar{v} \times \bar{a}).$$

Înlocuind valorile date pentru $\bar{v}\bar{a}$ și $\bar{v} \times \bar{a}$ se obține valoarea lui $\bar{v}$ sub forma

$$\bar{v} = \frac{m}{a^2}\,\bar{a} + \frac{1}{a^2}\,\bar{a} \times \bar{b}.$$

Unicitatea soluției se datorește faptului că între vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ există relația $\bar{a}\bar{b} = 0$, ceea ce face ca în ecuația vectorială $\bar{v} \times \bar{a}$ din cele trei ecuații scalare (care reprezintă proiecțiile acestei ecuații pe axe) numai două să fie independente.

Scanned with OKEN Scanner

1.9. Să se rezolve sistemul de ecuații vectoriale

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{a}$$
$$\bar{x} + \bar{z} = \bar{b}$$
$$(\bar{x} \times \bar{y})\, \bar{z} = v$$

unde $\bar{v}$, $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt cunoscuți.

Rezolvare. Se introduc în ecuația a treia + expresiile lui $\bar{y}$ și $\bar{z}$ în funcție de $\bar{x}$ din primele două ecuații. Rezultă

$$[\bar{x} \times (\bar{a} - \bar{x})]\ (\bar{b} - \bar{x}) = v,$$

care se mai poate scrie

$$(\bar{x} \times \bar{a})\, \bar{b} = v$$

sau

$$(\bar{a} \times b)\, \bar{x} = v.$$

Rezultă pentru $\bar{x}$ valoarea

$$\bar{x} = \frac{v}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} (\bar{a} \times \bar{b}).$$

Ceilalți doi vectori necunoscuți $\bar{y}$ și $\bar{z}$ au valorile

$$\bar{y} = \bar{a} - \frac{v}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} (\bar{a} \times \bar{b})$$

și

$$\bar{z} = \bar{b} - \frac{v}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} (\bar{a} \times \bar{b}).$$

1.10. Ce relații trebuie să existe între componentele x, y, z ale vectorului

$$\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

astfel încît

$$\bar{v} \times \frac{d\bar{v}}{dt} = 0.$$

Rezolvare. Vectorii $\bar{v}$ și $\frac{d\bar{v}}{dt}$ trebuie să fie paraleli pentru ca produsul lor vectorial să fie nul. Dacă $\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$, relația dată prin componentele lui $\bar{v}$ este

$$\bar{v} \times \frac{d\bar{v}}{dt} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \bar{i}(y\dot{z} - z\dot{y}) + \bar{j}(z\dot{x} - x\dot{z}) + \bar{k}(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0.$$

Componentele vectorului trebuie să satisfacă relațiile

$$y\dot{z} - z\dot{y} = 0$$
$$z\dot{x} - x\dot{z} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{z}$$
$$x\dot{y} - y\dot{x} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia sistemului este

$$\log x = \log C_1 y = \log C_2 z \text{ sau } x = C_1 y = C_2 z.$$

Vectorul $\bar{v}$ devine

$$\bar{v} = x\left(\bar{i} + \frac{1}{C_1}\bar{j} + \frac{1}{C_2}\bar{k}\right).$$

1.11. Să se calculeze gradientul funcţiilor

$$U_1 = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}, \quad U_2 = axy + byz + czx.$$

Rezolvare. Gradientul unei funcţii este vectorul

$$\bar{v} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.$$

În cazul dat, cei doi vectori căutaţi sînt

$$\bar{v}_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\bar{k} = -\frac{a}{x^2}\bar{i} - \frac{b}{y^2}\bar{j} - \frac{c}{z^2}\bar{k}$$

şi

$$\bar{v}_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U_3}{\partial z}\bar{k} = (ay + cz)\,\bar{i} + (ax + bz)\,\bar{j} + (by + cx)\,\bar{k}.$$

1.12. Să se calculeze grad $|\bar{c} \times \bar{v}|^2$, unde $\bar{c}$ este un vector constant.

Rezolvare. Se calculează $d(\bar{c} \times \bar{v})^2$

$$d(\bar{c} \times \bar{v})^2 = 2(\bar{c} \times \bar{v})\,(\bar{c} \times d\bar{v}).$$

Notînd $\bar{c} \times \bar{v} = \bar{b}$, formula devine

$$d(\bar{c} \times \bar{v})^2 = 2\bar{b}(\bar{c} \times d\bar{v}) = 2d\bar{v}(\bar{b} \times \bar{c}) = 2d\,\bar{v}[(\bar{c} \times \bar{v}) \times \bar{c}].$$

Rezultă

$$\text{grad } |\bar{c} \times \bar{v}|^2 = 2[(\bar{c} \times \bar{v}) \times c] = 2\bar{v}(\bar{c}\bar{c}) - 2\bar{c}(\bar{v}\bar{c}).$$

1.13. Să se calculeze divergenţa şi rotorul vectorilor

$$\bar{v}_1 = xy(z + c)\,\bar{i} + yz(x + a)\,\bar{j} + zx(y + b)\,\bar{k}$$

$$\bar{v}_2 = \sin x \sin y \cos z \cdot \bar{i} + \cos x \sin y \sin z \cdot \bar{j} + \sin x \cos y \sin z \cdot \bar{k}.$$

Rezolvare. Divergenţa unui vector are expresia

$$\text{div } \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

iar rotorul unui vector este

$$\text{rot}\,\bar{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

Pentru vectorii dați, derivatele parțiale sînt

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = y(z+c), \quad \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = x(z+c), \quad \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = xy$$

$$\frac{\partial v_{1y}}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = z(x+a), \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} = y(x+a)$$

$$\frac{\partial v_{1z}}{\partial x} = z(y+b), \quad \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} = zx, \quad \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = x(y+b)$$

$$\frac{\partial v_{2x}}{\partial x} = \cos x \sin y \cos z, \quad \frac{\partial v_{2x}}{\partial y} = \sin x \cos y \cos z, \quad \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} = -\sin x \sin y \sin z$$

$$\frac{\partial v_{2y}}{\partial x} = -\sin x \sin y \sin z, \quad \frac{\partial v_{2y}}{\partial y} = \cos x \cos y \sin z, \quad \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} = \cos x \sin y \cos z$$

$$\frac{\partial v_{2z}}{\partial x} = \cos x \cos y \sin z; \quad \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} = -\sin x \sin y \sin z; \quad \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} = \sin x \cos y \cos z$$

$$\text{div}\,\bar{v}_1 = y(z+c) + z(x+a) + x(y+b)$$

$$\text{div}\,\bar{v}_2 = \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z + \sin x \cos y \cos z$$

$$\text{rot}\,\bar{v}_1 = [zx - y(x+a)]\,\bar{i} + [xy - z(y+b)]\,\bar{j} + [yz - x(z+c)]\,\bar{k}$$

$$\text{rot}\,\bar{v}_2 = -[\sin x \sin y \sin z + \cos x \sin y \cos z]\,\bar{i} - [\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \sin z]\,\bar{j} - [\sin x \sin y \sin z + \sin x \cos y \cos z]\,\bar{k} = -\sin y \cos(z-x)\,\bar{i} - \sin z \cos(x-y)\,\bar{j} - \sin x \cos(y-z)\,\bar{k}.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

1.14. Să se determine mărimea și poziția vectorilor

$$\bar{v}_1(-3, 4, -3),\ \bar{v}_2(3, 0, 3) \text{ și } \bar{v}_3(1, 2, 3).$$

Să se calculeze apoi expresiile

$$\bar{E}_1 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3,\ \bar{E}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \bar{v}_3,\ E_3 = (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)\,\bar{v}_3,$$

$$\bar{E}_4 = (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) \times v_3$$

R. $\bar{E}_1 = \bar{i} + 6\bar{j} + 3\bar{k},\ \bar{E}_2 = -\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k},\ E_3 = -24,$

$$\bar{E}_4 = -24\,(\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}).$$

Scanned with OKEN Scanner

1.15. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC și O un punct oarecare (fig. 1.15). Să se demonstreze egalitatea

$$\overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

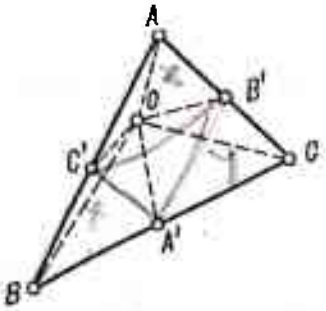


Fig. 1.15

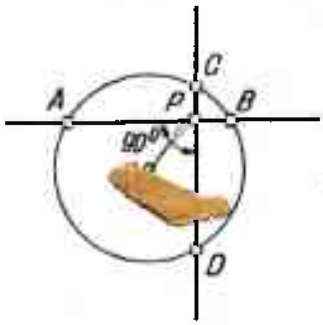


Fig. 1.16

1.16. Coardele APB și CPD ale unui cerc de centru O se intersectează ortogonal în punctul P (fig. 1.16). Să se demonstreze egalitatea

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PO}.$$

1.17. Să se găsească ecuația planului care trece prin mijlocul segmentului ce unește punctele $M_1(\bar{r}_1)$ și $M_2(\bar{r}_2)$ și care este perpendicular pe acest segment.

R. $\bar{r}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)$.

1.18. Să se demonstreze relațiile

$$(\bar{a}\times\bar{b})(\bar{a}\times\bar{b}) + (\bar{a}\bar{b})^2 = \bar{a}^2\bar{b}^2 = a^2b^2$$

$$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b}) = -2(\bar{a}\times\bar{b}).$$

1.19. Se dau trei puncte A, B, C. Să se verifice relațiile

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0, \quad \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA} = 2\,\overline{AC}$$

$$\overline{AB} - \overline{BC} - \overline{CA} = 2\overline{AB}, \quad \overline{AB}\cdot\overline{AC} + \overline{BC}\cdot\overline{AC} = \overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}\times\overline{BC} = \overline{BC}\times\overline{CA} = \overline{CA}\times\overline{AB}.$$

1.20. Să se demonstreze formulele

$$\bar{a}\times[\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{d})] = (\bar{b}\bar{d})(\bar{a}\times\bar{c}) - (\bar{b}\bar{c})(\bar{a}\times\bar{d})$$

$$\bar{a}\times[\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{d})] = [\bar{a}(\bar{c}\times\bar{d})]\,\bar{b} - (\bar{a}\bar{b})(\bar{c}\times\bar{d}).$$

1.21. Să se rezolve ecuația vectorială

$$\bar{v} = \bar{a}\times\bar{x},$$

vectorii $\bar{a}$ și $\bar{v}$ fiind cunoscuți (fig. 1.21). Discuție.

R. Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{v}$ trebuie să fie perpendiculari. $\bar{x}$ este într-un plan perpendicular pe $\bar{v}$, extremitatea sa putîndu-se deplasa pe o dreaptă paralelă cu $\bar{a}$ la distanța $\frac{v}{a}$.

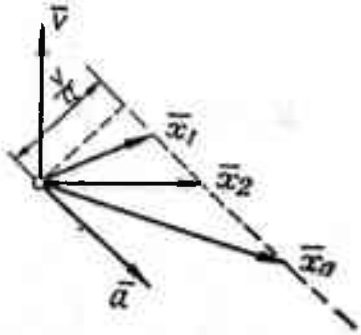


Fig. 1.21

1.22. Să se rezolve sistemul

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{a}, \ \bar{x} \times \bar{y} = \bar{b},$$

$\bar{a}$ și $\bar{b}$ fiind doi vectori dați. Discuție.

R. Problema este posibilă pentru $\bar{a}$ și $\bar{b}$ perpendiculari.

1.23. Să se calculeze expresia

$$\bar{E} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

unde $m = \frac{1}{1-t^2}$ și $\bar{v} = (1-t)\,\bar{i} + (1+t)\,\bar{j} + (1-t^2)\,\bar{k}$.

R. $\bar{E} = \frac{1}{(1+t)^2}\,\bar{i} - \frac{1}{(1-t)^2}\,\bar{j}$.

1.24. Să se calculeze gradientul funcțiilor

$$U_1 = (x-a) + (y-b) + (z-c),$$

$$U_2 = \sin x \sin y \sin z.$$

R. $\bar{v}_1 = \text{grad } U_1 = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$

$$\bar{v}_2 = \text{grad } U_2 = \cos x \sin y \sin z \cdot \bar{i} + \sin x \cos y \sin z \cdot \bar{j} + \\ + \sin x \sin y \cos z \cdot \bar{k}.$$

1.25. Ce valoare are grad $(x^m y^n)$ dacă

$$\text{grad } y = \frac{m}{n} \text{grad } x?$$

R. $m(x+y)\,x^{m-1}y^{n-1}$ grad x.

1.26. Să se calculeze divergența și rotorul vectorilor

$$\bar{v}_1 = (x^2+z^2)\,\bar{i} + (y^2+x^2)\,\bar{j} + (z^2+y^2)\,\bar{k}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{x}{yz}\,\bar{i} + \frac{y}{zx}\,\bar{j} + \frac{z}{xy}\,\bar{k}.$$

R. $\text{div } \bar{v}_1 = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$

$$\text{div } \bar{v}_2 = \frac{\bar{i}}{yz} + \frac{\bar{j}}{zx} + \frac{\bar{k}}{xy}$$

$$\text{rot } \bar{v}_1 = 2(y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k})$$

$$\text{rot } \bar{v}_2 = \frac{1}{x}\left(\frac{y}{z^2} - \frac{z}{y^2}\right)\bar{i} + \frac{1}{y}\left(\frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2}\right)\bar{j} + \frac{1}{z}\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right)\bar{k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.27. Să se calculeze div $\frac{\bar{v}}{v}$.

R. div $\frac{\bar{v}}{v} = \frac{2}{v}$.

1.28. Să se calculeze div $[\bar{a}(\bar{v}\times\bar{b})]$, unde $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt vectori constanți.

R. div $[\bar{a}(\bar{v}\times\bar{b})] = 2\,\bar{a}\bar{b}$.

1.29. Să se calculeze rot $[\bar{b}(\bar{v}\bar{a})]$, unde $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt vectori constanți.

R. rot $[\bar{b}(\bar{v}\bar{a})] = \bar{a}\times\bar{b}$.

1.30. Să se calculeze rot $\varphi\bar{a}$.

R. rot $(\varphi\bar{a}) = \varphi$ rot $\bar{a}$ + grad $\varphi\times\bar{a}$.

Scanned with OKEN Scanner

Partea intii

STATICA

Scanned with OKEN Scanner

II. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este studiul echilibrului punctului material liber şi cu legături. Legăturile considerate pot fi lucii sau cu frecări.

Noţiuni de bază. Forţele care acţionează asupra unui punct material sînt forţe concurente; ele se compun după regula paralelogramului (fig. II.1) şi satisfac relaţiile

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1F_2\cos\alpha}, \quad \alpha = \sphericalangle(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{F_2\sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha}$$

$$\frac{R}{\sin(\bar{F}_1, \bar{F}_2)} = \frac{F_1}{\sin(\bar{R}, \bar{F}_2)} = \frac{F_2}{\sin(\bar{R}, \bar{F}_1)}.$$

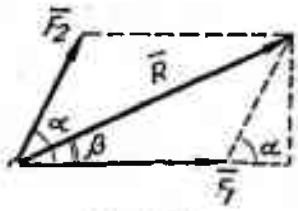


Fig. II.1

Orice sistem de forţe concurente, poate fi înlocuit cu o forţă unică $\bar{R}$ — rezultanta sistemului, determinată cu ajutorul regulii paralelogramului,

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i, \quad R^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_iF_k\cos(\bar{F}_i, \bar{F}_k).$$

Condiţia de echilibru a punctului material liber este

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{i}\sum_{i=1}^{n} X_i + \bar{j}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \bar{k}\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0,$$

trebuind să existe

$$X = \Sigma X_i = 0, \quad Y = \Sigma Y_i = 0, \quad Z = \Sigma Z_i = 0.$$

Dacă sistemul de forţe este plan, condiţiile devin

$$X = \Sigma X_i = 0, \quad Y = \Sigma Y_i = 0.$$

Punctul material cu legături poate fi tratat ca un punct material liber dacă, utilizînd axioma legăturilor, se înlocuiesc legăturile geometrice cu forţele de legătură ($\bar{\mathcal{R}}$).

Condiţia de echilibru devine

$$\bar{R} + \bar{\mathcal{R}} = 0,$$

respectiv prin proiecţii pe axe

$$X + \mathcal{R}_x = 0 \qquad Y + \mathcal{R}_y = 0 \qquad Z + \mathcal{R}_z = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Problemele de echilibru ale punctului material supus la legături comportă în general determinarea a două categorii de necunoscute; unele privind poziția punctului, celelalte privind forțele de legătură.

Forța de legătură $\overline{\mathcal{R}}$ poate fi descompusă în două componente: una după o direcție normală (după normala la suprafață sau în planul normal la curbă) și alta după o direcție tangențială (în planul tangent la suprafață sau după tangenta la curbă)

$$\overline{\mathcal{R}} = \overline{N} + \overline{T}.$$

Componenta normală împiedică punctul să părăsească legătura, iar componenta tangențială împiedică punctul să se deplaseze în planul tangent (forță de frecare).

Legăturile lucii corespund forțelor de frecare nule ($\overline{T} = 0$). Reacțiunea este dirijată după o direcție oarecare în planul normal (dacă punctul se găsește pe o curbă) sau este dirijată după normala la suprafață (dacă punctul se găsește pe o suprafață).

Ecuația suprafeței poate fi exprimată sub una din formele

$$\varphi(x, y, z) = 0, \text{ sau } z = z(x, y), \text{ sau } x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

În cazul legăturilor lucii, reacțiunea $\overline{\mathcal{R}}$, fiind un vector normal la suprafață, are forma

$$\overline{\mathcal{R}} = \lambda \operatorname{grad} \varphi.$$

Poziția de echilibru a punctului se obține respectiv din

$$\frac{X}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

$$\frac{X}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z}{-1}$$

$$\frac{X}{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}} = \frac{Y}{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}} = \frac{Z}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}}$$

unde X, Y, Z sînt proiecțiile pe axe ale rezultantei forțelor efectiv aplicate.

În cazul echilibrului unui punct pe o curbă lucie (intersecție de două suprafețe), reacțiunea se poate pune sub forma

$$\overline{\mathcal{R}} = \lambda \operatorname{grad} \varphi + \mu \operatorname{grad} \psi.$$

Ecuațiile curbei pot fi date sub una din expresiile

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$
$$z = f(x, y), \qquad z = g(x, y).$$
$$x = x(t), \qquad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Poziția de echilibru a punctului este dată de:

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ Z & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ Z & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$$

unde $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sînt derivatele în raport cu timpul ale funcțiilor x, y, z.

În cazul legăturilor aspre, reacțiunea are pe lîngă componenta normală și o componentă tangențială $\overline{T}$ (forța de frecare de alunecare) de direcție

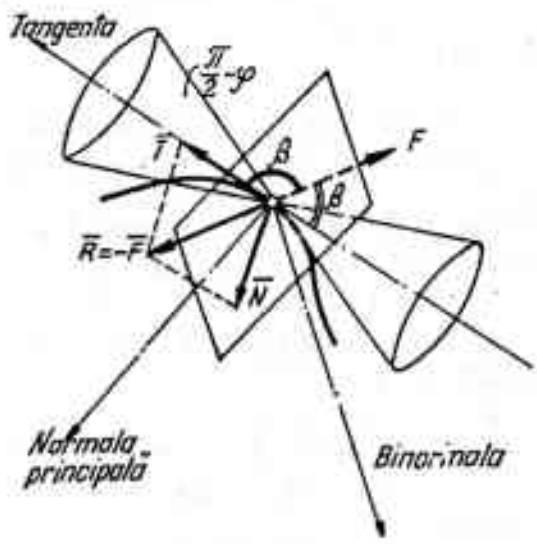


Fig. II.2

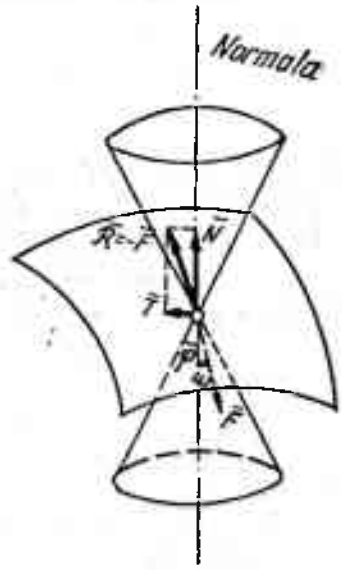


Fig. II.3

tangentă la curbă (fig. II.2), respectiv situată în planul tangent la suprafață (fig. II. 3).

Pentru echilibru, trebuie îndeplinită condiția

$$T \leqslant fN$$

unde T și N sînt modulii forțelor $\overline{T}$ și $\overline{N}$, iar

$$f = \operatorname{tg} \varphi$$

este coeficientul de frecare la alunecare. Unghiul φ se numeşte unghi de frecare şi reprezintă unghiul format de reacţiunea maximă $\bar{R}$ cu normala la planul tangent (în cazul suprafeţelor).

Pentru un punct obligat să rămînă în echilibru pe o suprafaţă, unghiul α dintre rezultanta forţelor efectiv aplicate $\bar{R}$ şi normala la suprafaţă trebuie să îndeplinească condiţia

$$\alpha \leqslant \varphi.$$

În cazul unui punct obligat să rămînă pe o curbă, unghiul β dintre rezultanta forţelor efectiv aplicate $\bar{R}$ şi tangenta la curbă, trebuie să îndeplinească condiţia

$$\beta \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Sub forma analitică generală, condiţia de echilibru cu frecare pe o suprafaţă se poate scrie ţinînd seama că vectorul rezultant trebuie să se găsească în interiorul conului de frecare avînd unghiul la vîrf 2φ. Aceasta revine la

$$\frac{\left| X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + Z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Probleme rezolvate

2.1. Un punct M, de masă m_1, situat în planul unui triunghi isoscel ABC, este atras după legea lui Newton de trei mase egale m, care se găsesc în vîrfurile triunghiului (fig. 2.1).

Să se determine relaţia care există între baza b şi înălţimea h a triunghiului, ştiind că punctul se găseşte în echilibru la mijlocul înălţimii h a triunghiului.

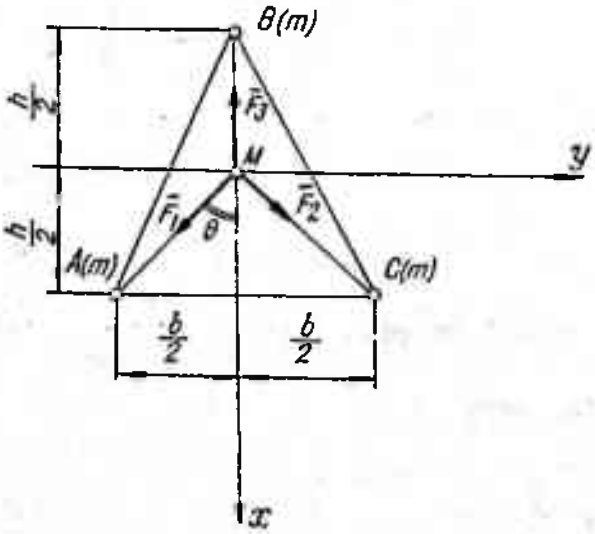


Fig. 2.1

Rezolvare. Condiţia de echilibru este

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Conform legii newtoniene de atracţie

$$F_1 = F_2 = k\frac{mm_1}{\frac{b^2+h^2}{4}}, \qquad F_3 = k\frac{mm_1}{\frac{h^2}{4}}.$$

Proiectînd ecuaţia de echilibru (a) pe axa Mx obţinem

$$-4k\frac{mm_1}{h^2} + 2k\frac{4mm_1}{b^2+h^2}\cos\theta = 0,$$

respectiv

$$\frac{1}{h^2} = \frac{2}{b^2 + h^2} \cos \theta. \qquad \text{(b)}$$

Dar

$$\cos \theta = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{b^2 + h^2}{4}}} = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}}$$

și relația (b) devine

$$\frac{1}{h^2} = \frac{2h}{(b^2 + h^2)^{3/2}} \quad \text{sau} \quad 2h^3 = (b^2 + h^2)^{3/2}$$

sau

$$h^2 \sqrt[3]{4} = b^2 + h^2.$$

Rezultă pentru b valoarea

$$b = h\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} = 0{,}76\, h.$$

2.2. Să se determine poziția de echilibru a inelului O, supus acțiunii a trei forțe $\bar{P}$, $\bar{Q}$ și $\bar{G}$ prin intermediul a trei fire dispuse ca în fig. 2.2, *a*.

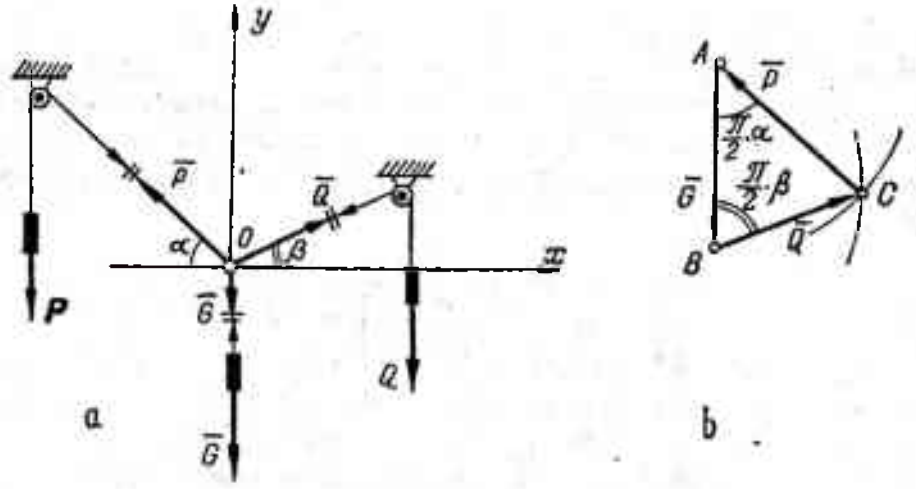


Fig. 2.2

Rezolvare. Condiția de echilibru a inelului O este dată de relația

$$\Sigma \bar{F}_i = \bar{P} + \bar{Q} + \bar{G} = 0.$$

Această ecuație, proiectată pe axele Ox și Oy, ia forma

$$-P \cos \alpha + Q \cos \beta = 0, \quad P \sin \alpha + Q \sin \beta - G = 0$$

de unde

$$\begin{cases} P\cos\alpha = Q\cos\beta \\ P\sin\alpha = G - Q\sin\beta \end{cases}$$

$$P^2 = G^2 + Q^2 - 2GQ\sin\beta.$$

Soluţia sistemului este

$$\sin\beta = \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2GQ}$$

$$\sin\alpha = \frac{G - Q\sin\beta}{P} = \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2PG}.$$

Pentru ca echilibrul să fie posibil trebuie ca

$$\sin\beta = \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2GQ} \leqslant 1$$

$$\sin\alpha = \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2PG} \leqslant 1;$$

adunînd cele două inegalităţi se obţine condiţia

$$G < P + Q \text{ şi analog } P < Q + G, \quad Q < G + P.$$

Grafic, condiţia de echilibru a punctului O se obţine prin construirea unui poligon de forţe închis cu forţele $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{G}$ (fig. 2.2, *b*). Problema se reduce la construirea unui triunghi cu o latură cunoscută ca mărime şi direcţie, celelalte două laturi fiind cunoscute numai ca mărime.

Geometric se obţin unghiurile α şi β aplicînd teorema lui Stevin în triunghiul ABC

$$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{G}{\sin(\alpha + \beta)}$$

sau

$$\frac{P}{\cos\beta} = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{G}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$$

Se observă că în triunghiul ABC condiţia ca mărimea unei laturi să fie mai mică decît suma celorlalte două conduce la inegalităţile obţinute mai sus

$$G < P + Q, \quad P < G + Q, \quad Q < P + G.$$

2.3. Un inel A de greutate $\bar{G}$ este prins de doi pereţi verticali cu două fire AB şi AC, care fac unghiurile α şi β cu verticala (fig. 2.3, *a*). Să se determine tensiunile din fire pentru poziţia de echilibru a punctului material.

Scanned with OKEN Scanner

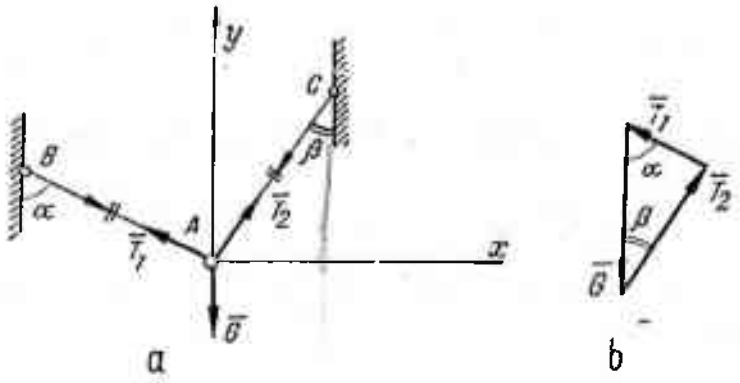


Fig. 2.3

Rezolvare. Soluția analitică. Condiția de echilibru $\bar{R} = 0$, proiectată pe axele sistemului de referință ales, duce la următoarele relații

$$\Sigma X_i = T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta - G = 0$$

de unde rezultă valorile lui T_1 și T_2

$$T_1 = \frac{G \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad T_2 = \frac{G \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta}.$$

Soluția grafică. Pentru echilibrul punctului A trebuie ca poligonul forțelor $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ și $\bar{G}$ să fie închis (fig. 2.3, *b*).

Problema se reduce la construirea unui triunghi, cunoscînd mărimea și direcția unei laturi ($\bar{G}$), precum și direcțiile celorlalte două.

Soluția geometrică. Aplicînd teorema sinușilor obținem

$$\frac{T_1}{\sin \beta} = \frac{T_2}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin (\alpha + \beta)}$$

de unde

$$T_1 = \frac{G \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad T_2 = \frac{G \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

2.4. Un inel O de greutate $\bar{P}$ poate aluneca în lungul unui fir AOB. Firul este fixat în capătul A și trece peste un scripete $B(AB = a)$. La capătul liber al firului atîrnă o greutate $\bar{Q}$. Să se determine poziția de echilibru a inelului dată de unghiurile α și β (fig. 2.4).

Rezolvare. Condiția de echilibru a punctului este

$$\bar{P} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$$

sau, proiectată pe axe,

$$-Q \sin \alpha - Q \sin \beta + P = 0$$

$$Q \cos \alpha - Q \cos \beta = 0.$$

Rezultă

$$\alpha = \beta, \quad \sin\alpha = \frac{P}{2Q}.$$

Pentru ca echilibrul să fie posibil, trebuie ca între P şi Q să existe relaţia

$$P \leqslant 2Q \text{ (din condiţia } \sin\alpha \leqslant 1).$$

Raportate la sistemul de axe ales, coordonatele punctului O pentru poziţia de echilibru sînt

$$y = \frac{a}{2}, \quad x = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2}\frac{P}{\sqrt{4Q^2 - P^2}}$$

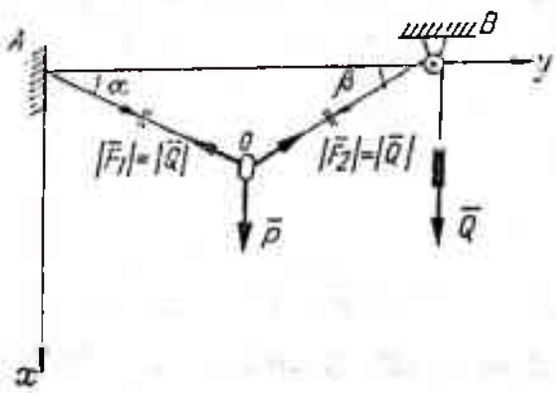


Fig. 2.4

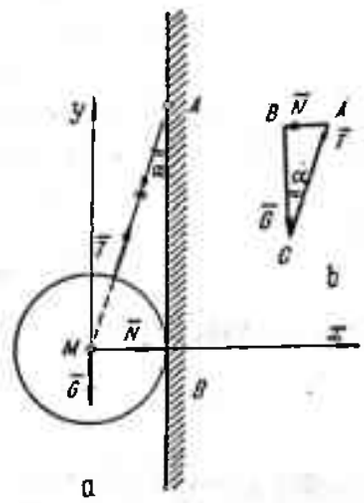


Fig. 2.5

2.5. Un disc de greutate $\bar{G}$ se reazemă pe un perete vertical luciu AB, fiind suspendat cu un fir de punctul A. Firul face cu peretele unghiul α (fig. 2.5, *a*). Să se determine tensiunea în fir şi reacţiunea peretelui.

Rezolvare. Condiţia de echilibru a discului este

$$\bar{G} + \bar{N} + \bar{T} = 0$$

Ecuaţiile scalare de echilibru au forma

$$\Sigma X_i = -N + T\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = T\cos\alpha - G = 0$$

de unde

$$T = \frac{G}{\cos\alpha}, \quad N = G\operatorname{tg}\alpha.$$

Soluţia grafică. Pentru ca punctul să se găsească în echilibru trebuie ca cele trei forţe care îl acţionează să fie concurente, iar poligonul lor să fie un poligon închis (fig. 2.5, *b*).

Problema se reduce la descompunerea unei forțe date ca mărime și direcție $\bar{G}$, în două componente de direcții cunoscute și considerarea acestora cu semn schimbat.

Soluția geometrică. În triunghiul dreptunghic ABC se poate scrie în baza teoremei lui Stevin

$$T = \frac{G}{\cos \alpha}, \quad N = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Se obțin astfel și valorile reacțiunilor căutate $\bar{T}$ și $\bar{N}$.

2.6. Greutatea $\bar{P}$ este suspendată la capătul unui fir care trece peste scripetele m și este înfășurat pe tamburul K. Scripetele m se găsește la extremitatea brațului articulat în S și este ancorat cu cablul orizontal mT (fig. 2.6, *a*). Să se determine eforturile în bara mS și firul mT pentru ca scripetele m să fie în echilibru.

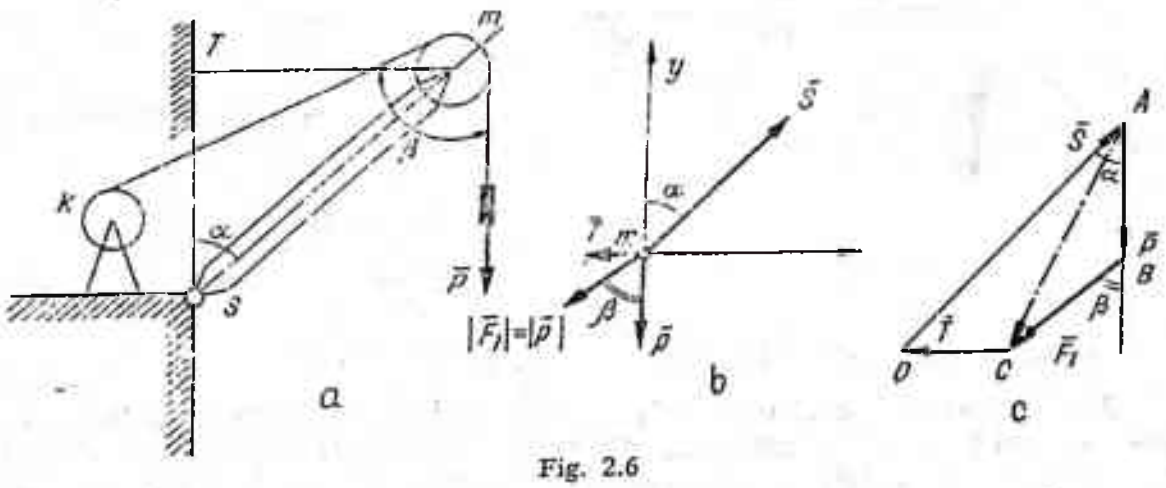


Fig. 2.6

Rezolvare. Soluția analitică (fig. 2.6, *b*). Ecuațiile scalare de echilibru ale punctului sînt

$$\Sigma X_i = -P \sin \beta - T + S \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = -P - P \cos \beta + S \cos \alpha = 0$$

de unde

$$S = \frac{P(1 + \cos \beta)}{\cos \alpha}, \quad T = P \frac{\sin (\alpha - \beta) + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Soluția grafică. Pentru echilibrul punctului m trebuie ca poligonul forțelor $\bar{P}, \bar{F}_1, \bar{T}, \bar{S}$, să fie închis (fig. 2.6, *c*). Rezultanta forțelor date, cunoscută ca mărime și direcție (vectorul $\overline{AC}$) trebuie descompusă în două componente de direcții cunoscute $\overline{CD}$ și $\overline{AD}$. Intensitatea componentelor $\bar{S}$ și $\bar{T}$ se obține din cele două componente considerate cu semn schimbat.

2.7. Să se determine tensiunile $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$ din firele OC, OA și OB care susțin greutatea $\bar{G}$ ce acționează în punctul O. Planul firelor OA și OB este înclinat față de verticală cu unghiul β. Firele OA și OB sînt dispuse simetric față de planul vertical care conține pe OC formînd cu aceasta unghiuri egale cu α (fig. 2.7).

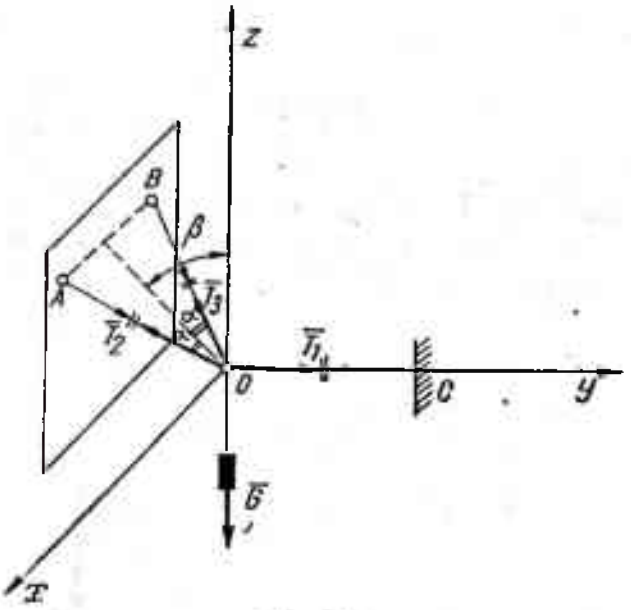


Fig. 2.7

Rezolvare. Condiția de echilibru a punctului O este dată de ecuația vectorială

$$\bar{R} = \bar{G} + \bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3 = 0,$$

respectiv de sistemul de ecuații scalare

$$\Sigma X_i = T_2 \sin\beta \sin\alpha - T_3 \sin\beta \sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = T_1 - T_2 \sin\beta \cos\alpha - T_3 \sin\beta \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Z_i = T_2 \cos\beta \cos\alpha + T_3 \cos\beta \cos\alpha - G = 0$$

de unde

$$T_2 = T_3 = \frac{G}{2\cos\alpha\cos\beta}$$

$$T_1 = 2T_2 \cos\alpha \sin\beta = G \operatorname{tg}\beta.$$

Problema este posibilă pentru $\alpha < \frac{\pi}{2}$ și $\beta < \frac{\pi}{2}$.

2.8. De capătul m al unui stîlp vertical mA rigidizat cu bara mB, care face unghiul $\beta = 30°$ cu orizontala, trag într-un plan orizontal forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ (fig. 2.8). Știind că $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = 120$ kgf acționează sub unghiuri $\alpha = 45°$ față de orizontala din planul stîlpului mA și barei mB (care trece prin m), să se determine reacțiunile barelor mA și mB, pentru ca punctul m să fie în echilibru.

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru ale punctului sînt

$$\Sigma X_i = F_1 - T \cos\beta \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = Y - T \sin\beta = 0$$

$$\Sigma Z_i = F_2 - T \cos\beta \cos\alpha = 0.$$

Rezultă

$$T = \frac{F_1}{\cos\beta\cos\alpha} = \frac{120}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{480}{\sqrt{6}} \text{ kgf.}$$

$$Y = F_1 \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha} = \frac{120\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{240}{\sqrt{6}} \text{ kgf.}$$

Scanned with OKEN Scanner

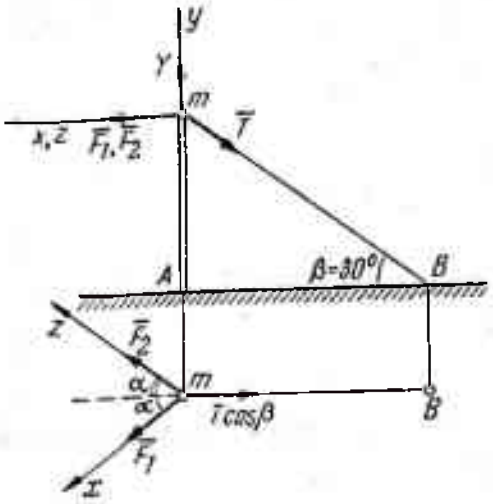


Fig. 2.8

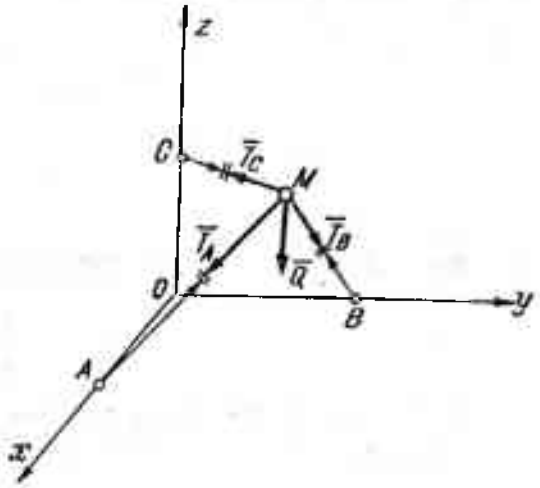


Fig. 2.9

2.9. Un punct material M, de greutate $\bar{Q}$, este prins cu trei bare de lungimi egale L. Punctul se găsește în echilibru în poziția: $x = y = z = \frac{1}{3}(l - \sqrt{3L^2 - 2l^2})$ (fig. 2.9). Știind că $OA = OC = OB = l$ să se determine tensiunile în cele trei bare.

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru ale punctului M sînt

$$T_A \frac{l-x}{L} - T_B \frac{x}{L} - T_C \frac{x}{L} = 0$$

$$-T_A \frac{x}{L} + T_B \frac{l-x}{L} - T_C \frac{x}{L} = 0$$

$$-T_A \frac{x}{L} - T_B \frac{x}{L} + T_C \frac{l-x}{L} = Q.$$

Din ultimele două ecuații avem

$$T_B = T_C - Q\frac{L}{l}.$$

Introducînd această valoare în primele două ecuații și rezolvînd sistemul se obține

$$T_C = \frac{1}{2}\left[T_A \frac{l-x}{x} + Q\frac{L}{l}\right]$$

$$T_A = QL\frac{x}{l^2 - 3lx} = \frac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}} QL$$

Rezultă pentru eforturile din bare expresiile

$$T_C = \frac{QL(l-2x)}{l(l-3x)} = \frac{l+2\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}QL$$

$$T_B = T_A = \frac{l-\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}QL.$$

Se observă că pentru ca problema să fie posibilă trebuie să existe relaţia

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,l \leqslant L.$$

2.10. Să se găsească poziţia de echilibru a unui punct material greu pe suprafaţa lucie a elipsoidului de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Rezolvare. Greutatea fiind verticală, paralelă cu axa Oz, are forma $\bar{G}=G\bar{k}$. Notînd ecuaţia suprafeţei elipsoidului cu

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

derivatele parţiale ale funcţiei $\varphi(x, y, z)$ au forma

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}.$$

Condiţia de echilibru devine

$$\frac{0}{\frac{2x}{a^2}}=\frac{0}{\frac{2y}{b^2}}=\frac{-G}{\frac{2z}{c^2}}$$

şi rezultă $x=0$ şi $y=0$. Deducem apoi din ecuaţia suprafeţei: $z=\pm c$. Deci poziţiile de echilibru sînt $A(0, 0, c)$ şi $B(0, 0, -c)$.

2.11. O axă AB care formează cu orizontala unghiul α şi un scripete fix se găsesc în acelaşi plan vertical, ca în figura 2.11. Pe axă poate aluneca fără frecare un punct material de greutate $\bar{P}$. De acest punct este prins un fir care trece peste scripete şi poartă la extremitatea liberă greutatea $\bar{Q}$. Să se determine unghiul β dintre fir şi axă şi presiunea punctului asupra axei pentru poziţia de echilibru.

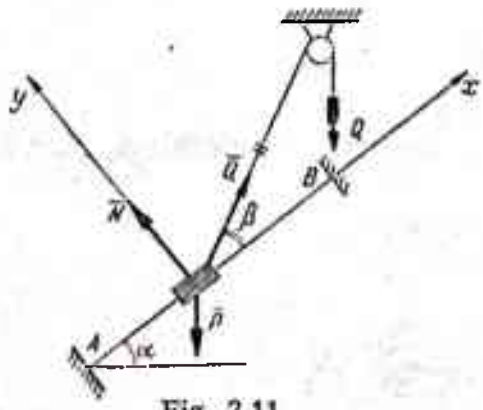


Fig. 2.11

Cazuri particulare: $\alpha=90°$ şi $\alpha=0°$.

Rezolvare. Condiţia de echilibru a punctului este

$$\bar{P}+\bar{Q}+\bar{N}=0.$$

Ecuațiile scalare de echilibru ale punctului au forma

$$\Sigma X_i = Q \cos \beta - P \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = N - P \cos \alpha + Q \sin \beta = 0.$$

Rezultă

$$\cos \beta = \frac{P}{Q} \sin \alpha \text{ și } N = P \cos \alpha - Q \sqrt{1 - \frac{P^2}{Q^2} \sin^2 \alpha} = P \cos \alpha - \sqrt{Q^2 - P^2 \sin^2 \alpha}.$$

Cazuri particulare:

$$\alpha = 90°, \quad \beta = \arccos \frac{P}{Q}, \quad N = \sqrt{Q^2 - P^2}$$

$$\alpha = 0°, \quad \beta = 90°, \quad N = P - Q.$$

2.12. Un punct material M, de greutate $\bar{G}$, poate aluneca fără frecare pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic OAB, fiind atras de vîrful O cu o forță $\bar{F}$ invers proporțională cu pătratul distanței dintre cele două puncte (coeficient de proporționalitate k), (fig. 2.12). Să se determine mărimea coeficientului k pentru care punctul se găsește în echilibru la jumătatea ipotenuzei M și valoarea reacțiunii în acel moment.

Rezolvare. Distanța $OM = \frac{l}{2}$, punctul M găsindu-se la mijlocu ipotenuzei $AB = l$. Deci

$$F = \frac{k}{(OM)^2} = \frac{k}{\frac{l^2}{4}} = \frac{4k}{l^2}$$

Din triunghiul OMB rezultă pentru unghiul $\alpha = \widehat{BOM}$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{b}{l}, \quad \sin \alpha = \frac{h}{l}.$$

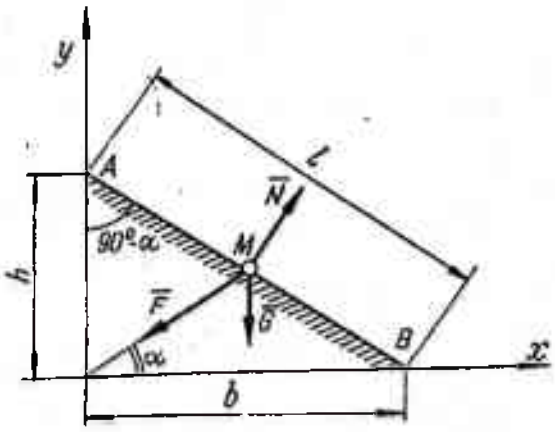


Fig. 2. 21

Ecuațiile scalare de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = -F \cos \alpha + N \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = N \cos \alpha - F \sin \alpha - G = 0.$$

Înlocuind în aceste ecuații valorile lui sin α și cos α obținem

$$-\frac{4k}{l^2}\cdot\frac{b}{l}+N\frac{h}{l}=0$$

$$N\cdot\frac{b}{l}-\frac{4k}{l^2}\cdot\frac{h}{l}-G=0$$

de unde rezultă

$$k=\frac{Ghl^3}{4(b^2-h^2)}$$

$$N=\frac{4kb}{l^2h}=\frac{4b}{l^2h}\cdot\frac{Ghl^3}{4(b^2-h^2)}=\frac{Gbl}{b^2-h^2}.$$

Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca $N \geqslant 0$, deci $b \geqslant h$.

2.13. Un punct material M, de greutate $\bar{G}$, poate aluneca fără frecare pe un cerc de rază r (fig. 2.13), fiind respins de punctul A, capătul inferior al diametrului vertical, cu o forță $\bar{F}$ invers proporțională cu pătratul distanței dintre cele două puncte (coeficient de proporționalitate k). Să se determine poziția de echilibru a punctului pe cerc și reacțiunea cercului.

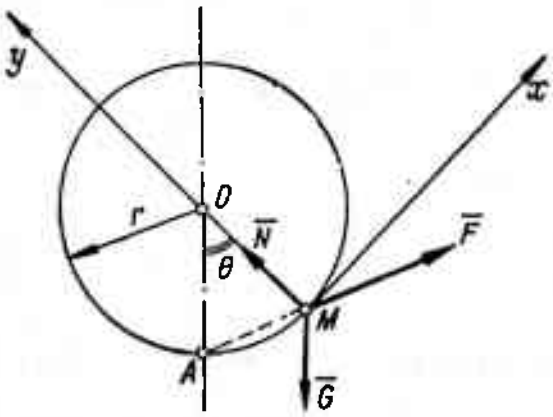


Fig. 2.13

Rezolvare. În triunghiul OAM, distanța $AM = 2r\sin\frac{\theta}{2}$, deci forța repulsivă $F=\frac{k}{\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$. Proiectăm ecuația de echilibru a punctului $\bar{G}+\bar{F}+\bar{N}=0$ pe direcția tangentei la cerc și pe direcția razei în punctul considerat.

Ecuațiile scalare de echilibru ale punctului M sînt

$$\Sigma X_t=\frac{k}{\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\cos\frac{\theta}{2}-G\sin\theta=0$$

$$\Sigma Y_t=N-G\cos\theta-\frac{k}{\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\sin\frac{\theta}{2}=0.$$

Din prima ecuație a sistemului, prin înlocuirea lui $\sin\theta$ cu $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, se obțin soluțiile

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0 \text{ pentru } \theta = \pi$$

$$\frac{k}{4r^2\sin\frac{2\theta}{2}} - 2G\sin\frac{\theta}{2} = 0,$$

respectiv

$$\sin^3\frac{\theta}{2} = \frac{k}{8r^2G}, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{k}{r^2G}},$$

adică

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{k}{r^2G}}.$$

Acestor două posibilități de echilibru le corespund două valori pentru reacțiunea $\bar{N}$

$$N = -G + \frac{k}{4r^2}$$

$$N = G\cos\theta + \frac{k}{4r^2\sin\frac{\theta}{2}} = G\left[1 - 2\cdot\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{k}{r^2G}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{4r^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{k}{r^2G}}}\right] = G - \frac{G}{2}\cdot\frac{k^{2/3}}{r^{4/3}G^{2/3}} + \frac{k}{2r^2\cdot k^{1/3}\frac{1}{r^{2/3}G^{1/3}}} = G.$$

2.14. Pe un arc de cerc de rază r, situat într-un plan vertical, se reazemă fără frecare două puncte materiale A și B de greutăți $\bar{P}$ și $\bar{Q}$, legate între ele printr-un fir flexibil și inextensibil de lungime l (fig. 2.14). Să se determine reacțiunile arcului asupra punctelor A și B și poziția de echilibru a sistemului.

Rezolvare: Ținând seama de relația $|T_1| = |T_2| = T$ și scriind echilibrul punctelor A și B se obține sistemul de ecuații

$$\bar{P} + \bar{N}_1 + \bar{T}_1 = 0, \quad \bar{Q} + \bar{N}_2 + \bar{T}_2 = 0,$$

respectiv, proiectînd în punctele A și B toate forțele pe direcția tangentei și normalei în acele puncte se obține sistemul de ecuații scalare

$$T - P\sin\alpha = 0 \quad N_1 - P\cos\alpha = 0$$

$$Q\sin\beta - T = 0 \quad N_2 - Q\cos\beta = 0$$

(tensiunea în fir este constantă în tot lungul firului).

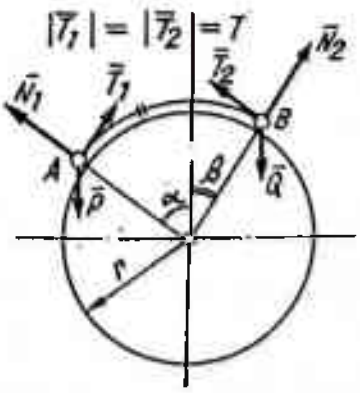


Fig. 2.14

Celor patru ecuații scalare de echilibru li se adaugă și relația geometrică $l = r(\alpha + \beta)$.

Rezolvînd sistemul de ecuații, obținem pentru necunoscute valorile

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{P \sin \frac{l}{r} - Q}{P \cos \frac{l}{r}}, \quad \alpha = \frac{l}{r} - \beta, \quad N_1 = P \cos \alpha,$$

$$N_2 = Q \cos \beta, \quad T = P \sin \alpha.$$

Poziția de echilibru este determinată prin valoarea unghiului dintre raza vectoare OB și axa verticală (fig. 2.14).

2.15. Un punct material de greutate neglijabilă este obligat să rămînă pe cercul de ecuații $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ (fig. 2.15, *a*) și este legat cu două resoarte ideale, de aceeași constantă elastică k, de extremitățile diametrului AB Să se determine poziția de echilibru a punctului.

Rezolvare. Rezultanta celor două forțe elastice are proiecțiile pe axele triedrului $Oxyz$.

$$X = -k(x + a) - k(x - a) = -2kx$$

$$Y = -k(y - 0) - k(y - 0) = -2ky$$

$$Z = 0.$$

Ecuațiile cercului sînt

$$\varphi = x^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad \psi = z = 0$$

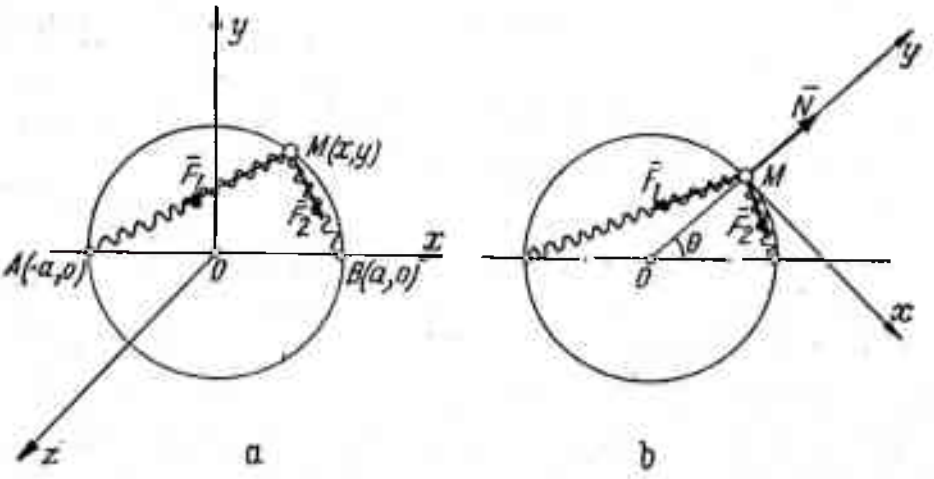


Fig. 2.15

și rezultă

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 1.$$

Condiția de echilibru devine

$$\begin{vmatrix} -2ky & 2x & 0 \\ -2ky & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Această condiție este identic satisfăcută, deci punctul material este în echilibru în orice poziție pe cerc.

Problema se poate rezolva și în alt mod (fig. 2.15, *b*). Condiția de echilibru a punctului pe cerc este

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{N} = 0.$$

Ecuațiile scalare de echilibru au forma

$$-F_1 \sin\frac{\theta}{2} + F_2 \cos\frac{\theta}{2} = 0$$

$$N - F_1 \cos\frac{\theta}{2} - F_2 \sin\frac{\theta}{2} = 0.$$

Dar

$$F_1 = k \cdot 2r \cos\frac{\theta}{2}, \quad F_2 = k \cdot 2r \sin\frac{\theta}{2}$$

deci ecuațiile devin

$$-2kr \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} + 2kr \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} = 0$$

$$N = 2kr \cos^2\frac{\theta}{2} + 2kr \sin^2\frac{\theta}{2} = 2kr.$$

Punctul M se găsește în echilibru independent de unghiul θ, deci în orice poziție pe cerc.

2.16. Un inel P, de greutate $\bar{G}$, poate aluneca fără frecare pe o bară care are forma unei parabole cu axa verticală dirijată în jos (fig. 2.16). Inelul este atras de axa parabolei cu o forță $\bar{F}$ proporțională cu distanța de la acesta la axă. Să se determine poziția de echilibru a inelului.

Rezolvare. Vom considera parabola de ecuație

$$y = ax^2.$$

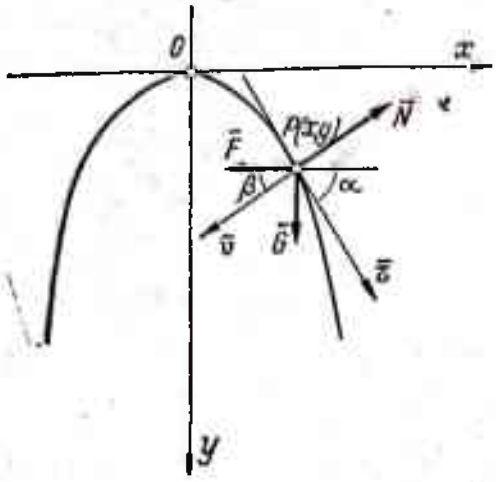


Fig. 2.16

Dacă notăm cu α şi β unghiurile formate de tangenta şi normala la parabolă cu direcţia axei Ox, avem

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y' = 2\,ax$$

$$\sin \beta = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}},$$

$$\cos \beta = \sin \alpha = \frac{2ax}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}.$$

Ecuaţiile scalare de echilibru vor fi

$$\Sigma X_i = -kx + N \frac{2ax}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} = 0$$

$$\Sigma Y_i = G - N \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} = 0.$$

O primă soluţie a problemei ($x = 0$) se obţine din prima ecuaţie. Eliminînd apoi reacţiunea N, se găseşte

$$G = \frac{k}{2a} \ (x\text{-oarecare}).$$

Rezultă că problema are două soluţii:

— pentru $x = 0$, inelul se găseşte în vîrful parabolei;

— pentru celelalte valori ale lui x, inelul poate fi în echilibru în orice punct al parabolei dacă datele problemei satisfac condiţia $G = \frac{k}{2a}$.

Problema se poate rezolva şi în alt mod utilizînd formulele din introducere relative la exprimarea analitică a condiţiei de echilibru a unui punct pe o curbă de ecuaţii parametrice $\varphi(xyz) = 0$ şi $\psi(xyz) = 0$

$$\bar{R} = \bar{F} + \bar{G} = -kx\bar{i} + G\bar{j}$$

rezultanta forţelor date.

Ecuaţia curbei fiind

$$\varphi = y - ax^2 \text{ şi } \psi = z,$$

se obţine

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2\,ax, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 1.$$

Pentru ca punctul să rămînă în echilibru pe curba dată, trebuie ca

$$\begin{vmatrix} -kx & -2ax & 0 \\ G & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

sau

$$-kx + 2axG = 0.$$

Soluţiile acestei ecuaţii sînt

$$x = 0$$

şi, independent de x, condiţia: $G = \frac{k}{2a}$.

În ambele cazuri rezultatele obţinute sînt aceleaşi.

2.17. Pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală se află un punct material de greutate $\bar{P}$, asupra căruia acţionează forţa $\bar{Q}$, formînd cu planul înclinat unghiul β (fig. 2.17, *a*). Între ce limite poate să varieze forţa $\bar{Q}$ în cazul echilibrului punctului, dacă coeficientul de frecare dintre punctul material şi plan este $f = \operatorname{tg} \varphi$.

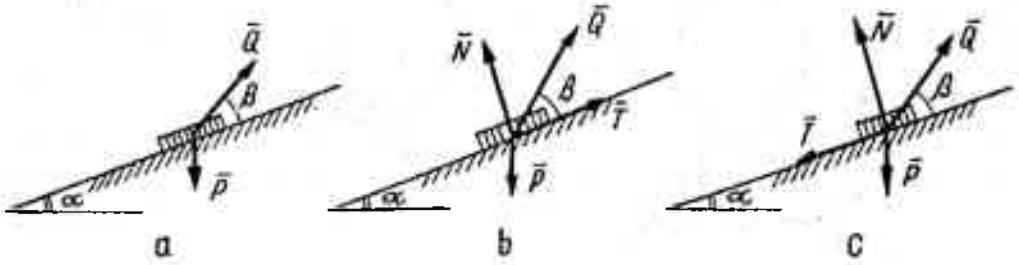


Fig. 2.17

Rezolvare. Punctul material poate aluneca în jos sau în sus pe planul înclinat (fig. 2.17, *b* şi *c*).

Luînd în considerare aceste două posibilităţi de deplasare se pot scrie următoarele relaţii de echilibru

$$\begin{gathered} Q\cos\beta - T - P\sin\alpha = 0 \\ N - P\cos\alpha + Q\sin\beta = 0 \\ T \leqslant fN; \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} Q\cos\beta + T - P\sin\alpha = 0 \\ N - P\cos\alpha + Q\sin\beta = 0 \\ T \leqslant fN. \end{gathered} \tag{2}$$

Din relaţiile (1) obţinem

$$Q \leqslant P\,\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)},$$

iar din (2) rezultă

$$Q \geqslant P\,\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci pentru ca punctul să se găsească în echilibru, trebuie ca forța Q să satisfacă dubla inegalitate

$$P\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)} \leqslant Q \leqslant P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)}.$$

2.18. Pentru ca un alpinist de greutate $\bar{G}$ să nu alunece pe o coastă de forma unui plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, el trebuie tras în sus cu o frînghie care exercită asupra lui o forță $\bar{F}$ (fig. 2.18, *a*).

Întrucît $\bar{F}$ nu trebuie să fie prea mare, se cere să se determine intervalul în care poate lua valori forța $\bar{F}$, astfel ca alpinistul să rămînă în echilibru coeficientul de frecare este f).

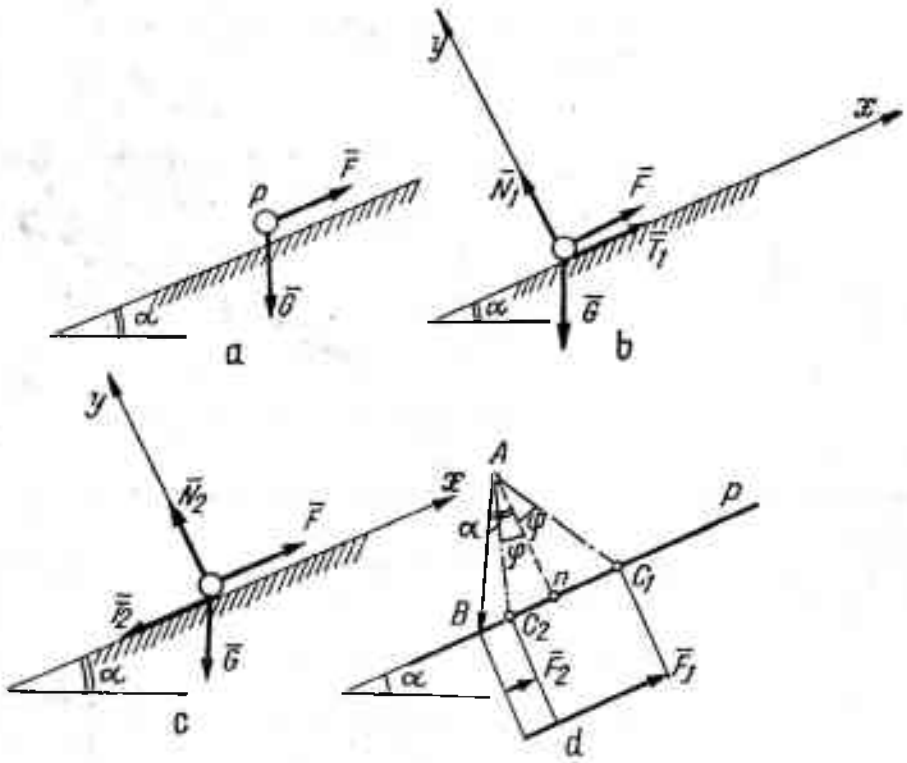


Fig. 2.18

Rezolvare. Soluția analitică. Vom împărți rezolvarea problemei în două etape:

a) Alpinistul, asimilat cu punctul material P, tinde să alunece în jos (fig. 2.18, *b*).

Condițiile de echilibru cu frecare sînt

$$\Sigma X_i = F + T_1 - G\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_1 - G\cos\alpha = 0$$

$$T_1 \leqslant fN_1$$

și obținem

$$F \geqslant G(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

b) Alpinistul tinde să alunece în sus (fig. 2.18, *c*).

Procedînd în mod asemănător, găsim

$$F \leqslant G(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

deci limitele între care poate varia $\bar{F}$ astfel încît punctul să se găsească în echilibru sînt

$$G(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leqslant F \leqslant G(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Înlocuind $f = \operatorname{tg}\varphi$ se obține

$$G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} \leqslant F \leqslant G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Dacă $\alpha > \varphi$, ambele limite ale valorii forței $\bar{F}$ sînt pozitive. Punctul material nu poate fi în echilibru fără ajutorul forței $\bar{F}$.

Dacă $\alpha < \varphi$, limita inferioară a lui F este negativă. Aceasta înseamnă că punctul material poate rămîne în echilibru chiar dacă $F = 0$.

Soluția grafică. Se construiește la scară un vector $\overline{AB}$ egal și paralel cu forța verticală $\bar{G}$. Din punctul B se duce o paralelă Bp la planul înclinat, iar din A o dreaptă An perpendiculară pe Bp. Conul de frecare este delimitat de două drepte AC_1 și AC_2 fiecare înclinată cu unghiul φ față de An (fig. 2.18, *d*). Acestea determină pe dreapta Bp punctele C_1 și C_2 care delimitează cele două valori ale forței $\bar{F}(\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2)$ la limita echilibrului, astfel încît

$$F_2 \leqslant F \leqslant F_1.$$

Rezultatele analitice obținute se pot deduce foarte ușor pe cale trigonometrică. Astfel, aplicînd teorema sinușilor în triunghiurile ABC_2 și ABC_1 găsim

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = \frac{BC_2}{\sin(\alpha-\varphi)}, \quad \frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = \frac{BC_1}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

sau

$$\frac{G}{\cos\varphi} = \frac{F_2}{\sin(\alpha-\varphi)}, \quad \frac{G}{\cos\varphi} = \frac{F_1}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

de unde

$$F_2 = G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}, \quad F_1 = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$F_2 \leqslant F \leqslant F_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.19. Pana A, avînd feţele înclinate cu unghiul α faţă de axa sa, este introdusă în îmbinarea BB_1 prin forţa $\bar{Q}$. Să se determine reacţiunea normală $\bar{N}$ exercitată pe feţe şi forţa $\bar{P}$ necesară pentru scoaterea penei. Coeficientul de frecare dintre feţele penei şi pereţii B şi B_1 este $f = \operatorname{tg} \varphi$.

Rezolvare. a) Pentru baterea penei (fig. 2.19, *a*) condiţia de echilibru este

$$Q = 2N \sin \alpha + 2F \cos \alpha, F \leqslant fN,$$

din care obţinem

$$N = \frac{Q}{2 \sin \alpha + 2f \cos \alpha} = \frac{Q \cos \varphi}{2 \sin (\alpha + \varphi)}.$$

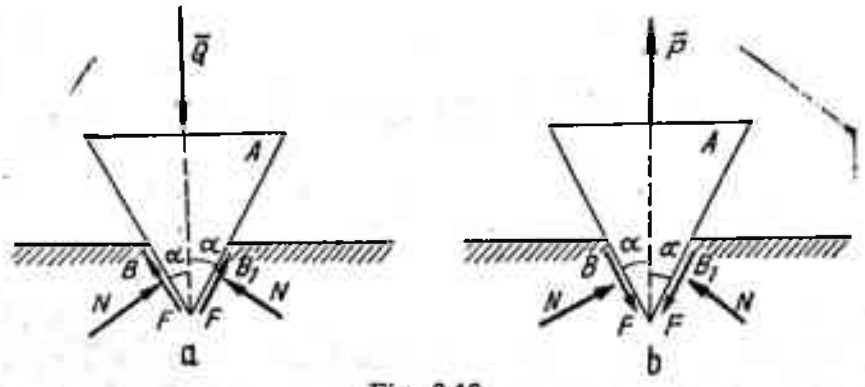


Fig. 2.19

b) Pentru scoaterea penei (fig. 2.19, *b*) condiţia de echilibru este

$$P = 2F \cos \alpha - 2N \sin \alpha, F = fN,$$

din care

$$P = 2N(f \cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{2Q \cos \varphi}{2 \sin (\alpha + \varphi)} \cdot \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{Q \sin (\varphi - \alpha)}{\sin (\varphi + \alpha)}.$$

2.20. Un punct material M, de greutate $\bar{P}$, se găseşte pe un plan aspru (coeficientul de frecare f), înclinat cu unghiul α faţă de orizontală. Punctul M este atras prin intermediul a două resorturi de două puncte fixe O şi O_1 din plan cu forţele elastice $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ proporţionale cu distanţele, constanta lor elastică fiind k (fig. 2.20). Cunoscînd distanţa a dintre cele două centre de atracţie, să se determine poziţiile de echilibru ale punctului.

Rezolvare. Forţele elastice din resorturi sînt

$$\bar{F}_1 = -kx\bar{i} - ky\bar{j} \qquad \bar{F}_2 = -kx\bar{i} + k(a - y)\bar{j}.$$

Condiţia de echilibru a punctului M este dată de

$$\bar{P} + \bar{T} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{N} = 0.$$

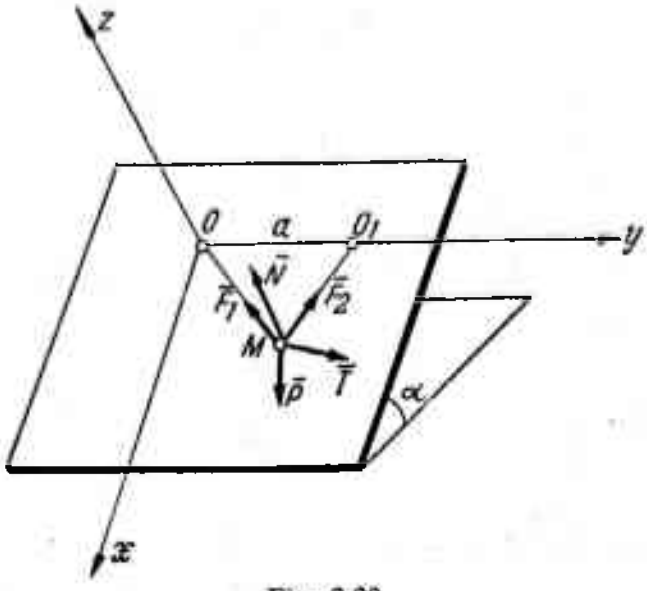


Fig. 2.20

Notînd cu T_x şi T_y componentele forţei de frecare, ecuaţiile de echilibru se pot scrie

$$\Sigma X_i = P\sin\alpha - 2kx + T_x = 0; \quad \Sigma Y_i = -ky + k(a-y) + T_y = 0$$

$$\Sigma Z_i = -P\cos\alpha + N = 0, \quad T \leqslant fN.$$

Rezultă pentru inegalitatea corespunzătoare frecării

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 \leqslant f^2N^2;$$

dar $T_x = 2kx - P\sin\alpha$ şi $T_y = 2ky - ka$, deci

$$(2kx - P\sin\alpha)^2 + (2ky - ka)^2 \leqslant f^2P^2\cos^2\alpha$$

$$\left(x - \frac{P\sin\alpha}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{fP\cos\alpha}{2k}\right)^2.$$

Prin urmare, poziţiile de echilibru ale punctului sînt punctele interioare şi periferia cercului cu centrul $C\left(\frac{P\sin\alpha}{2k}, \frac{a}{2}\right)$ şi raza $R = \frac{fP\cos\alpha}{2k}$.

2.21. Să se determine poziţiile de echilibru ale unui punct material greu M pe o sferă aspră (coeficient de frecare f) (fig. 2.21).

Rezolvare. Condiţia de echilibru a punctului pe sferă este

$$\frac{\left|X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + Z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Ecuaţia sferei este

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

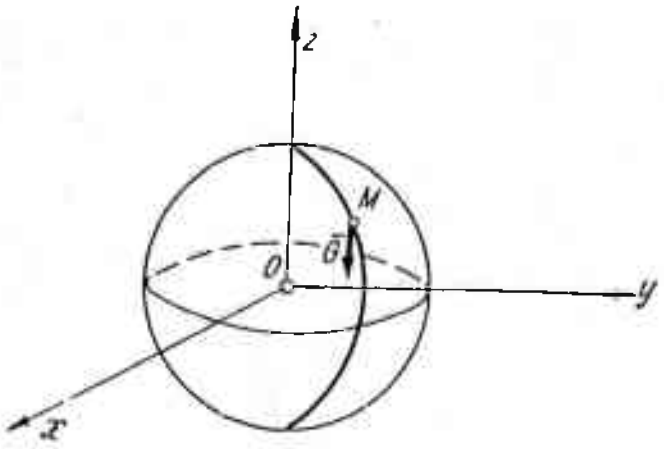


Fig. 2.21

iar

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -G, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z.$$

Condiția de echilibru devine

$$\frac{|-G \cdot 2z|}{G\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Ținînd seama că $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ rezultă

$$|-z| \geqslant \frac{R}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Dacă $z > 0$, atunci

$$|-z| = z \quad \text{și} \quad z \geqslant \frac{R}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Această condiție este îndeplinită de o calotă sferică situată deasupra planului de cotă

$$z = \frac{R}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Dacă $z < 0$, $|-z| = -z$ și rezultă

$$z \leqslant -\frac{R}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Această condiție este îndeplinită de o calotă sferică situată sub planul de cotă

$$z = -\frac{R}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

2.22. Un punct material M, de greutate $\bar{G}$, este suspendat cu un fir de lungime l de un punct fix O. El este respins de peretele vertical cu o forță $\bar{F}$ proporțională cu distanța lui la perete, factorul de proporționalitate fiind k (fig. 2.22).

Să se determine unghiul α pentru echilibru și tensiunea T din fir.

R. $\sin\alpha = 0, \quad T = G, \quad \cos\alpha = \frac{P}{kl}, \quad T = kl.$

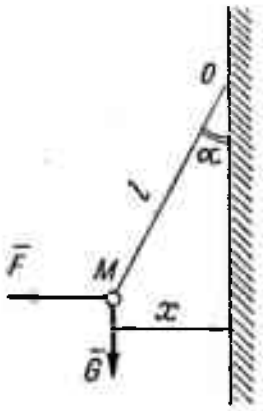


Fig. 2.22

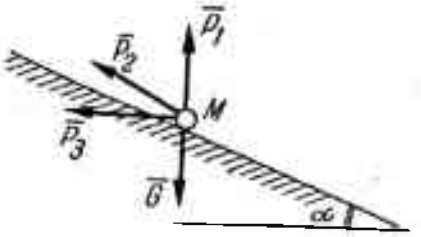


Fig. 2.23

2.23. Un punct material M, de greutate $\bar{G}$, se găsește în echilibru fără frecare, pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, sub acțiunea a trei forțe $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ egale în modul cu P.

Să se determine mărimea P a acestor forțe și reacțiunea planului.

R. $P = G\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}, \quad N = G\dfrac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$

2.24. Un punct material M, de greutate $\bar{G}$, poate aluneca fără frecare pe elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. El este respins de axa Oy cu o forță proporțională cu distanța de la punct la axă (fig. 2.24). Să se determine poziția de echilibru a punctului și reacțiunea curbei.

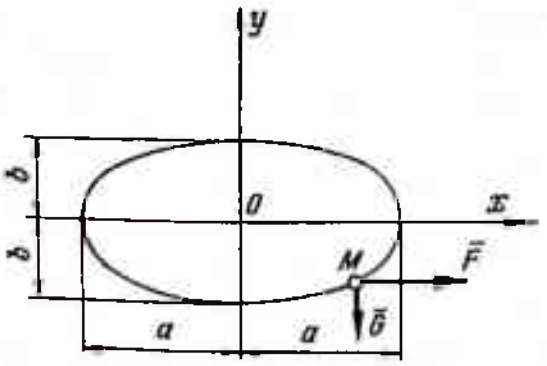


Fig. 2.24

R. $x = 0, \quad y = \pm b$

$x = \pm\frac{1}{ah}\sqrt{a^4k^2 - b^2G^2}, \quad y = \frac{b^2}{a^2}\frac{G}{k}.$

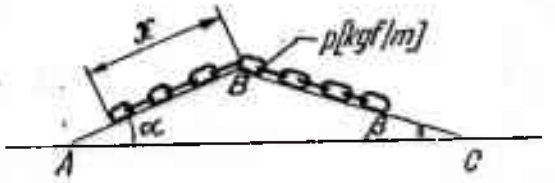


Fig. 2.25

2.25. Un lanț de lungime l și greutate p kgf/m alunecă pe sistemul de plane înclinate ABC din fig. 2.25 (coeficient de frecare f).

Să se determine lungimea x pentru care se obține echilibrul.

R. $\frac{l-x}{x} \leqslant \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\beta - f\cos\beta}$, $\frac{l-x}{l} \geqslant \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\beta + f\cos\beta}$.

2.26. Un punct M poate aluneca fără frecare pe un ghidaj AB. El este atras de două puncte fixe M_1 și M_2 cu forțe invers proporționale cu pătratele distanțelor respective (coeficient de proporționalitate k) (fig. 2.26). Punctul se găsește în echilibru cînd direcția M_1M este perpendiculară pe direcția M_2M. În ce raport se găsesc distanțele a, b, c și care este mărimea reacțiunii ghidajului în acel moment?

R. $a^3 + b^3 = abc$, $N = \frac{k}{\sqrt{a^4+b^4}}$.

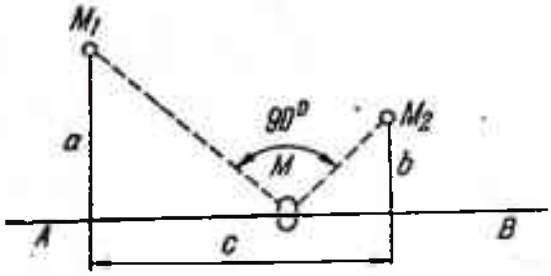


Fig. 2.26

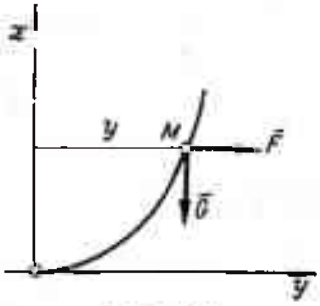


Fig. 2.27

2.27. Un punct material M, de greutate $\bar{G}$, poate aluneca fără frecare pe parabola $x = 2py^2$ fiind respins de o forță proporțională cu distanța de la punct la axa parabolei $F = ky$ (fig. 2.27).

Care este poziția de echilibru a punctului?

R. Dacă parametrul parabolei este $p = \frac{G}{k}$, punctul se găsește în echilibru în orice poziție. Altfel, poziția de echilibru este în punctul cel mai de jos.

2.28. Un punct material M, de greutate $\bar{G}$, poate aluneca fără frecare pe o hiperbolă (fig. 2.28). Cît de mare trebuie să fie forța de atracție $\bar{H}$, proporțională cu distanța dintre punct și axa Oy a hiperbolei, astfel încît aceasta să se găsească în echilibru în orice punct al hiperbolei?

Care va fi mărimea reacțiunii?

R. $H = G\frac{y}{x}$, $N = \frac{G}{x}\sqrt{x^2+y^2}$.

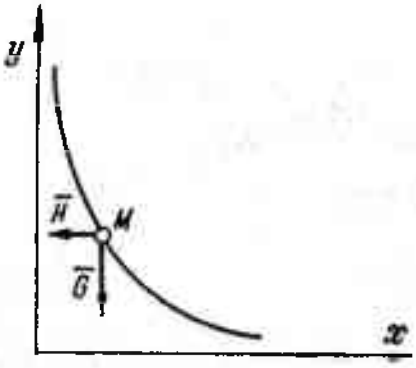


Fig. 2.28

2.29. Să se determine poziția de echilibru a unui punct material greu pe suprafața lucie a sferei de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

R. $A(0, 0, R)$, $B(0, 0, -R)$.

2.30. Să se determine regiunile în care un punct material greu poate sta în echilibru pe o elice aspră de ecuații parametrice $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = h\theta$ (axa Oz verticală și ascendentă).

R. $\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \leqslant \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$ sau $h \leqslant af$.

III. SISTEME DE FORȚE

Definiții și formule

În general, se cere stabilirea efectului unui ansamblu de forțe care acționează asupra unui rigid, într-un punct al acestui rigid.

Forțele care acționează asupra solidului rigid au caracter de vectori alunecători (fig. III.1). Pentru a determina poziția forței se introduce noțiunea de *moment față de un punct* (fig. III. 2, *a*):

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= (yZ - zY)\,\bar{i} + (zX - xZ)\,\bar{j} + (xY - yX)\,\bar{k} = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}$$

unde x, y, z sînt proiecțiile vectorului de poziție $\bar{r}$ pe axele sistemului de referință, X, Y, Z sînt proiecțiile vectorului forță $\bar{F}$, iar M_x, M_y, M_z sînt proiecțiile vectorului moment $\bar{M}_O$.

Moment al unei forțe $\bar{F}$ față de o axă (Δ) (fig. III. 2, *b*) este proiecția pe acea axă a momentului forței $\bar{F}$ în raport cu un punct oarecare O de pe axă

$$M = \bar{M}_0 \cdot \bar{u} = (\bar{r} \times \bar{F})\,\bar{u} = (\bar{r}\,\bar{F}\,\bar{u})$$

unde $\bar{u}$ este versorul axei (Δ). Se mai poate da și o altă definiție: momentul unei forțe $\bar{F}$ în raport cu o axă (Δ) este egal cu momentul proiecției acestei forțe pe un plan perpendicular pe axă, față de punctul în care axa întîlnește planul (fig. III. 2).

Scanned with OKEN Scanner

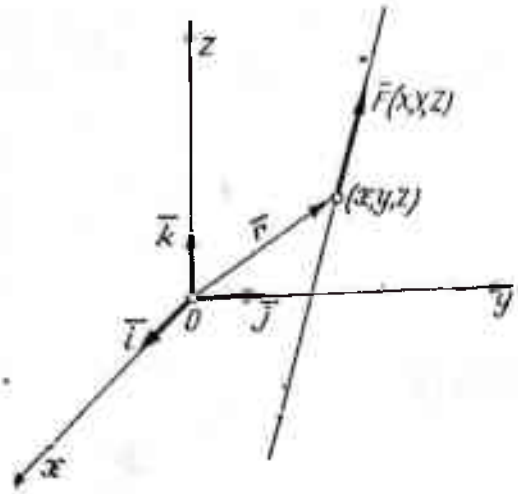


Fig. III. 1

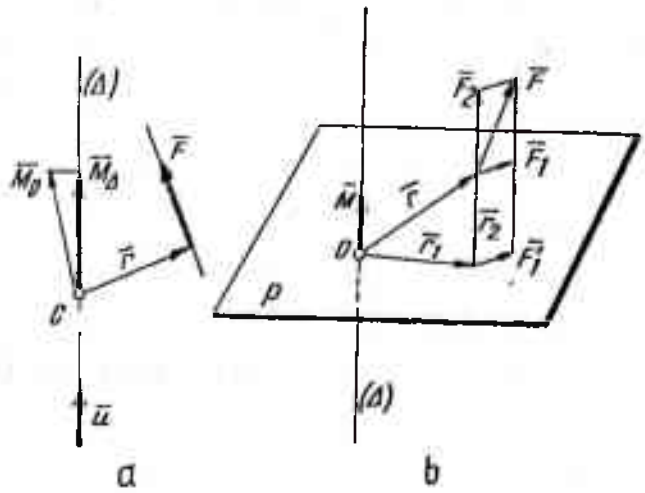


Fig. III. 2

Vector rezultant al unui sistem de forțe este suma geometrică a forțelor care alcătuiesc sistemul

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i = \bar{i}\Sigma X_i + \bar{j}\Sigma Y_i + \bar{k}\Sigma Z_i$$

și este un invariant vectorial al sistemului.

Variația momentului rezultant la schimbarea polului (punctul față de care se calculează) se efectuează după legea

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + \overline{O'O} \times \bar{R}.$$

Proiecția momentului rezultant pe direcția vectorului rezultant este constantă și derivă din al doilea invariant (invariantul scalar) al sistemului de forțe

$$\bar{R}\,\bar{M}_O = \bar{R}\,\bar{M}_{O'}.$$

Locul geometric al punctelor pentru care vectorul rezultant și vectorul moment rezultant sînt coliniari poartă numele de *axă centrală* și este o dreaptă pe care vectorul moment rezultant este minim. Ecuația axei centrale este

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z},$$

iar momentul minim are expresia

$$M_{min} = \frac{\bar{R}\,\bar{M}_O}{|\bar{R}|} = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

După valorile vectorului rezultant și vectorului moment rezultant, sistemele de forțe se reduc la următoarele cazuri simple:

a) $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$ .....echilibru;

b) $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O = 0$ .....forță unică aplicată în punctul de reducere și avînd direcția axei centrale;

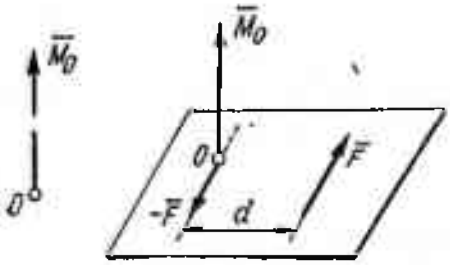


Fig. III. 3

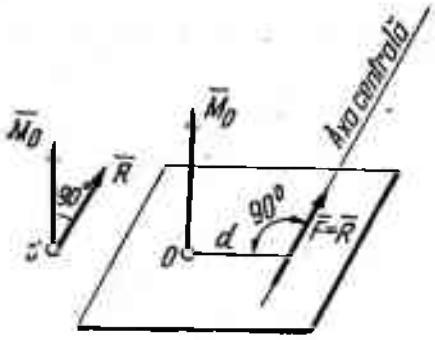


Fig. III. 4

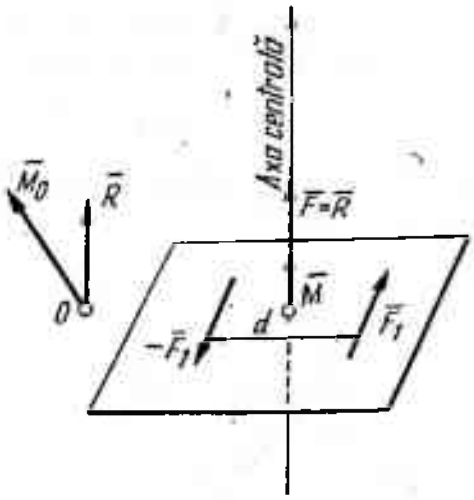


Fig. III. 5

c) $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ .....cuplu (fig. III. 3);

d) $\bar{R} \neq 0$, $M_0 \neq 0$ — $\bar{R}\,\bar{M}_O = 0$ — forță unică dirijată după direcția axei centrale și aflîndu-se la distanța $d = \frac{M_0}{R}$ de punctul de reducere (fig. III.4); $\bar{R}\,\bar{M} \neq 0$ — vectorul rezultant este dirijat după axa centrală și momentul rezultant se datorește unui cuplu care acționează într-un plan perpendicular pe axa centrală (fig. III.5)

Probleme rezolvate

3.1. Să se calculeze momentele vectorului $\bar{F} = \overline{AB}$ față de axele Ox, Oy și Oz ale sistemului cartezian $Oxyz$ (fig. 3.1).

Rezolvare. Punctul B avînd coordonatele (2, 4, 5), punctul A va avea coordonatele (0, 0, 5). Proiecțiile vectorului $\overline{AB}$ pe axe sînt (2, 4, 0)

Momentul vectorului $\overline{AB}$ față de axele Ox, Oy, Oz se calculează proiectînd vectorul $\overline{M}_O$ pe aceste axe.

$$\overline{M}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -20\bar{i} + 10\bar{j}.$$

Rezultă: $M_x = -20$, $M_y = 10$, $M_z = 0$.

Momentul vectorului $\overline{AB}$ față de axa Ox se mai poate calcula și proiectînd $\overline{AB}$ pe planul Oyz, perpendicular pe Ox (proiecția este $AC = 4$) și luînd momentul acestei proiecții față de O (punctul în care Ox întîlnește planul Oyz). Se obține $M_x = OA \cdot AC = 5 \cdot 4 = 20$. Semnul este negativ, după cum se verifică ușor cu ajutorul regulii șurubului drept.

În același mod se calculează My.

$$M_y = OA \cdot AD = 5 \cdot 2 = 10.$$

Semnul este pozitiv. Forța $\overline{AB}$ nu dă moment față de Oz, deoarece intersectează axa Oz.

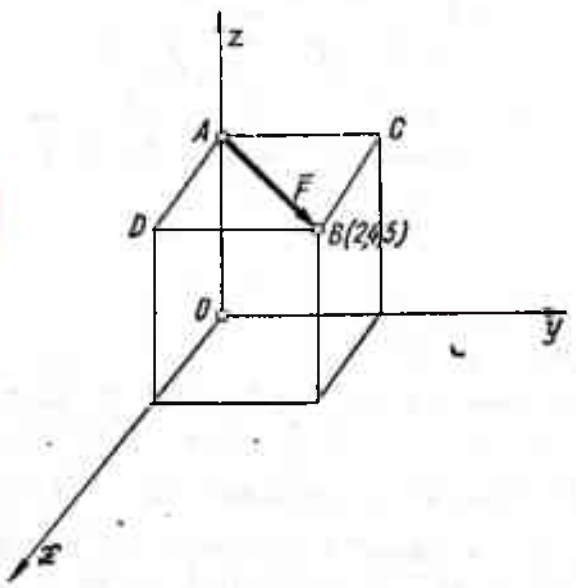


Fig. 3.1

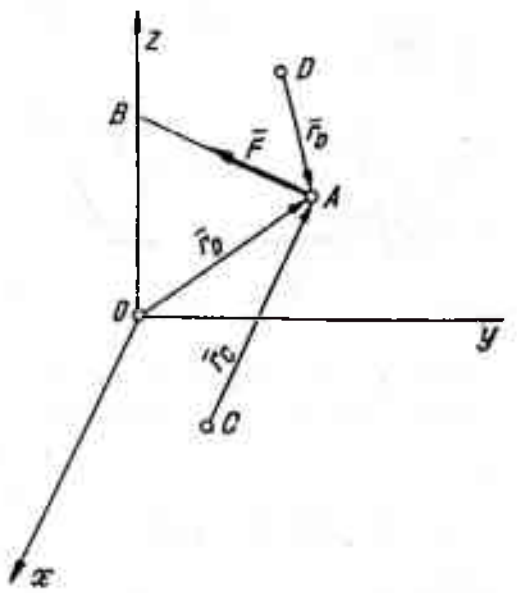


Fig. 3.2

3.2. O forță $\bar{F}$ de 12 tf se află pe o dreaptă AB și este orientată de la A la B (fig. 3.2). Să se calculeze momentele forței $\bar{F}$ în raport cu punctele 0, C și D, știind că punctele date au următoarele coordonate (în metri):

$$A(5, 4, 2), \quad B(0, 0, 4), \quad C(2, 3, 0), \quad D(0, 6, 8).$$

Rezolvare. Vectorul forță $\bar{F}$ este

$$\bar{F} = F\frac{\overline{AB}}{|AB|} = 12\frac{-5\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{25 + 16 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}(-5\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}).$$

Vectorii de poziție ai punctelor O, C și D sînt

$$\bar{r}_O = 5\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$$
$$\bar{r}_C = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$$
$$\bar{r}_D = 5\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}.$$

Momentele căutate vor fi

$$\bar{M}_O = \frac{4}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 4 & 2 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{5}}(16\bar{i} - 20\bar{j})$$

$$|M_O| = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{16^2 + 20^2} = 45{,}6 \text{ tf} \cdot \text{m};$$

$$\bar{M}_C = \frac{4}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{5}}(10\bar{i} - 16\bar{j} - 7\bar{k})$$

$$|\bar{M}_C| = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{10^2 + 16^2 + 7^2} = 36 \text{ tf} \cdot \text{m};$$

$$\bar{M}_D = \frac{4}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -2 & -6 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{5}}(20\bar{i} + 20\bar{j} - 30\bar{k})$$

$$|\bar{M}_D| = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{20^2 + 20^2 + 30^2} = 73{,}6 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

3.3. Se consideră un sistem de forțe coplanare, avînd aceeași mărime P și care acționează după direcțiile arătate în figura 3.3. Să se efectueze reducerea acestui sistem de forțe în punctul O.

Rezolvare. Elementele torsorului de reducere în punctul O sînt:

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i = \left(P\frac{\sqrt{3}}{2} + P\frac{\sqrt{2}}{2} - P\frac{\sqrt{3}}{2} - P\right)\bar{i} + \left(P - 2P\frac{1}{2} - P\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{j} =$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\bar{i} - P\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}$$

$$|\bar{R}| = P\sqrt{\frac{2}{4} + 1 - \sqrt{2} + \frac{2}{4}} = P\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

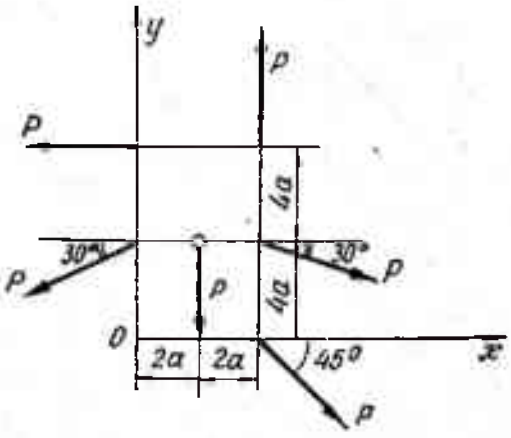


Fig. 3.3

și

$$\bar{M}_0 = \bar{k}\Big(P \cdot 8a + P \cdot 4a - P \cdot 2a - P\frac{\sqrt{2}}{2}4a + P\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4a -$$

$$- P \cdot \frac{1}{2}4a - P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}4a\Big) = Pa(8 - 2\sqrt{2})\,\bar{k}.$$

Ecuația axei centrale

$$xY - yX = M_0$$

devine

$$-x\frac{\sqrt{2}}{2} - y\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = a(8 - 2\sqrt{2}),$$

o dreaptă situată în planul sistemului de forțe, reprezentînd suportul vectorului rezultantei.

3.4. Să se reducă sistemul de forțe situat pe un pătrat de latură a, în raport cu punctele O și A (fig. 3.4).

Rezolvare. Rezultanta sistemului de forțe este:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j}$$

$$X = F\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad Y = F\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bar{R} = \frac{F\sqrt{2}}{2}\bar{i} + F\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}; \quad |\bar{R}| = F$$

Direcția rezultantei va fi dată de $\operatorname{tg}\beta = \frac{Y}{X} = 1$; $\beta = 45°$.

Momentul în O este: $\bar{M}_o = 2Fa\bar{k}$, deci rezultanta va fi situată pe tangenta la cercul de rază

$$d = \frac{M_o}{R} = \frac{2Fa}{F} = 2a,$$

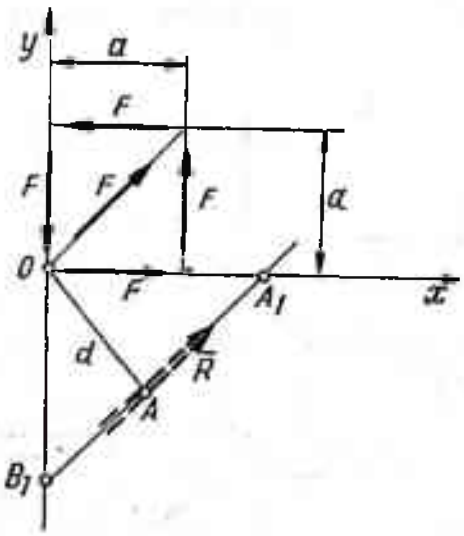


Fig 3.4

sau pe dreapta

$$M_o - xY + yX = 0$$

$$2Fa - xF\frac{\sqrt{2}}{2} + yF\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Dreapta va avea ecuația:

$$x - y - \frac{4a}{\sqrt{2}} = 0$$

și va intersecta axele în punctele $B_1\left(O, \frac{4a}{\sqrt{2}}\right)$ și $B_2\left(\frac{4a}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Momentul în A este:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_0 + \overline{AO} \times \bar{R},$$

$$\bar{M}_A = 2Fa \cdot \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a & 0 & 0 \\ F\frac{\sqrt{2}}{2} & F\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 2Fa \cdot \bar{k} - aF\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k} = Fa\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{k}.$$

$\bar{M}_A$ se poate calcula și direct:

$$\bar{M}_A = \left(2Fa - F\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\bar{k} = Fa\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{k}$$

3.5. Se consideră zidul de sprijin din figura 3.5, acționat de forțele $G = 25$ tf și $F = 12$ tf. Să se studieze dacă zidul se poate răsturna în jurul muchiei ce se proiectează în O.

Rezolvare. Rezultanta sistemului de forțe este

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} = 12\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} - \left(25 + 12\frac{1}{2}\right)\bar{j} = 10{,}4\bar{i} - 31\bar{j}$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{10{,}4^2 + 31^2} = 33 \text{ tf},$$

iar momentul rezultant

$$\bar{M}_O = M_z\bar{k} = \bar{k}\left(25 \cdot \frac{2{,}5}{2} - 12\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\right) = 24{,}95\bar{k}$$

$$|\bar{M}_O| = 24{,}95 \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

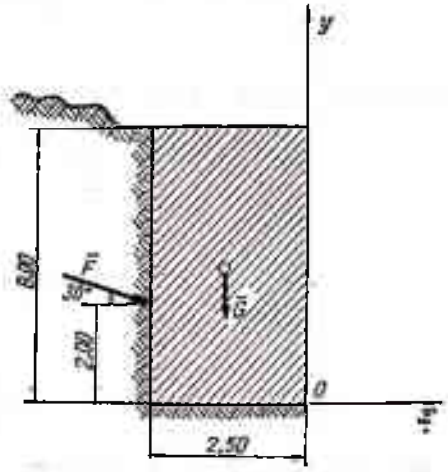


Fig. 3.5

Pentru ca zidul să nu se răstoarne trebuie ca suportul rezultantei să intersecteze baza zidului într-un punct situat la stînga lui O, adică să rezulte relația

$$e_x = \frac{M_z}{Y} < 0, \quad \text{respectiv} \quad e_x = \frac{24{,}95}{-31} < 0.$$

3.6. Se dă în plan un sistem de patru forțe $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, și $\bar{P}_4$; proiecțiile X și Y ale acestor forțe și coordonatele x, y ale punctelor lor de aplicație sînt cuprinse în următorul tabel:

	$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{P}_3$	$\bar{P}_4$
X	1	−2	3	−4
Y	4	1	−3	−3
x	2	−2	3	−4
y	1	−1	−3	−6

Scanned with OKEN Scanner

Să se reducă sistemul de forțe în originea sistemului de coordonate xOy și să se afle ecuația axei centrale.

Rezolvare. Vectorul rezultant al forțelor $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_4$ este

$$\bar{R} = \bar{i}\Sigma X_i + \bar{j}\Sigma Y_i = -2\bar{i} - \bar{j}, \quad |\bar{R}| = \sqrt{5},$$

cosinușii directori fiind

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Momentul sistemului de forțe față de originea O a sistemului de coordonate este

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^{4} (x_i Y_i - X_i y_i)\,\bar{k} = \bar{k}\,[(8-1) + (-2-2) + (-9+9) + (+12-24)] = -9\bar{k}.$$

Ecuația axei centrale

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}$$

devine

$$\frac{-z}{-2} = \frac{2z}{-1} = \frac{-9 + x - 2y}{0}$$

sau

$$z = 0, \quad x - 2y - 9 = 0.$$

Deoarece $\bar{R}\bar{M} = 0$, sistemul este echivalent cu o forță unică $\bar{F} = -2\bar{i} - \bar{j}$, situată pe axa centrală, de ecuații $z = 0$, $x - 2y - 9 = 0$.

3.7. Se dau trei forțe: $\bar{P}_1(3, 5, 4)$, cu punctul de aplicație de coordonate $(0, 2, 1)$, $\bar{P}_2(-2, 2, -6)$, cu punctul de aplicație $(1, -1, 3)$ și $\bar{P}_3(-1, -7, 2)$, cu punctul de aplicație $(2, 3, 1)$.

Să se reducă acest sistem de forțe în originea sistemului de coordonate.

Rezolvare. Rezultanta sistemului de forțe este

$$\bar{R} = \Sigma\bar{F}_i = \bar{i}\Sigma X_i + \bar{j}\Sigma Y_i + \bar{k}\Sigma Z_i = 0,$$

iar momentul rezultant

$$\bar{M}_0 = \Sigma(yZ - zY)\,\bar{i} + \Sigma(zX - xZ)\,\bar{j} + \Sigma(xY - yX)\,\bar{k} = 16\bar{i} - 2\bar{j} - 17\bar{k},$$

$$|\bar{M}_0| = \sqrt{256 + 4 + 289} = 3\sqrt{61}.$$

Sistemul este deci echivalent cu un cuplu de moment $\bar{M}_0$, avînd cosinușii directori egali respectiv cu $\frac{16}{3\sqrt{61}}$, $-\frac{2}{3\sqrt{61}}$, $-\frac{17}{3\sqrt{61}}$.

3.8. Să se reducă sistemul de forțe aplicate paralelipipedului din figura 3.8 și să se discute rezultatele. Aplicație numerică:

$$a = 2\text{m}, \quad b = 4\text{m}, \quad c = 3\text{m}, \quad P = 2\,\text{tf},$$
$$Q = 2\,\text{tf}, \; S = -1\,\text{tf}.$$

Rezolvare. Vectorul rezultant va fi

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i = P\bar{i} + Q\bar{j} + S\bar{k},$$

iar vectorul moment rezultant în punctul O

$$\bar{M}_O = Sb\bar{i} + Pc\bar{j} + Qa\bar{k}.$$

Invariantul scalar al sistemului de forțe este

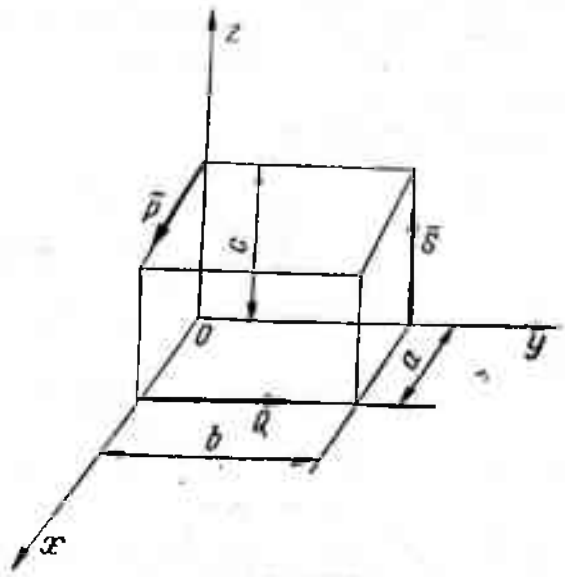


Fig. 3.8

$$\bar{R}\bar{M}_O = PSb + QPc + SQa.$$

— Pentru ca sistemul de forțe să fie echivalent cu zero trebuie ca

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad S = 0, \quad Sb = 0, \quad Pc = 0, \quad Qa = 0,$$

deci să existe relația

$$P = Q = S = 0.$$

— Pentru ca sistemul de forțe să fie echivalent cu un cuplu trebuie ca

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad S = 0 \quad \text{și} \quad (Sb)^2 + (Pc)^2 + (Qa)^2 \neq 0.$$

Dar primele trei relații fac imposibilă relația ultimă, deci acest sistem de forțe nu poate fi niciodată echivalent cu un cuplu.

— Pentru ca sistemul de forțe să fie echivalent cu o forță unică este necesar ca

$$\bar{R}\bar{M}_O = PSb + PQc + QSa = 0 \quad \text{și} \quad P^2 + Q^2 + S^2 \neq 0.$$

Sistemul nu poate avea în acest caz decît două forțe diferite de zero sau o singură forță diferită de zero.

— Pentru ca sistemul de forțe dat să fie echivalent cu o forță acționînd pe axa centrală și un cuplu într-un plan normal pe axă este necesar ca

$$PSb + PQc + QSa \neq 0.$$

În cazul aplicației cerute, avem

$$\bar{R} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$$
$$\bar{M}_O = -4\bar{i} + 6\bar{j} + 4\bar{k}$$
$$\bar{R}\bar{M}_O = -8 + 12 - 4 = 0$$

Sistemul este echivalent cu o forță unică, al cărui suport este axa centrală de ecuație

$$\frac{-4 + y + 2z}{2} = \frac{6 - 2z - x}{2} = \frac{4 - 2x + 2y}{-1},$$

3.9. Pe muchiile cubului de latură a acționează 12 forțe egale în modul P cu (fig. 3.9). Să se reducă acest sistem în punctul O și să se determine coordonatele x și y ale punctului în care axa centrală a sistemului de forțe înțeapă planul xOy.

Rezolvare. Rezultanta sistemului de forțe este

$$\bar{R} = -2P\bar{i} + 2P\bar{j} + 4P\bar{k}, \quad |\bar{R}| = 2P\sqrt{6},$$

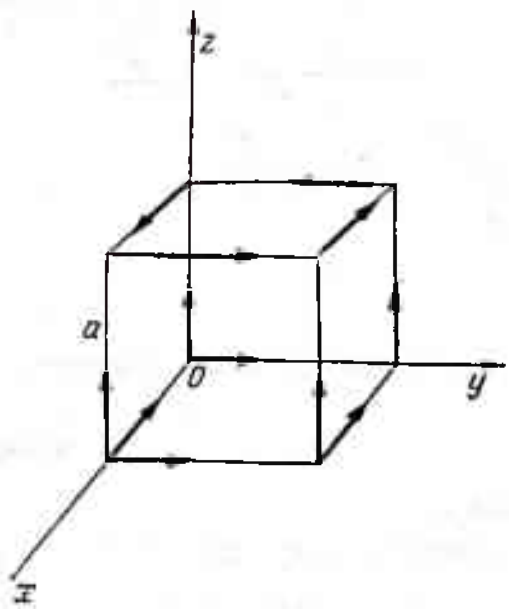


Fig. 3.9

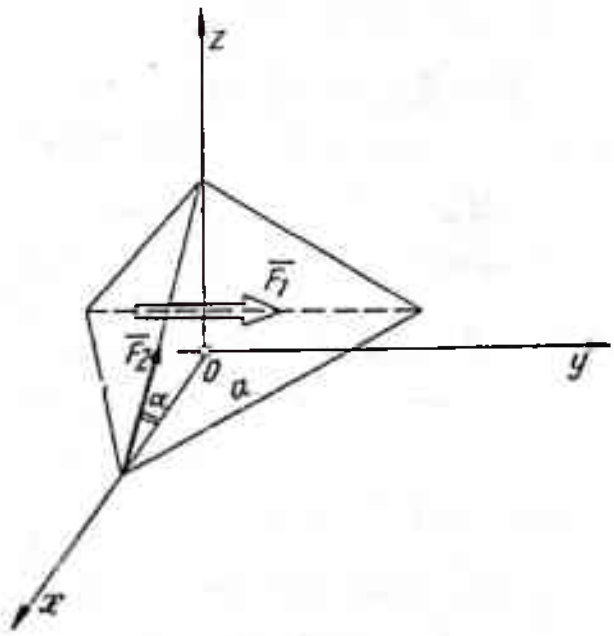


Fig. 3.10

de cosinuși directori

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

iar vectorul moment rezultant

$$\bar{M}_O = 2Pa\bar{i} - 2Pa\bar{j} + 4Pa\bar{k}, \quad |\bar{M}_O| = 2Pa\sqrt{6}.$$

Axa centrală a sistemului de forțe are ecuația

$$\frac{2Pa - y4P + z2P}{-2P} = \frac{-2Pa + z2P + x4P}{2P} = \frac{4Pa - x2P - y2P}{4P}$$

sau

$$x - y + z = 0, \quad 5x + y + 2z = 4a.$$

Punctul în care axa centrală înțeapă planul xOy are coordonatele

$$x = y = \frac{2}{3}a.$$

3.10. Pe două din muchiile tetraedrului regulat de latură a din figura 3.10, acționează forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$. Să se determine coordonatele punctului în care axa centrală a sistemului de forțe înțeapă planul xOy.

Rezolvare. Dacă α este unghiul pe care îl face muchia tetraedrului cu planul bazei,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Rezultanta sistemului de forțe este

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} = -F_2\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{i} + F_1\bar{j} + F_2\frac{\sqrt{6}}{3}\bar{k},$$

iar momentul rezultant al sistemului de forțe față de punctul O

$$\bar{M}_O = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} = \frac{-F_2a\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{F_1a\sqrt{3}}{6}\bar{k}.$$

Ecuațiile axei centrale a sistemului de forțe dat sînt

$$\frac{-yF_2\frac{\sqrt{6}}{3} + zF_1}{-F_2\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{-F_2\frac{a\sqrt{2}}{3} + zF_2\frac{\sqrt{3}}{3} + xF_2\frac{\sqrt{6}}{3}}{F_1} = \frac{-F_1\frac{a\sqrt{3}}{6} - xF_1 - yF_2\frac{\sqrt{3}}{3}}{F_2\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

sau

$$\frac{-\sqrt{6}F_2y + 3F_1z}{-F_2\sqrt{3}} = \frac{-F_2a\sqrt{2} + F_2\sqrt{3}z + F_2\sqrt{6}x}{3F_1} = \frac{-F_1a\sqrt{3} - 6F_1x - 2F_2\sqrt{3}y}{2\sqrt{6}F_2}.$$

Coordonatele punctului în care axa centrală înțeapă planul xOy vor fi

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{6}\frac{2F_2^2 - F_1^2}{F_1^2 + F_2^2}, \qquad y = -\frac{a}{2}\frac{F_1F_2}{F_1^2 + F_2^2}.$$

3.11. Sistemul de trei forțe $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ și $\bar{P}_3$ din figura 3.11 acționează după direcții paralele cu axele sistemului de coordonate. Ce relație trebuie să existe între forțe pentru ca axa centrală a sistemului să treacă prin O?

Rezolvare. Rezultanta sistemului de forțe este

$$\bar{R} = P_2\bar{i} + P_1\bar{j} + P_3\bar{k},$$

iar momentul rezultant față de punctul O

$$\bar{M}_O = -P_1c\bar{i} - P_3b\bar{j} - P_2a\bar{k}.$$

Ecuațiile axei centrale a unui sistem de forțe avînd forma

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + Xy}{Z},$$

pentru ca dreapta de aceste ecuații să treacă prin origine trebuie ca

$$\frac{M_x}{X} = \frac{M_y}{Y} = \frac{M_z}{Z}.$$

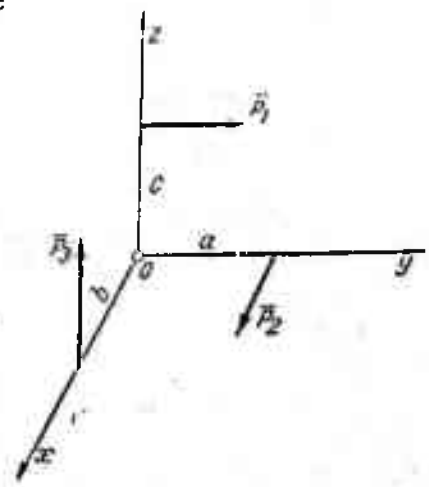


Fig. 3.11

Obținem în final pentru axa centrală ecuațiile

$$\frac{-P_1c}{P_2} = \frac{-P_3b}{P_1} = \frac{-P_2a}{P_3}$$

sau

$$P_1^2c = P_2P_3b, \quad P_3^2b = P_1P_2a.$$

Aceste relații ne dau raportul în care trebuie să se găsească cele trei forțe pentru ca axa centrală a sistemului ce-l formează să treacă prin origine

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}}, \quad \frac{P_2}{P_3} = \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}, \quad \frac{P_1}{P_3} = \sqrt{\frac{b^2}{ca}}.$$

3.12. Se dă sistemul format din două forțe $\bar{P}_1$ și $\bar{P}_2$ (fig. 3.12). Să se determine condițiile necesare pentru ca axa centrală a sistemului celor două forțe să treacă prin punctul P de coordonate x_0, y_0, z_0.

Rezolvare. Forțele care formează acest sistem sînt

$$\bar{P}_1 = P_1\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j} + P_1\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}$$

$$\bar{P}_2 = -P_2\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + P_2\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}$$

cu rezultanta

$$\bar{R} = -P_2\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + (P_1 + P_2)\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j} + P_1\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}.$$

Momentul rezultant față de O este

$$\bar{M}_0 = P_2\frac{\sqrt{2}}{2}a\bar{k},$$

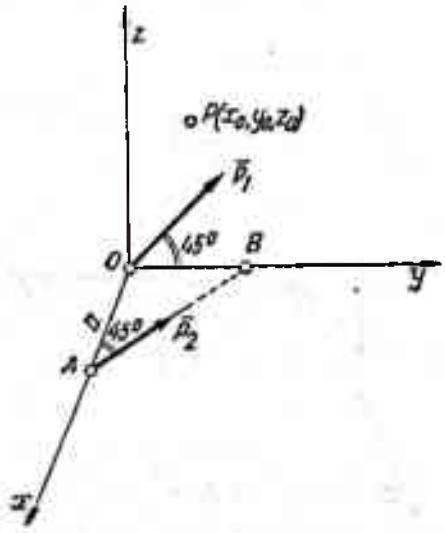


Fig. 3.12

iar ecuațiile axei centrale

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z},$$

cu relațiile de mai înainte, iau forma

$$\frac{-yP_1\frac{\sqrt{2}}{2} + z(P_1 + P_2)\frac{\sqrt{2}}{2}}{-P_2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{+zP_2\frac{\sqrt{2}}{2} + xP_1\frac{\sqrt{2}}{2}}{(P_1 + P_2)\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{P_2\frac{\sqrt{2}}{2}a - x(P_1 + P_2)\frac{\sqrt{2}}{2} - yP_2\frac{\sqrt{2}}{2}}{P_1\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Pentru ca dreapta dată de aceste ecuații să treacă prin punctul P trebuie ca coordonatele acestuia x_0, y_0, z_0 să satisfacă ecuațiile

$$\frac{-y_0P_1 + z_0(P_1 + P_2)}{-P_2} = \frac{z_0P_2 + x_0P_1}{P_1 + P_2} = \frac{P_2a - x_0(P_1 + P_2) - y_0P_2}{P_1},$$

respectiv

$$x_0P_1P_2 + y_0P_1(P_1 + P_2) + z_0[(P_1 + P_2)^2 + P_2^2] = 0$$

$$x_0[(P_1 + P_2)^2 + P_2^2] + y_0P_2(P_1 + P_2) + z_0P_1P_2 = P_2(P_1 + P_2)\,a.$$

3.13. Se consideră sistemul de trei forțe reprezentate în figura 3.13 și se cere să se efectueze reducerea acestui sistem în raport cu originea O. Să se găsească axa centrală a sistemului de forțe și valoarea momentului minim. Se dă

$$|\bar{F}_1| = 2F, \quad |\bar{F}_2| = |\bar{F}_3| = F.$$

Rezolvare. Elementele torsorului de reducere a sistemului de forțe în raport cu originea O sînt

$$\bar{R} = -F\sqrt{2}\,\bar{i} + (F + F\sqrt{2})\,\bar{j} + F\bar{k}, \quad |\bar{R}| = F\sqrt{6 + 2\sqrt{2}}$$

$$\bar{M}_0 = F\sqrt{2}a\bar{k}, \quad |\bar{M}_0| = Fa\sqrt{2}.$$

Momentul minim are expresia

$$M_{min} = \frac{\bar{R}\bar{M}_0}{|\bar{R}|} = \frac{F^2a\sqrt{2}}{F\sqrt{6 + 2\sqrt{2}}} = \frac{Fa}{\sqrt{3 + \sqrt{2}}}.$$

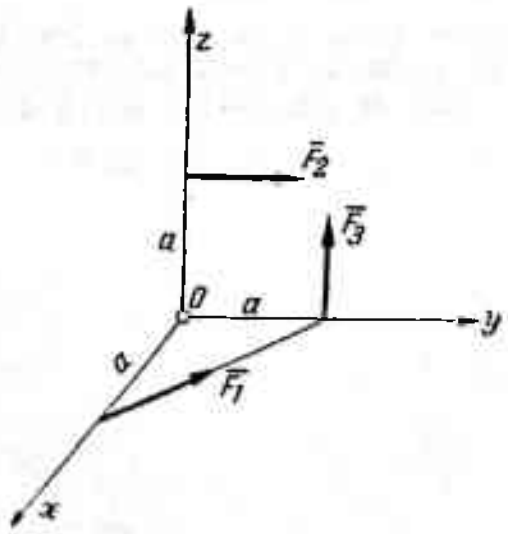


Fig. 3.13

Ecuația axei centrale este

$$\frac{-yF + z(F + F\sqrt{2}}{-F\sqrt{2}} = \frac{+zF\sqrt{2} + xF}{F + F\sqrt{2}} = \frac{Fa\sqrt{2} - x(F + F\sqrt{2}) - yF\sqrt{2}}{F}$$

sau

$$x\sqrt{2} - y(1 + \sqrt{2}) + z(5 + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$2x(2 + \sqrt{2}) + y(2 + \sqrt{2}) + z\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2}).$$

3.14. Să se determine torsorul minim și axa centrală a sistemului celor două forțe din figura 3.14, egale ca mărime și avînd direcțiile perpendiculare. Se cunoaște distanța $OA = a$.

Rezolvare. Torsorul sistemului de forțe în raport cu punctul O este dat de

$$\bar{R} = P\bar{j} + P\bar{k}, \quad |\bar{R}| = P\sqrt{2}$$

$$\bar{M}_O = -Pa\bar{j},$$

iar momentul minim

$$M_{min} = \frac{\bar{R}\bar{M}}{|\bar{R}|} = \frac{-P^2a}{P\sqrt{2}} = -\frac{Pa\sqrt{2}}{2}.$$

Ecuațiile axei centrale sînt

$$\frac{-yP + zP}{0} = \frac{-Pa + xP}{P} = \frac{-xP}{P},$$

respectiv

$$z = y, \quad x = \frac{a}{2};$$

axa centrală este paralelă cu bisectoarea unghiului yOz și trece prin punctul B, situat la jumătatea segmentului OA.

3.15. Să se determine locul geometric al punctelor de reducere ale unui sistem de forțe în spațiu, în raport cu care momentul rezultant al sistemului are mărimea dată M (fig. 3.15).

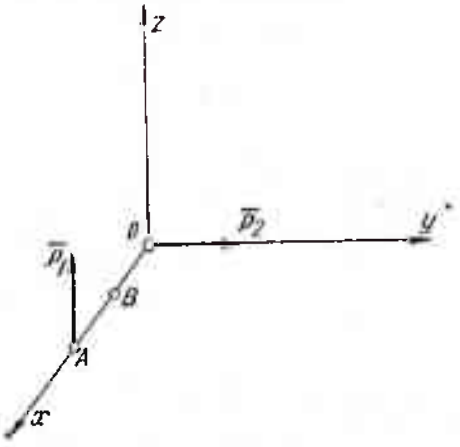


Fig. 3.14

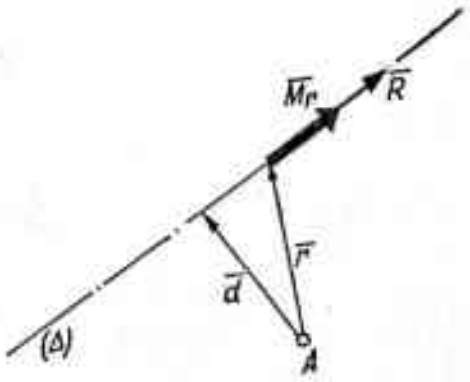


Fig. 3.15

Rezolvare. Fie (Δ) axa centrală a sistemului de forțe și A unul dintre punctele ce aparțin locului geometric.

Elementele torsorului de reducere al sistemului de forțe în raport cu punctul A sînt $\bar{R}$ și $\bar{M}_A$. Dar

$$\bar{M}_A = \bar{M}_{min} + \bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_{min} + \bar{d} \times \bar{R}.$$

Deoarece în modul

$$|\bar{d} \times \bar{R}| = d \cdot R,$$

rezultă

$$|\bar{M}| = M = \sqrt{M^2_{min} + d^2R^2}.$$

de unde se deduce valoarea lui d

$$d = \frac{\sqrt{M^2 - M^2_{min}}}{R} = \text{const.}$$

Locul geometric al punctelor A este deci o suprafață cilindrică avînd ca axă, axa centrală a sistemului de forțe și ca rază mărimea $d = \frac{\sqrt{M^2 - M^2_{min}}}{R}$.

3.16. Pe periferiile a trei discuri circulare, și anume: A de diametru $D_A = 15$ cm, B de diametru $D_B = 10$ cm și C de diametru $D_C = 5$ cm, acționează perechi de forțe două cîte două egale și de sensuri contrare, de mărimi respectiv 10 kgf, 20 kgf și P. Axele OA, OB și OC se găsesc în același plan. Unghiul dintre axele OA și OB este de 90° (fig. 3.16). Să se determine mărimea P a forțelor ce acționează pe discul C și unghiul α pentru care sistemul este în echilibru.

Rezolvare. Sistemul de forțe dat este format din trei cupluri de momente

$$|\bar{M}_A| = 150 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

$$|\bar{M}_B| = 20 \cdot 10 = 200 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

$$|\bar{M}_C| = 5P \text{ kgf} \cdot \text{cm}.$$

Pentru ca sistemul să fie în echilibru trebuie să existe relația vectorială

$$\bar{M}_A + \bar{M}_B + \bar{M}_C = 0,$$

de unde

$$\bar{M}_C = -(\bar{M}_A + \bar{M}_B), \quad |\bar{M}_C| =$$

$$= \sqrt{|\bar{M}_A|^2 + |\bar{M}_B|^2} = 250 \text{ kgf} \cdot \text{cm}.$$

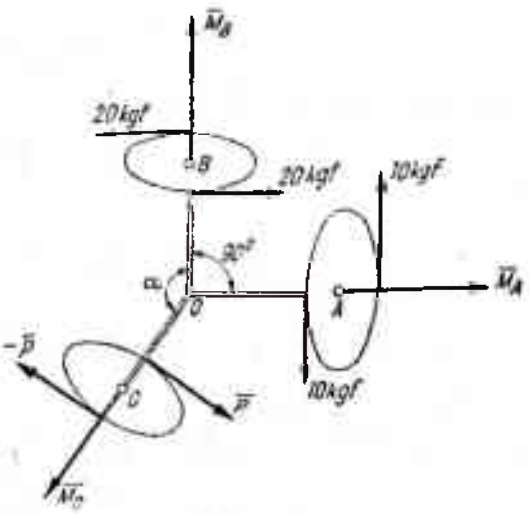


Fig. 3.16

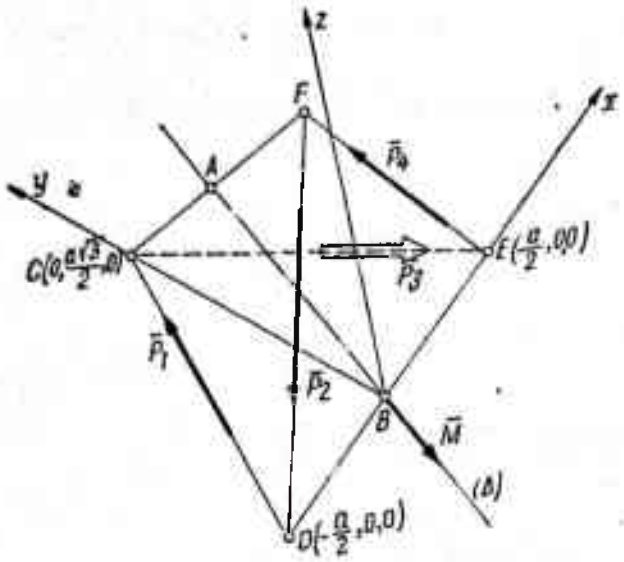


Fig. 3.17

Mărimea forței P este

$$5P = 250, \text{ adică } P = 50 \text{ kgf}$$

și

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{150}{200} = 0{,}75.$$

3.17. Pe dreapta (Δ), care unește punctele A și B, situate la mijlocul a două muchii opuse ale tetraedrului regulat de latură a, acționează un cuplu de moment $\bar{M}$ (fig. 3.17).

Să se determine sistemul de forțe echivalent, care are suporturile forțelor pe celelalte patru muchii ale tetraedrului.

Rezolvare. Dacă α este unghiul făcut de muchia tetraedrului cu planul bazei,

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rezultanta sistemului de forțe din figură este

$$\bar{R} = \left(+P_1\frac{1}{2}\bar{i} + P_1\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}\right) + \left(+P_3\frac{1}{2}\bar{i} - P_3\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}\right) +$$

$$+ P_2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j}\right) + P_4\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}\right) - P_2\frac{\sqrt{6}}{3}\bar{k} + P_4\frac{\sqrt{6}}{3}\bar{k} =$$

$$= \bar{i}\left(+\frac{P_1}{2} + \frac{P_3}{2} - \frac{P_2}{2} + - \frac{P_4}{2}\right) + \bar{j}\left(P_1\frac{\sqrt{3}}{2} - P_3\frac{\sqrt{3}}{2} - P_2\frac{\sqrt{3}}{6} + P_4\frac{\sqrt{3}}{6}\right) +$$

$$+ \bar{k}\left(P_4\frac{\sqrt{6}}{3} - P_2\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

iar momentul rezultant

$$\bar{M}_B = \overline{BD}\times(\bar{P}_1 + \bar{P}_2) + \overline{BE}\times(\bar{P}_3 + \bar{P}_4) = -\frac{a}{2}\bar{i}\times\left(+\frac{P_1}{2}\bar{i} +\right.$$

$$\left. + P_1\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j} - \frac{P_2}{2}\bar{i} - \frac{P_2\sqrt{3}}{6}\bar{j} - \frac{P_2\sqrt{6}}{3}\bar{k}\right) + \frac{a}{2}\bar{i}\times\left(+\frac{P_3}{2}\bar{i} - P_3\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j} -\right.$$

$$\left. - \frac{P_4}{2}\bar{i} + \frac{P_4\sqrt{3}}{6}\bar{j} + \frac{P_4\sqrt{6}}{3}\bar{k}\right) = -\frac{a}{2}\left(\frac{P_1\sqrt{3}}{2} - \frac{P_2\sqrt{3}}{6}\right)\bar{k} -$$

$$- \frac{a}{2}\frac{P_2\sqrt{6}}{3}\bar{j} + \frac{a}{2}\left(-P_3\frac{\sqrt{3}}{2} + P_4\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{k} - \frac{a}{2}\frac{P_4\sqrt{6}}{3}\bar{j} =$$

$$- \frac{a}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}(P_2 + P_4)\bar{j} + \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-P_1 + \frac{P_2}{3} - P_3 + \frac{P_4}{3}\right)\bar{k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$\bar{M} = -M\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{j} - M\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k}.$$

Pentru ca sistemul de patru forțe să fie echivalent cu un cuplu de moment $\bar{M}$ trebuie ca

$$\bar{R} = 0,$$

$$\bar{M}_B = \bar{M}.$$

Prima condiție duce la

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P,$$

iar din a doua condiție obținem

$$-M\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{j} - M\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k} = -\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 2P\bar{j} + \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}P\bar{k},$$

care prin identificarea termenilor cu același versor conduc la sistemul

$$-M\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{a}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 2P$$

$$-M\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4P}{3}.$$

Rezultă

$$P = \frac{M}{a}.$$

Sistemul echivalent este deci format din patru forțe egale între ele și egale în modul cu $\frac{M}{a}$.

3.18. În vîrful O al unui dreptunghi $OABC$ de laturi a și b acționează o forță $\bar{P}$, perpendiculară pe planul dreptunghiului. Să se aplice în celelalte trei vîrfuri ale dreptunghiului trei forțe paralele cu forța dată astfel încît sistemul celor patru forțe să fie în echilibru (fig. 3.18).

Rezolvare. Pentru ca sistemul de forțe să fie în echilibru trebuie să fie satisfăcute relațiile

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M}_0 = 0,$$

unde

$$\bar{R} = (P_1 + P_3 - P_2 - P)\,\bar{k} = 0$$

$$\bar{M}_0 = (P_3a - P_2a)\,\bar{i} + (P_2b - P_1b)\,\bar{j} = 0.$$

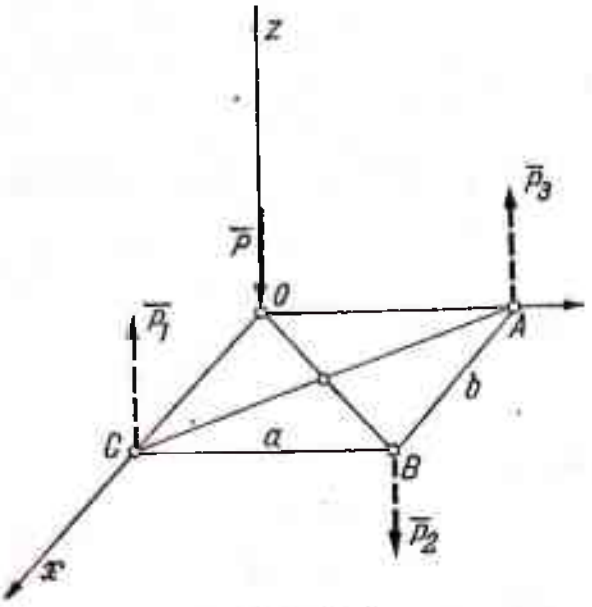


Fig. 3.18

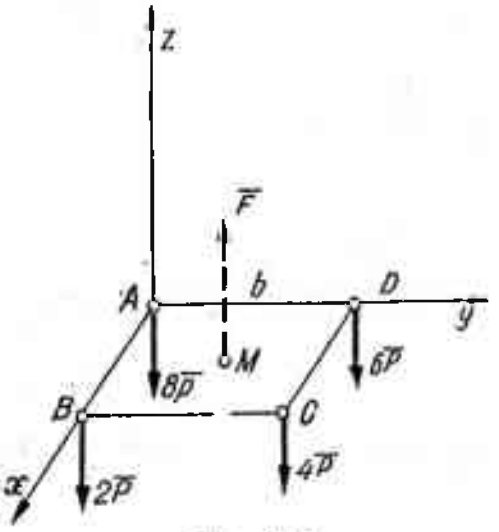


Fig. 3.19

Rezultă condiţiile

$$P_1 + P_3 - P_2 - P = 0$$

$$P_3 a - P_2 a = 0$$

$$P_2 b - P_1 b = 0.$$

Mărimile forţelor căutate sînt

$$P_1 = P_2 = P_3 = P.$$

3.19. În vîrfurile unei plăci dreptunghiulare $ABCD$, de laturi a şi b, acţionează forţele verticale $2\overline{P}$, $4\overline{P}$, $6\overline{P}$, $8\overline{P}$ (fig. 3.19). Pentru ca placa să fie în echilibru trebuie să i se aplice o forţă verticală $\overline{F}$ într-un punct M oarecare. Să se determine mărimea forţei $\overline{F}$ şi coordonatele punctului M.

Rezolvare. Pentru ca sistemul format din forţele $\overline{F}$, $2\overline{P}$, $4\overline{P}$, $6\overline{P}$ şi $8\overline{P}$ să fie în echilibru, trebuie ca forţa $\overline{F}$ şi rezultanta forţelor aplicate în vîrfurile dreptunghiului să fie egale, de sensuri contrare, pe aceeaşi direcţie şi cu acelaşi punct de aplicaţie M.

Punctul de aplicaţie al rezultantei forţelor $2\overline{P}$, $4\overline{F}$, $6\overline{P}$ şi $8\overline{P}$ este situat în planul xAy şi reprezintă punctul în care axa centrală a sistemului celor patru forţe înţeapă planul xAy.

Torsorul sistemului are ca elemente

$$\overline{R}_{A,B,C,D} = -20\,P\overline{k}$$

$$\overline{M}_A = -10Pb\overline{i} + 6aP\overline{j}.$$

Axa centrală se obține din intersecția planelor de ecuații

$$\frac{-10Pb + 20yP}{-20P} = \frac{6aP - 20xP}{0} = \frac{0}{-20P}.$$

Coordonatele punctului M sînt

$$x = \frac{3}{10}a, \quad y = \frac{1}{2}b.$$

Pentru echilibrul întregului sistem de forțe trebuie să existe și relația

$$\bar{R} = 2\bar{P} + 4\bar{P} + 6\bar{P} + 8\bar{P} + \bar{F} = 0$$

sau

$$\bar{R} = -20P\bar{k} + F\bar{k} = 0,$$

adică

$$F = 20P.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

3.20. După laturile și una dintre diagonalele unui hexagon regulat, de latură a, acționează forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6$ și $\bar{F}_7$ avînd pozițiile indicate în figura 3.20. Forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5$ și $\bar{F}_6$ au aceeași mărime F, iar forța $\bar{F}_7$ are mărimea $2F$. Să se reducă sistemul în raport cu punctul O și să se determine axa centrală a sistemului de forțe.

R. $R = 2F, \quad Mo = 3\sqrt{3}Fa$

$y = x\sqrt{3} - 3\sqrt{3}a.$

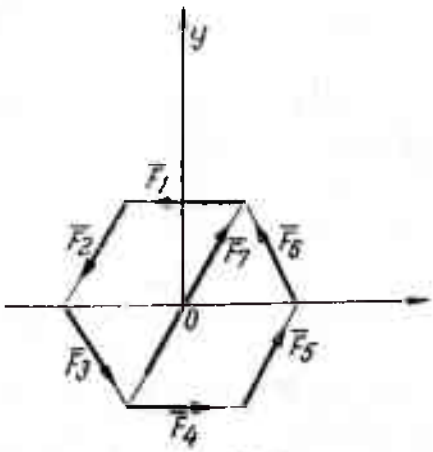


Fig. 3.20

3.21. Se dau trei forțe în spațiu $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$, aplicate respectiv în punctele $A_1(0, 0, 0)$, $A_2(2, 2, 2)$, $A_3(0, 2, 2)$. Proiecțiile forțelor pe axele de coordonate sînt

$X_1 = 5, \quad Y_1 = 5, \quad Z_1 = 0$

$X_2 = 0, \quad Y_2 = -4, \quad Z_2 = -4$

$X_3 = 8, \quad Y_3 = -8, \quad Z_3 = 0.$

Să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul A_2. Lungimile sînt date în metri, iar forțele în kgf.

R. $R = 15{,}3$ kgf, $M = 21{,}4$ kgf · m

$$\cos\alpha = \frac{13}{15{,}3}, \quad \cos\beta = \frac{-7}{15{,}3}, \quad \cos\gamma = \frac{-4}{15{,}3}.$$

Axa centrală are ecuațiile

$$\frac{16 + 4y - 7z}{13} = \frac{-24 + 13z + 4x}{7} = \frac{24 - 7x - 13y}{4}.$$

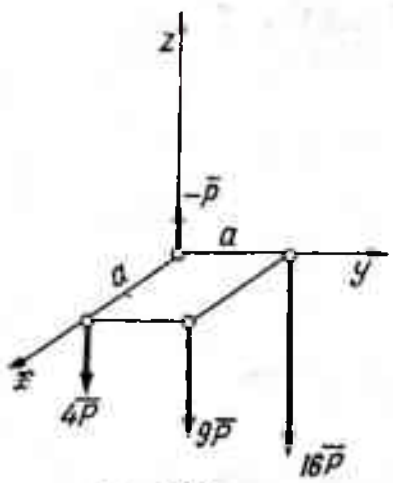


Fig. 3.22

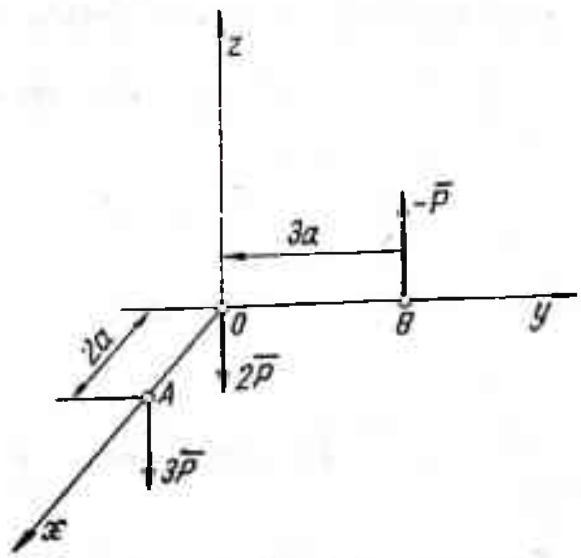


Fig. 3.23

3.22. Să se determine rezultanta și centrul C al forțelor paralele, pentru sistemul din fig. 3.22.

R. $R = 4P$; $x_C = \frac{3a}{2}$, $y_C = +\frac{3a}{4}$.

3.23. Să se determine rezultanta și centrul C al forțelor paralele, pentru sistemul de forțe din figura 3.23. Punctele lor de aplicație sînt în planul xOy.

R. Elementele torsorului forțelor în punctul O sînt

$$\bar{R} = -28P\bar{k}$$

$$\bar{M}_O = -25\,Pa\bar{i} + 13\,Pa\bar{j}.$$

Suportul rezultantei este dat de ecuațiile axei centrale

$$\frac{-2P \cdot a + 28Py}{0} = \frac{13Pa - 28\,Px}{0} = \frac{0}{-28P}.$$

Coordonatele centrului forţelor paralele vor fi

$$x_C = \frac{13}{28}a, \quad y_C = \frac{1}{14}a.$$

3.24. Pe muchiile unui tetraedru regulat, de latură a, acţionează şase forţe egale P, ca în figura 3.24. Să se reducă sistemul în raport cu punctul O şi să se determine axa centrală a sistemului de forţe.

R. $R = P\sqrt{6}$, $M_O = \frac{Pa\sqrt{3}}{2}$.

Axa centrală este axa Oz.

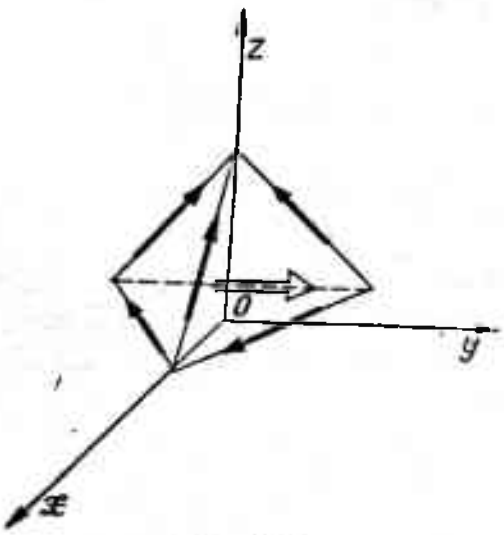


Fig. 3.24

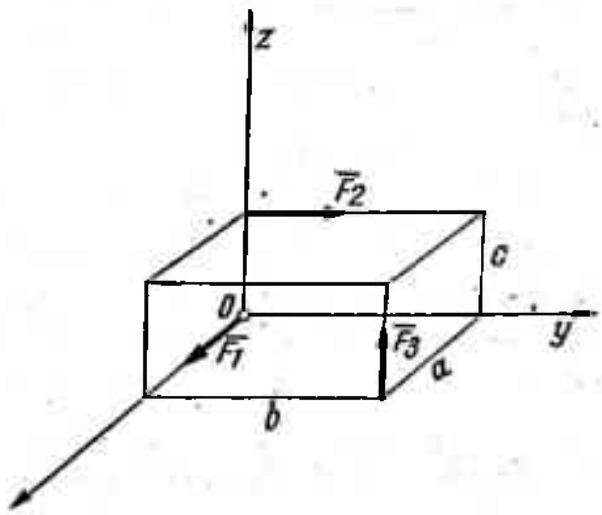


Fig. 3.25

3.25. Asupra unui paralelipiped de dimensiuni a, b, c, acţionează un sistem de trei forţe avînd aceeaşi valoare $F_1 = F_2 = F_3 = F$, reprezentate în figura 3.25. Să se găsească relaţia ce trebuie să existe între lungimile a, b, c pentru ca sistemul să se reducă la o forţă unică.

R. $a = b - c$.

3.26. Asupra unui paralelipiped cu muchiile $2a$, $3a$ şi a acţionează forţele din figura 3.26. Ştiind că $|\overline{P}_1| = 2P$, $|\overline{P}_2| = |\overline{P}_3| = P$ şi $|\overline{P}_4| = 2P$, să se determine scalarul forţei $\overline{F}$ pentru ca sistemul să se reducă la o forţă unică şi să se determine suportul ei.

R. $F = 2P$.

Axa centrală are ecuaţiile

$$z = 0, \quad x = 2a.$$

Scanned with OKEN Scanner

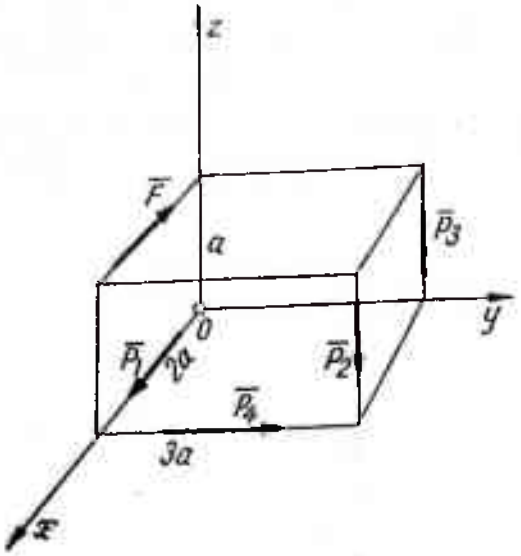


Fig. 3.26

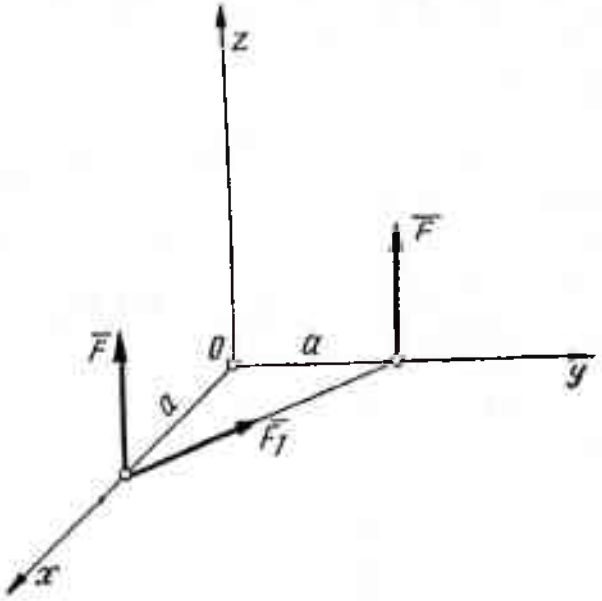


Fig. 3.27

3.27. Se consideră sistemul de trei forțe reprezentate în figura 3.27. Să se reducă acest sistem de forțe în raport cu originea O, să se determine axa centrală a sistemului de forțe și valoarea momentului minim. Se cunosc: $|\bar{F}| = F$ și $|\bar{F}_1| = 2F$.

R. $R = 2\sqrt{2}F$, $M_O = 2aF$, $M_{min} = 0$.

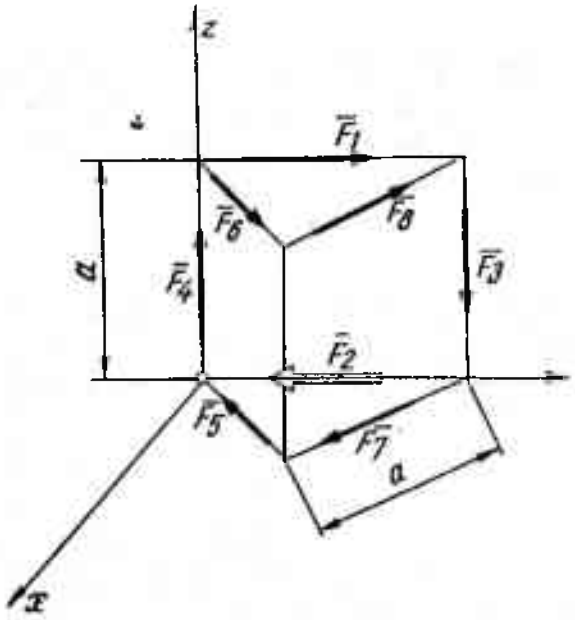


Fig. 3.28

Axa centrală are ecuațiile

$$x - y + \sqrt{2}z = 0, \quad x + y = a.$$

3.28. După muchiile unei prisme drepte, cu baza un triunghi echilateral de latură a și înălțime a, acționează forțele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$, $\bar{F}_6$, $\bar{F}_7$ și $\bar{F}_8$, toate avînd aceeași mărime F și poziția din figura 3.28. Să se reducă sistemul de forțe în raport cu O.

R. Sistemul se reduce la un cuplu de moment

$$M = 3Fa.$$

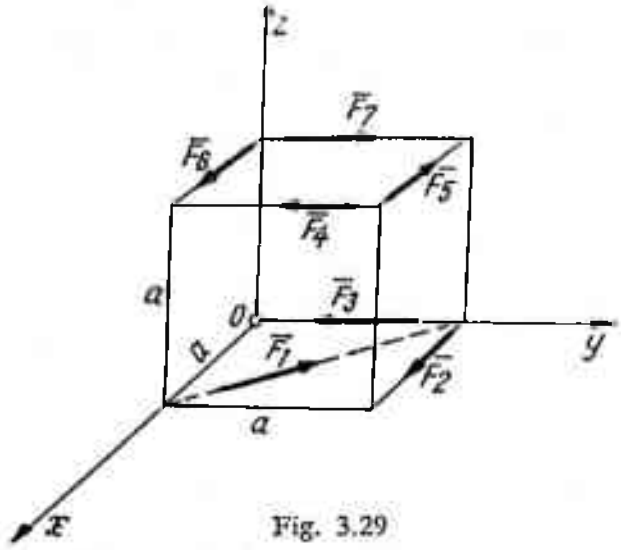


Fig. 3.29

3.29. Asupra unui cub de latură a acționează sistemul de forțe indicat în figura 3.29.

Forța $\bar{F}_1$ are mărimea $F\sqrt{2}$, iar celelalte forțe au mărimea F. Se cere să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul O.

R. Sistemul de forțe este în echilibru.

VI. CENTRE DE MASĂ

Definiții și formule

Obiectul capitolului este determinarea centrului forțelor paralele $m_i\bar{g}$, care acționează asupra unui sistem de puncte materiale $A_i (i = 1, ..., n)$ de mase m_i.

Vectorul de poziție al centrului de masă al unui sistem de puncte materiale este

$$\bar{r}_G = \frac{\Sigma m_i g \bar{r}_i}{\Sigma m_i g} = \frac{\Sigma m_i \bar{r}_i}{\Sigma m_i}.$$

Proiecțiile acestui vector pe axele unui sistem de referință cartezian sînt

$$x_G = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad y_G = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \quad z_G = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}.$$

La corpurile omogene, la care densitatea este constantă, centrele de masă sau de greutate devin centrele geometrice ale corpurilor (linii, suprafețe sau volume).

Proprietăți. Dacă un corp admite un plan, o axă sau un centru de simetrie, centrul de masă se găsește în acel plan, pe acea axă sau în acel centru de simetrie.

Dacă un sistem de puncte materiale (S) poate fi considerat ca rezultînd dintr-un sistem (S_1) din care lipsește un sistem (S_2) și dacă se cunosc masele M_1 și M_2 și centrele G_1 și G_2 ale celor două sisteme, vectorul de poziție al centrului de masă al sistemului (S) se determină cu formula

$$\bar{r}_G = \frac{M_1\bar{r}_1 - M_2\bar{r}_2}{M_1 - M_2}.$$

Teoremele Guldin-Pappus. 1) Aria suprafeței generate de un arc de curbă plană care se rotește în jurul unei axe din planul curbei, pe care nu o intersectează, este egală cu lungimea arcului de curbă multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de masă al curbei date, presupuse omogene (fig. IV.1.).

$$A = 2\pi y_G L.$$

Aici L este lungimea arcului de curbă și y_G cota centrului său de masă față de axa de rotație.

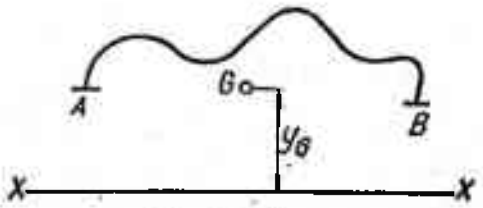


Fig. IV. 1

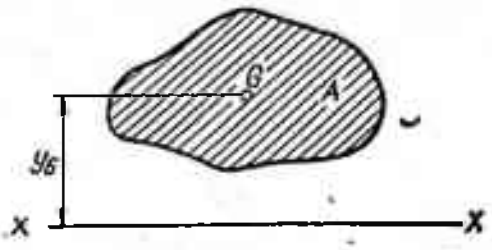


Fig. IV. 2

2) Volumul generat prin rotirea unei arii plane, în jurul unei axe din planul său pe care nu o intersectează, este egal cu aria considerată multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de masă al ariei, presupuse omogene (fig. IV.2).

$$V = 2\pi y_G A,$$

unde A este aria considerată și y_G cota centrului său de masă față de axa de rotație.

Probleme rezolvate

4.1. Să se calculeze coordonatele centrului de masă pentru linia din fig. 4.1, considerînd pentru porțiunile AB și EF o masă specifică p_1 kg/m, iar pentru porțiunea GH și CD o masă specifică p_2 kg/m.

Rezolvare. Calculul centrului de masă este reprodus în tabela următoare:

Figura	m_i	x_i	y_i	$m_i x_i$	$m_i y_i$
$\underline{A\ B}$	$2ap_1$	0	a	0	$2a^2p_1$
$\overline{E\ F}$	ap_1	0	$-a$	0	$-a^2p_1$
$\begin{matrix} G \\ H \end{matrix}\Big\vert$	$2ap_2$	0	0	0	0
$\underline{C\ D}$	$\frac{ap_2}{4}$	$\frac{a}{8}$	0	$\frac{a^2p_2}{32}$	0
	$\left(3p_1 + \frac{9}{4}p_2\right)a$			$\frac{a^2p_2}{32}$	a^2p_1

Rezultă pentru coordonatele căutate valorile

$$x_G = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{8} p_2}{a\left(3p_1 + \frac{9}{4} p_2\right)} = \frac{ap_2}{8(12p_1 + 9p_2)} \qquad y_G = \frac{ap_1 \cdot a}{\frac{a}{4}(12p_1 + 9p_2)} = \frac{4ap_1}{12p_1 + 9p_2}$$

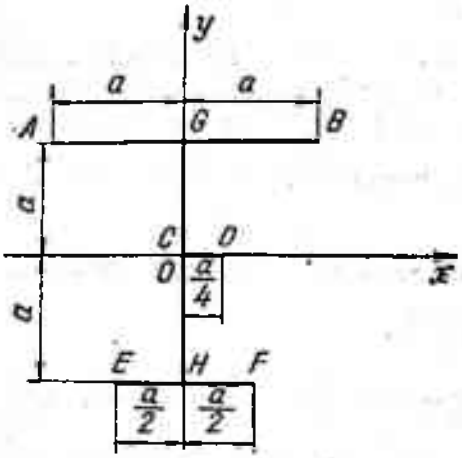


Fig. 4.1

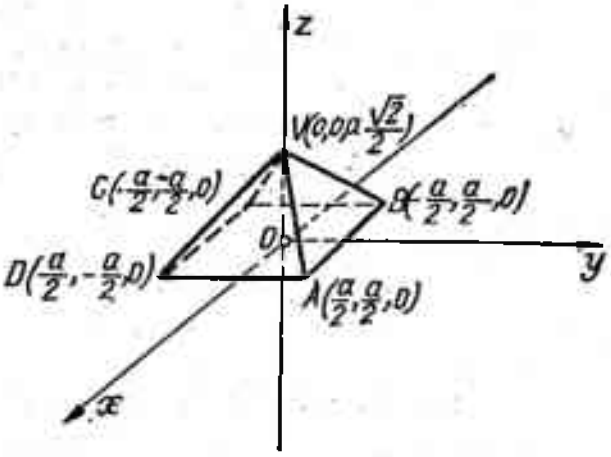


Fig. 4.2

4.2. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al muchiilor unei piramide cu baza pătrată (latura a) și muchia egală cu a (fig. 4.2).

Rezolvare. Pătratul ce reprezintă baza are lungimea totală $l_1 = 4a$ și coordonatele centrului de masă $x_1 = y_1 = z_1 = 0$.

Muchiile au lungimea totală $l_2 = 4a$, iar coordonatele centrului de masă $x_2 = y_2 = 0$, $z_2 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Rezultă

$$x_G = y_G = 0, \quad z_G = \frac{4a\frac{a\sqrt{2}}{4}}{4a + 4a} = \frac{a\sqrt{2}}{8}.$$

4.3. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al barei omogene din figura 4.3, formată din trei semicercuri de raze R, $2R$, $4R$ avînd centrele respectiv în O_1, O_2 și O_3.

Rezolvare. Mărimile necesare în calcul sînt lungimile arcelor de curbă ce alcătuiesc figura și coordonatele centrelor de masă respective

$$l_1 = \pi R, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{2R}{\pi}$$

$$l_2 = 2\pi R, \quad x_2 = -R, \quad y_2 = -\frac{4R}{\pi}$$

$$l_3 = 4\pi R, \quad x_3 = R, \quad y_3 = \frac{8R}{\pi}$$

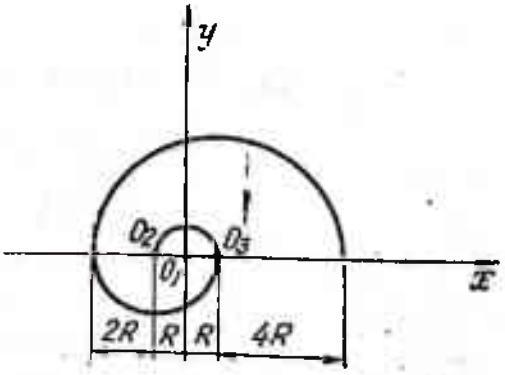


Fig. 4.3

Coordonatele centrului de masă sînt

$$x_G = \frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma l_i} = \frac{-2\pi R \cdot R + 4\pi R \cdot R}{\pi R + 2\pi R + 4\pi R} = \frac{2R}{7}$$

$$y_G = \frac{\Sigma l_i y_i}{\Sigma l_i} = \frac{\pi R \frac{2R}{\pi} - 2\pi R \frac{4R}{\pi} + 4\pi R \frac{8R}{\pi}}{\pi R + 2\pi R + 4\pi R} = \frac{26R}{7\pi}.$$

4.4. Să se calculeze coordonatele centrului de masă pentru linia omogenă din figura 4.4, în care arcul ABA' este un semicerc de rază R, arcul CD este un sfert de cerc de rază r, iar segmentul $OC = 2R$.

Să se calculeze raportul $\frac{R}{r} = k$ pentru care centrul de masă se află pe axa Ox.

Rezolvare. Coordonatele centrului de masă se exprimă prin formulele

$$x_G = \frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma l_i} \qquad y_G = \frac{\Sigma l_i y_i}{\Sigma l_i}.$$

Valorile lungimilor arcelor şi coordonatelor necesare în calcul sînt

$$l_1 = \pi R, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{2R}{\pi}, \quad l_2 = 3R, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = -\frac{1}{2}R$$

$$l_3 = \frac{\pi r}{2}, \quad x_3 = r\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \quad y_3 = -2\left(R + \frac{r}{\pi}\right).$$

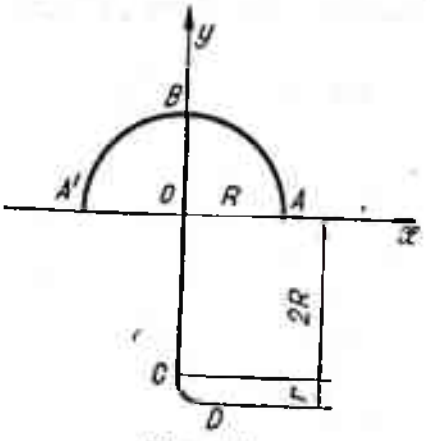


Fig. 4.4

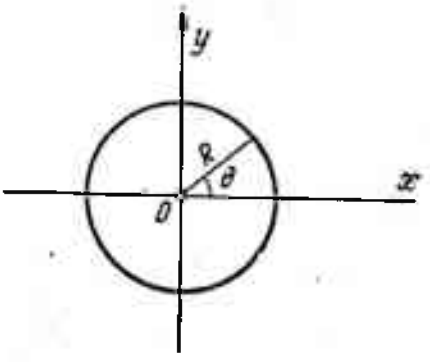


Fig. 4.5

Coordonatele centrului de masă au forma

$$x_G = \frac{(\pi - 2)r^2}{2R(\pi + 3) + \pi r}, \quad y_G = \frac{R^2 - 2r(\pi R + r)}{2[2R(\pi + 3) + \pi r]}.$$

Pentru $y_G = 0$, rezultă

$$k = \pi + \sqrt{\pi^2 + 2}.$$

4.5. Să se calculeze poziţia centrului de masă pentru un contur circular neomogen (fig. 4.5), de rază R, dacă densitatea materialului este $\rho = k\theta$.

Rezolvare.

$$x_G = \frac{\int_0^{2\pi} \rho R\, d\theta \cdot R\cos\theta}{\int_0^{2\pi} \rho R\, d\theta} = \frac{R^2 k \int_0^{2\pi} \theta\cos\theta\, d\theta}{kR\int_0^{2\pi} \theta\, d\theta} = \frac{R^2 k\left[\theta\sin\theta\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\right]}{kR\frac{\theta^2}{2}\Big|_0^{2\pi}} =$$

$$= R\frac{\cos\theta\Big|_0^{2\pi}}{\frac{\theta^2}{2}\Big|_0^{2\pi}} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_0^{2\pi} \rho R\, d\theta \cdot R\sin\theta}{\int_0^{2\pi} \rho R\, d\theta} = \frac{kR^2\int_0^{2\pi} \theta\sin d\theta}{kR\int_0^{2\pi} \theta\, d\theta} = R\frac{-\theta\cos\theta\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta}{\frac{\theta^2}{2}\Big|_0^{2\pi}} = -\frac{R}{\pi}.$$

4.6. Să se calculeze coordonatele centrului de masă pentru linia omogenă din figura 4.6, formată dintr-un semicerc ABA', de rază R, situat în planul yOz, completat cu două segmente de dreaptă AC și $A'C'$ de lungimi egale cu a și paralele cu axa Ox.

Să se calculeze a, astfel încît centrul de masă al liniei rezultate să se găsească în planul $z = z_0 > 0$

Rezolvare. Centrul de masă se află pe axa Oz, deci

$$x_G = y_G = 0$$

$$z_G = \frac{\pi R\frac{2R}{\pi}}{\pi R + 2a} = \frac{2R^2}{\pi R + 2a}.$$

Punînd condiția: $z_G = z_0$, adică $\frac{2R^2}{\pi R + 2a} = z_0$, rezultă

$$a = R\left(\frac{R}{z_0} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Observație. — Condiția de compatibilitate a problemei este $a \geqslant 0$, adică

$$\frac{R}{z_0} - \frac{\pi}{2} \geqslant 0, \text{ respectiv } z_0 \leqslant \frac{2R}{\pi}.$$

La limită, pentru $z_0 = \frac{2R}{\pi}$, rezultă

$$a = 0.$$

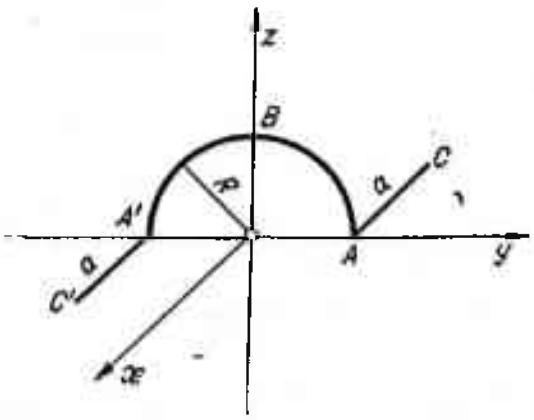


Fig. 4.6

4.7. Să se calculeze lungimea liniei AB, astfel încît linia omogenă din fig. 4.7 să stea în echilibru indiferent pe un plan orizontal.

Rezolvare. Centrul de masă al figurii trebuie să se găsească în punctul O, punct care are ordonata constantă, egală cu R, față de planul orizontal. Avem

$$y_G = 0$$

$$x_G = \frac{-\pi R \frac{2R}{\pi} + l\frac{l-2R}{2}}{\pi R + l} = \frac{-4R^2 + l(l-2R)}{2(\pi R + l)} = 0.$$

Din aceste relații rezultă pentru l valoarea $l = R(1 + \sqrt{5})$.

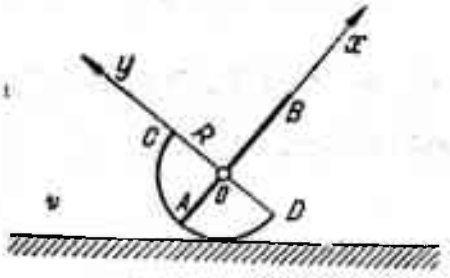


Fig. 4.7

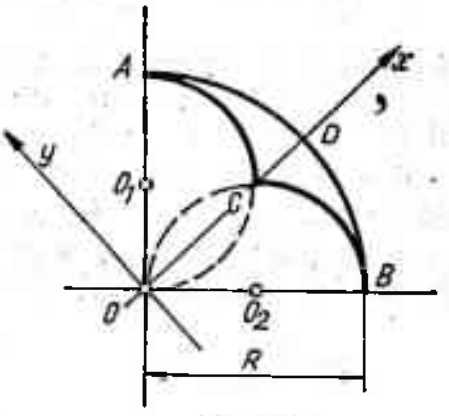


Fig. 4.8

4.8. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al liniei omogene $ADBCA$, compuse din trei sferturi de cercuri dispuse ca în figura 4.8.

Rezolvare. Arcul ACB are lungimea $l_1 = \frac{\pi R}{2}$ (două sferturi de cerc de rază $R/2$) și coordonatele centrului de masă

$$x_1 = \frac{R}{2\sqrt{2}} + \frac{2\frac{\sqrt{2}R}{\pi}\frac{\pi R}{2}}{\pi R} = \sqrt{2}R\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\right), \qquad y_1 = 0.$$

Arcul ADB are lungimea $h = \frac{\pi R}{2}$ și coordonatele centrului de masă

$$x_2 = \frac{2R\sqrt{2}}{\pi}, \qquad y_2 = 0.$$

Coordonatele centrului de masă al figurii sînt date de expresiile

$$x_G = \frac{\frac{\pi R}{2} R\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\right)+\frac{\pi R}{2}\frac{2R\sqrt{2}}{\pi}}{\pi R} = \frac{R\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\right)+\frac{R\sqrt{2}}{\pi} = \frac{R\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\right),$$

$$y_G = 0.$$

4.9. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al liniei omogene din figura 4.9, alcătuită din trei semicercuri de rază R (așezate în plane verticale ce formează unghiuri de 120° între ele) și dintr-o porțiune dreaptă $OD = 2\pi R$. Să se calculeze apoi lungimea segmentului OD, astfel încît centrul de masă al figurii să se găsească în O.

Rezolvare. Axa O_z fiind axă de simetrie avem

$$x_G = y_G = 0,$$

$$z_G = \frac{-3\pi R\frac{2R}{\pi}+2\pi^2R^2}{3\pi R+2\pi R} = \frac{2\pi^2R^2-6R^2}{5\pi R} = R\frac{2\pi^2-6}{5\pi}.$$

Notînd lungimea segmentului OD cu L, cota centrului de masă este

$$z_G = \frac{-3\pi R\frac{2R}{\pi}+\frac{L^2}{2}}{3\pi R+L}.$$

Condiția ca centrul de masă să se găsească în origine va fi

$$L^2 - 12R^2 = 0,$$

de unde

$$L = 2R\sqrt{3}.$$

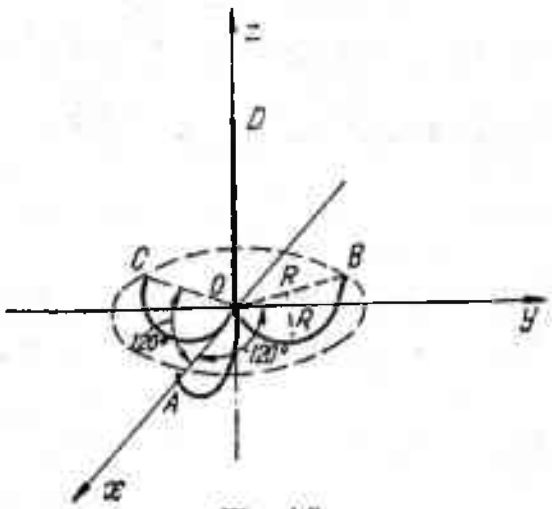


Fig. 4.9

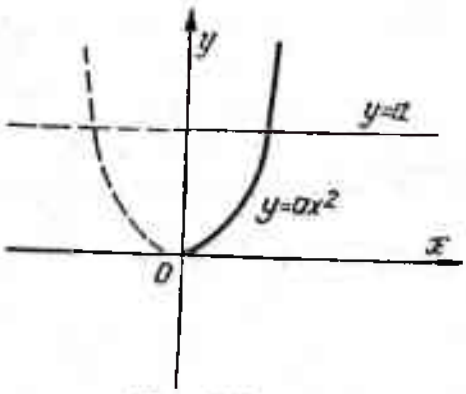


Fig. 4.10

4.10. Să se afle poziția centrului de masă al jumătății parabolei de ecuație $y = ax^2$, considerînd porțiunea cuprinsă între axa Ox și dreapta $y = a$ (fig. 4.10).

Rezolvare. Abscisa x_G a centrului de masă are expresia

$$x_G = \frac{\int_0^s x\,\mathrm{d}s}{\int_0^s \mathrm{d}s} = \frac{\int_0^x x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x},$$

unde

$$y' = 2ax.$$

Înlocuind valoarea lui y' în expresia lui x_G, obținem

$$x_G = \frac{\int_0^1 x\sqrt{1+4a^2x^2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \sqrt{1+4a^2x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{2au^3\Big|_{\frac{1}{2a}}^{\frac{\sqrt{1+4a^2}}{2a}}}{3\left[ax\sqrt{\frac{1}{4a^2}+x^2}+\frac{1}{4a}\ln\left(x+\sqrt{\frac{1}{4a^2}+x^2}\right)\right]_0^1},$$

unde pentru calculul integralei de la numărător se face substituția $x^2+\frac{1}{4a^2}=u^2$.

4.11. Să se calculeze poziția centrului de masă al suprafeței unei jumătăți de hexagon regulat (fig. 4.11).

Rezolvare. Suprafața dreptunghiului $BCC'B'$ este $A_1 = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. Ordonata centrului de greutate al suprafeței $BCC'B'$ este $y_1 = \frac{R\sqrt{3}}{4}$.

Suprafețele $ABB' + CDC'$ au mărimea $A_2 = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Ordonata centrului de masă al suprafețelor $ABB' + CDC'$ este $y_2 = \frac{R\sqrt{3}}{6}$.

Rezultă pentru jumătatea de hexagon coordonatele centrului de masă

$$x_G = 0$$

$$y_G = \frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{4}+\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{6}}{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{R}{2}+\frac{R}{6}}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{9}.$$

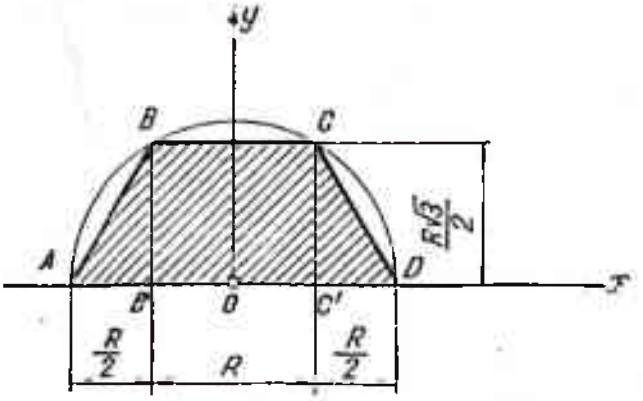


Fig. 4.11

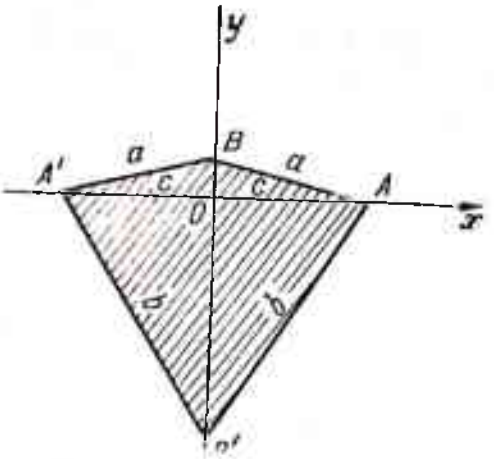


Fig. 4.12

4.12. Să se calculeze coordonatele centrului de masă pentru patrulaterul omogen din figura 4.12.

Rezolvare. Figura poate fi descompusă în două triunghiuri, ABA, și $AB'A'$, de arii

$$A_1 = ABA' = c\sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{și} \quad A_2 = AB'A' = c\sqrt{b^2 - c^2}.$$

Coordonatele centrelor de masă respective sînt

$$y_1 = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - c^2}, \qquad x_1 = 0 \quad \text{și} \quad y_2 = \frac{-1}{3}\sqrt{b^2 - c^2}, \qquad x_2 = 0.$$

Rezultă pentru coordonatele centrului de masă al întregii figuri

$$x_G = 0,$$

$$y_G = \frac{c[\sqrt{(a^2 - c^2)^2} - \sqrt{(b^2 - c^2)^2}]}{3c[\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}]} = \frac{a^2 - b^2}{3[\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}]}.$$

4.13. Să se scrie ecuația locului geometric al pozițiilor centrului de masă al porțiunii hașurate din figura 4.13, obținută prin scoaterea unui dreptunghi de suprafață δa din pătratul de latură $2a$.

Rezolvare. Ariile celor două figuri care intră în calcul sînt

$$A_1 = 4a^2 \quad \text{și} \quad A_2 = -a\delta,$$

iar coordonatele centrelor lor de masă au expresiile

$$x_1 = y_1 = 0 \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{2a - \delta}{2}, \quad y_2 = -\frac{a}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele centrului de masă căutat, care reprezintă ecuațiile parametrice ale locului geometric al poziției centrului de greutate sînt

$$x_G = \frac{-a\delta(2a-\delta)}{2a(4a-\delta)} = -\frac{\delta}{2}\,\frac{2a-\delta}{4a-\delta},$$

$$y_G = \frac{a^2\delta}{2a(4a-\delta)} = \frac{\delta}{2}\cdot\frac{a}{4a-\delta}.$$

Eliminînd pe δ între cele două ecuații se obține locul geometric căutat sub forma

$$x = 2y\,\frac{2y-a}{2y+a}.$$

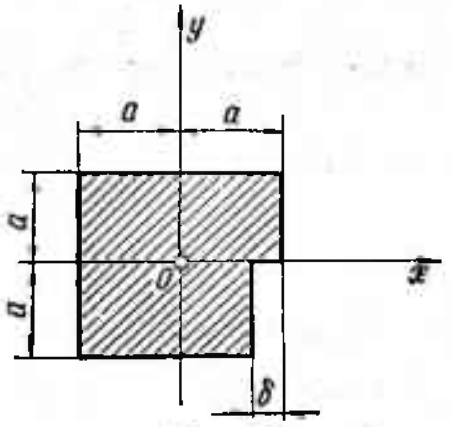


Fig. 4.13

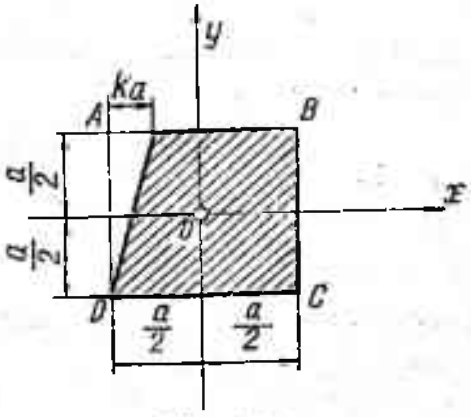


Fig. 4.14

4.14. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al plăcii omogene haşurate din figura 4.14, obținută prin scoaterea unui triunghi dreptunghic din pătratul $ABCD$ de latură a.

Rezolvare. Aria suprafeței haşurate este

$$A = a^2 - \frac{1}{2}ka^2 = \frac{a^2}{2}(2-k).$$

Coordonatele centrului de masă al triunghiului sînt

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{k}{3}a = \frac{a}{6}(2k-3)$$

$$y_1 = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6},$$

iar ale pătratului

$$x_2 = y_2 = 0.$$

Rezultă pentru coordonatele centrului de masă al figurii haşurate

$$x_G = \frac{-\frac{ka^2}{2} \cdot \frac{a}{6}(2k-3)}{\frac{a^2}{2}(2-k)} = -\frac{ka(2k-3)}{6(2-k)}$$

$$y_G = \frac{-\frac{ka^2}{2} \cdot \frac{a}{6}}{\frac{a^2}{2}(2-k)} = -\frac{ka}{6(2-k)}.$$

Cazuri particulare:

$k = 0$ — placa omogenă rămîne pătrată: $x_G = y_G = 0$;

$k = 1$ — placa omogenă devine un triunghi avînd drept ipotenuză diagonala pătratului

$$x_G = -y_G = \frac{a}{6}.$$

4.15. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al suprafeţei omogene haşurate din figura 4.15, obţinută prin extragerea din pătratul de latură a, a unui segment de cerc de rază a.

Rezolvare. Calculul poate fi sistematizat în modul următor:

Figura	A_i	y_i	$A_i y_i$
Pătrat	a^2	0	0
Triunghi	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$-\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{-a^2\sqrt{3}}{24}(3+\sqrt{3})$
Segment de cerc	$-\frac{\pi a^2}{6}$	$-\left[\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}a\frac{1}{2}\frac{6}{\pi}\right]$	$\frac{a^3}{12}[\pi(1+\sqrt{3})-4]$
	$\Sigma A_i z = a^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$		$\Sigma A_i y_i = \frac{a^3}{12}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(3+\sqrt{3}) + \pi(1+\sqrt{3})-4\right]$

Coordonatele centrului de masă căutat sînt

$$x_G = 0,$$

$$y_G = \frac{a^3\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(3+\sqrt{3})+\pi(1+\sqrt{3})-4\right]}{12a^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = a\,\frac{3\sqrt{3}+2\pi(1+\sqrt{3})-5}{2(12+3\sqrt{3}-2\pi)}.$$

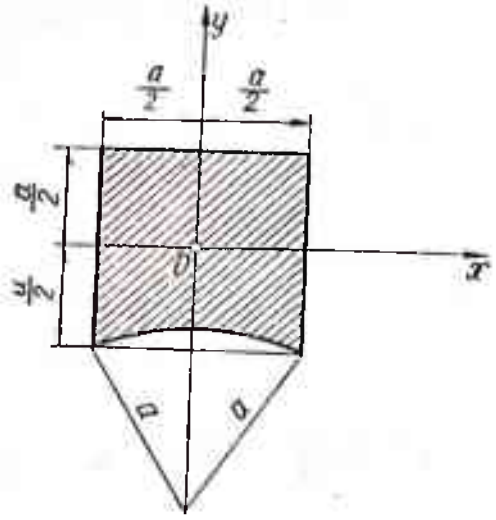


Fig. 4.15

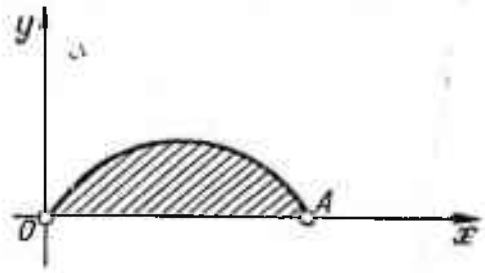


Fig. 4.16

4.16. Să se determine poziția centrului de masă al suprafeței mărginite de o jumătate de buclă a lemniscatei lui Bernoulli, dată de ecuația: $r^2 = 2c^2 \cos 2\theta$ și de axa Ox (fig. 4.16).

Rezolvare. Aria unei jumătăți de buclă a lemniscatei este:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} c^2$$

$$x_G = \frac{\iint r^2 \cos\theta \cdot dr \cdot d\theta}{\frac{1}{2} c^2} = \frac{\frac{2}{3} c^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cdot \cos\theta (\cos 2\theta)^{3/2} \cdot d\theta}{\frac{1}{2} c^2}.$$

Notînd

$$u = \sqrt{2} \sin\theta, \text{ avem } du = \sqrt{2} \cos\theta \cdot d\theta \text{ și } 1 - u^2 = \cos 2\theta.$$

Rezultă:

$$x_G = \frac{4}{3} c \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - u^2)^{3/2} \cdot du = \frac{4}{3} c \cdot \frac{3}{16} \pi = \frac{\pi}{4} c$$

$$y_G = \frac{\iint r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta}{\frac{1}{2} c^2} = \frac{\frac{2}{3} c^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cdot \sin\theta (\cos 2\theta)^{3/2} \cdot d\theta}{\frac{1}{2} c^2}$$

Notînd

$$v = \sqrt{2}\cos\theta, \text{ avem } -\mathrm{d}v = \sqrt{2}\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta\; v^2 - 1 = \cos 2\theta.$$

Rezultă:

$$y_G = \frac{4}{3}c\int_1^{\sqrt{2}}(v^2-1)^{3/2}\cdot\mathrm{d}v = c\left[\frac{1}{2}\lg(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right].$$

4.17. Să se determine poziția centrului de masă al unui arc omogen de lănțișor, limitat de vîrful A al curbei și un punct oarecare $M(x, y)$ al acesteia și centrul de greutate al ariei suprafeței limitate de axe, arcul AM și ordonata lui M (fig. 4.17).

Rezolvare. 1) Ecuația lănțișorului este

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$$

$$m = \int \mathrm{d}m = \rho\int \mathrm{d}s = \rho\int_0^x \frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})\,\mathrm{d}x =$$

$$= \rho\frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}) = \rho a y'$$

$$\int x\,\mathrm{d}m = \rho\int x\,\mathrm{d}s = \rho a x y' - \rho a(y-a)$$

$$\int y\,\mathrm{d}m = \rho\int y\,\mathrm{d}s = \rho\cdot\frac{1}{2}ayy' + \frac{1}{2}\rho a x.$$

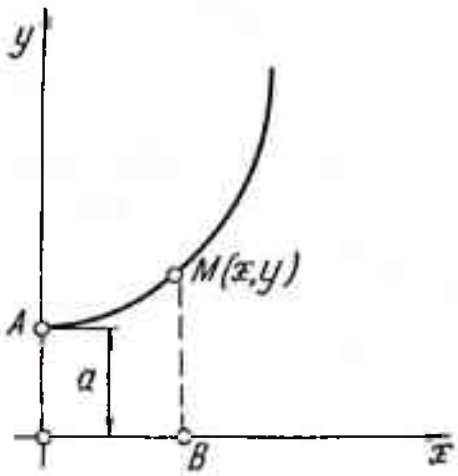


Fig. 4.17

Coordonatele centrului de greutate G al arcului AM sînt

$$x_G = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = x - (y-a)\frac{1}{y'},$$

$$y_G = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{1}{2}\left(y + x\cdot\frac{1}{y'}\right).$$

2) Se notează cu $G_1(x_{G_1}, y_{G_1})$ centrul de greutate al ariei suprafeței $OAMB$. Aria aceasta are valoarea:

$$A = \int_0^x y\,\mathrm{d}x = a\int_0^x \mathrm{ch}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = a^2\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece arcul AM are lungimea $s = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$, aria A se poate pune și sub forma $A = as$.

Scriind relațiile:

$$A x_{G_1} = \int_0^x xy\,\mathrm{d}x; \qquad A y_{G_1} = \frac{1}{2}\int_0^x y^2\,\mathrm{d}x$$

și avînd în vedere că $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{a}$, rezultă

$$A x_{G_1} = a\int_0^x x\,\mathrm{d}s; \qquad A y_{G_1} = \frac{a}{2}\int_0^x y\,\mathrm{d}s,$$

de unde se obține

$$x_{G_1} = x_G; \qquad y_{G_1} = \frac{1}{2}\,y_G.$$

4.18. Se consideră o placă omogenă, circulară, de rază R, care se îndoaie după coarda AB astfel încît cele două părți formează un unghi diedru drept (fig. 4.18). Să se găsească poziția centrului de masă al figurii astfel formate. Se dă $AB = R$.

Rezolvare. Centrul de masă al segmentului de cerc ADB are coordonatele

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = \frac{\frac{\pi R^2}{6}\cdot\frac{2}{3}R\frac{1}{2}\frac{6}{\pi} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3}\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}} = R\,\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{R}{2\pi - 3\sqrt{3}}.$$

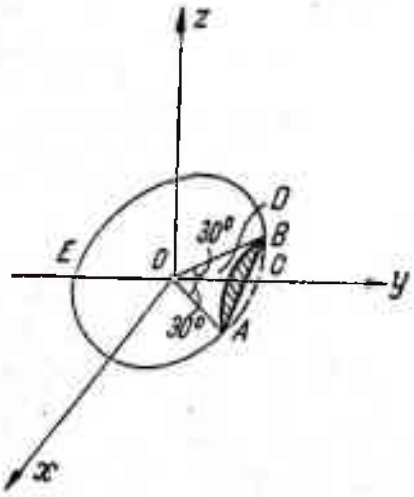


Fig. 4.18

Centrul de masă al segmentului de cerc AEB are coordonatele

$$x_2 = 0, \qquad z_2 = 0$$

$$y_2 = \frac{-R^2\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)\frac{R}{(2\pi - 3\sqrt{3})}}{\pi R^2 - R^2\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)} =$$

$$= -\frac{-R}{12\left[\pi - \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right]} = -\frac{R}{10\pi - 3\sqrt{3}}.$$

În sistemul de referință $Oxyz$ coordonatele centrului de masă ale celor două segmente de cerc vor fi:

— pentru segmentul ADB: $G_1\left[0, \frac{R\sqrt{3}}{2}, \left(\frac{1}{2\pi - 3\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R\right]$;

— pentru segmentul AEB: $G_2\left(0, \frac{-R}{10\pi - 3\sqrt{3}}, 0\right)$.

Coordonatele centrului de masă căutat vor fi

$$x_G = 0$$

$$y_G = \frac{\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})\frac{R\sqrt{3}}{2} - R^2(10\pi - 3\sqrt{3})\cdot\frac{R}{10\pi - 3\sqrt{3}}}{\pi R^2} =$$

$$= R\frac{-24 + \sqrt{3}(2\pi - 3\sqrt{3})}{24\pi} = R\frac{-33 + 2\pi\sqrt{3}}{24\pi}$$

$$z_G = \frac{\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})\left(\frac{R}{2\pi - 3\sqrt{3}} - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)}{\pi R^2} =$$

$$= R\frac{\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24}(2\pi - 3\sqrt{3})}{\pi} = R\frac{11 - 2\sqrt{3\pi}}{24\pi}.$$

4.19. Să se afle centrul de masă al jumătății haşurate din suprafața lenticulară $COBD$ (fig. 4.19, *a*).

Rezolvare. Se va aplica a doua formulă Pappus-Guldin.

Volumul generat prin rotația suprafeței haşurate în jurul axei Oy este egal cu dublul volumului calotei CBD (fig. 4.19, *b*).

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{2}} dz \int_0^{\sqrt{\frac{3R^2}{4} - Rz - z^2}} \rho\, d\rho = \frac{2\cdot 2\pi}{2}\left[\frac{3R^2}{4}\cdot\frac{R}{2} - \frac{R}{2}\cdot\frac{R^2}{4} - \frac{1}{3}\frac{R^3}{8}\right] = \frac{5}{12}\pi R^3.$$

Mărimea suprafeței haşurate $OBDO$ este

$$A = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

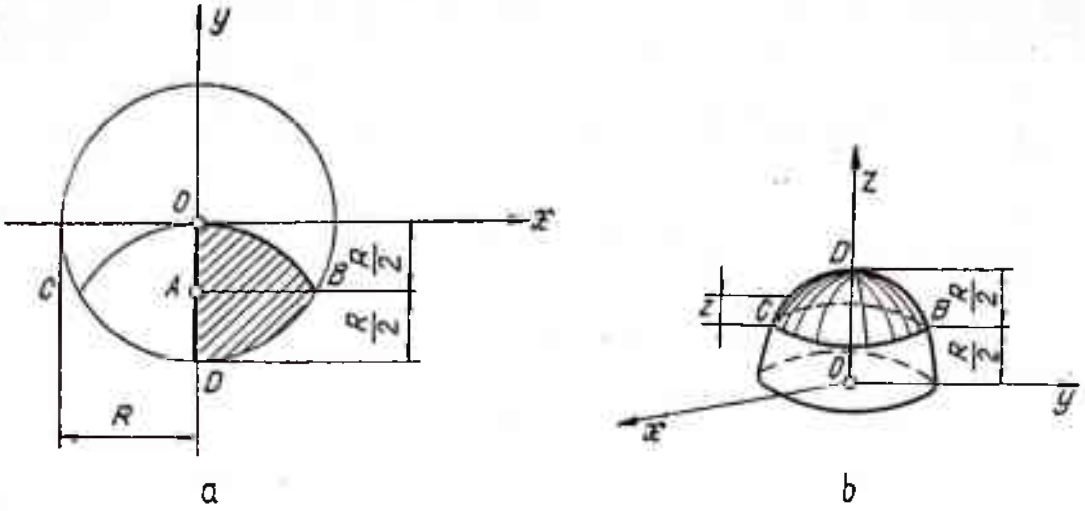


Fig. 4.19

Coordonata x_G a centrului de masă al suprafeței hașurate va fi

$$x_G = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{5}{12}\pi R^3}{\frac{2\pi R^2}{12}\cdot(4\pi - 3\sqrt{3})} = \frac{5R}{2(4\pi - 3\sqrt{3})}.$$

Din motive de simetrie,

$$y_G = -\frac{R}{2}.$$

4.20. Să se calculeze poziția centrului de masă al suprafeței omogene hașurate din figura 4.20.

Rezolvare. Se calculează coordonatele centrului de masă al sfertului suprafeței lenticulare ABD (v. problema 4.19).

$$x_{G_1} = \frac{5R}{2(4\pi - 3\sqrt{3})}.$$

Coordonata y_{G_1} a segmentului $BACD$ se obține considerînd sectorul $OCDB$ din care se scade triunghiul BOC; rezultă

$$y_{G_1} = \frac{-\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{2}{3}R\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{\pi} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{R}{3}}{\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2}} = R\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}}{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \frac{-3}{4\pi - 3\sqrt{3}}R\sqrt{3}.$$

Coordonatele centrului de masă al suprafeţei haşurate vor fi

$$x_G = \frac{\frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{4R}{3\pi} - \frac{R^2}{24}(4\pi - 3\sqrt{3})\frac{5R}{2(4\pi - 3\sqrt{3})}}{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{24}(4\pi - 3\sqrt{3})} = \frac{\frac{16-5}{48}}{\frac{6\pi - 4\pi + 3\sqrt{3}}{24}}R = \frac{11R}{2(2\pi + 3\sqrt{3})},$$

$$y_G = \frac{-\frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{4R}{3\pi} + \frac{R^2}{24}(4\pi - 3\sqrt{3})\frac{3R\sqrt{3}}{(4\pi - 3\sqrt{3})}}{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{24}(4\pi - 3\sqrt{3})} = \frac{-\frac{R}{3} + \frac{3R\sqrt{3}}{24}}{\frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{24}} = \frac{-8+3\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}R.$$

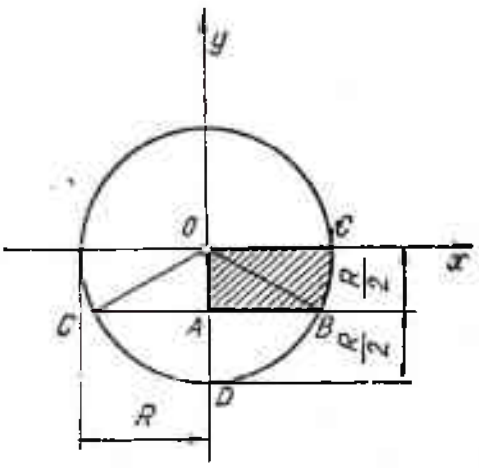


Fig. 4.20

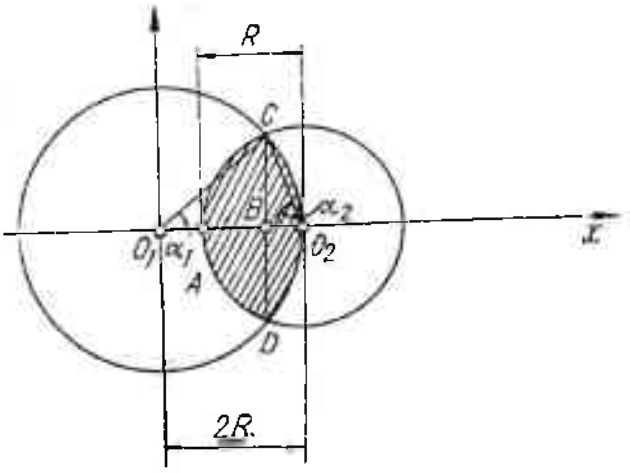


Fig. 4.21

4.21. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al suprafeţei omogene cuprinsă între două cercuri secante, de raze R şi $2R$ (fig. 4.21).

Rezolvare. Calculul coordonatelor centrului de masă al segmentului de cerc CO_2D.

$A_1 = 4R^2\alpha_1$ este aria suprafeţei sectorului O_1CO_2D şi centrul său de masă are coordonata

$$x_1 = \frac{4R}{3}\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}$$

$A_2 = -4R^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1$ este suprafaţa triunghiului CO_1D şi centrul său de masă are coordonata

$$x_2 = \frac{4R}{3}\cos\alpha_1.$$

Centrul de masă al segmentului CO_2DB este

$$x_{G_1} = \frac{4R^2\alpha_1\frac{4R\sin\alpha_1}{3\alpha_1} - 4R^2\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_1\frac{4R\cos\alpha_1}{3}}{4R^2(\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_1)} = \frac{4R}{3}\frac{\sin^3\alpha_1}{\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_1}$$

$$y_{G1} = 0.$$

Coordonatele centrului de masă al segmentului de cerc CAD sînt

$$X_{G_1} = 2R - \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha_2}{\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2} = 2R\left[1 - \frac{\sin^3 \alpha_2}{3(\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)}\right]$$

$$Y_{G_1} = 0.$$

Pentru suprafața hașurată vom avea

$$x_G = \frac{4R^2(\alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) \dfrac{4R \sin^3 \alpha_1}{3(\alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1)} + R^2(\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) 2R \times \left[1 - \dfrac{\sin^3 \alpha_2}{3(\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}\right.}{4R^2(\alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + R^2(\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)} =$$

$$= R \frac{\dfrac{16}{3} \sin^3 \alpha_1 + 2(\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) - \dfrac{2}{3} \sin^3 \alpha_2}{4\alpha_1 + \alpha_2 - 4 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}$$

$$y_G = 0.$$

Pentru calcularea lui α se intersectează cele două cercuri și se găsesc coordonatele punctelor lor de intersecție

$$X_C = \frac{7R}{4}, \quad Y_C = \frac{R\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{Y_C}{2R} = \frac{\sqrt{15}}{8}, \qquad \cos \alpha_1 = \frac{X_C}{2R} = \frac{7}{8}, \quad \alpha_1 \approx 0{,}52 \text{ rad.}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{Y_C}{R} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{1}{4}, \qquad \alpha_2 \approx 1{,}32 \text{ rad.}$$

Înlocuind valorile găsite în expresia lui x_G rezultă

$$x_G \approx 1{,}30\, R, \quad y_G = 0.$$

4.22. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al suprafeței omogene cuprinse între axa Ox și sinusoida $y = \sin x$ în intervalul $(0, \pi)$, (fig. 4.22.).

Rezolvare. Coordonata y_G a centrului de masă al suprafeței este

$$y_G = \frac{\dfrac{1}{2}\iint y\,dA}{\iint dA} = \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\, dx} = \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx}{-(\cos \pi - \cos 0)} = \frac{\dfrac{1}{4}\left(\pi - \dfrac{1}{2} \sin 2\pi\right)}{2} = \frac{\pi}{8},$$

coordonata x_G este, din motive de simetrie,

$$x_G = \pi/2.$$

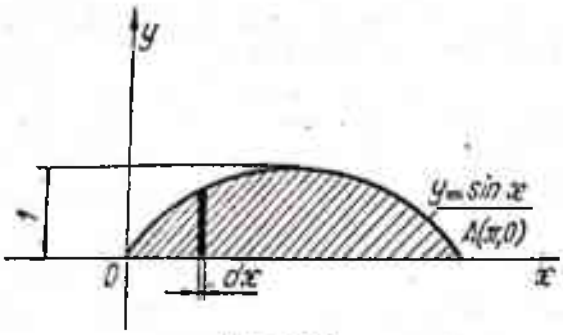


Fig. 4.22

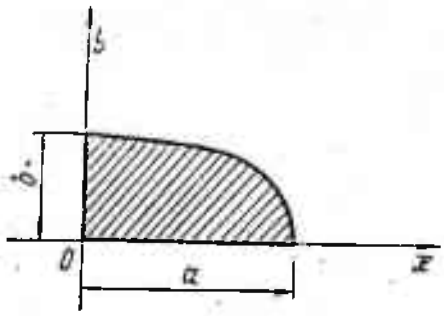


Fig. 4.23

4.23. Să se calculeze coordonatele centrului de masă pentru suprafața omogenă a unui sfert din elipsa (fig. 4.23).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Rezolvare. Se face schimbarea de variabile

$$x = ar\cos\theta, \qquad y = br\sin\theta.$$

Elementul de suprafață are expresia

$$\mathrm{d}A = abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

respectiv suprafața totală a sfertului de elipsă este

$$A = \iint \mathrm{d}A = ab\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi ab}{4}.$$

Momentele statice ale elementelor de suprafață față de axele Ox și Oy sînt

$$\iint x\,\mathrm{d}A = a^2b\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2b}{3}$$

și analog

$$\iint y\,\mathrm{d}A = \frac{ab^2}{3},$$

deci coordonatele centrului de masă vor fi

$$x_G = \frac{\iint x\,\mathrm{d}A}{\iint \mathrm{d}A} = \frac{a^2b}{3}\cdot\frac{4}{\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$y_G = \frac{\iint y\,\mathrm{d}A}{\iint \mathrm{d}A} = \frac{ab^2}{3}\cdot\frac{4}{\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.24. Să se calculeze h_1 și h_2, astfel încît plăcile omogene din figura 4.24, *a* și *b* să se găsească în echilibru indiferent pe un plan orizontal.

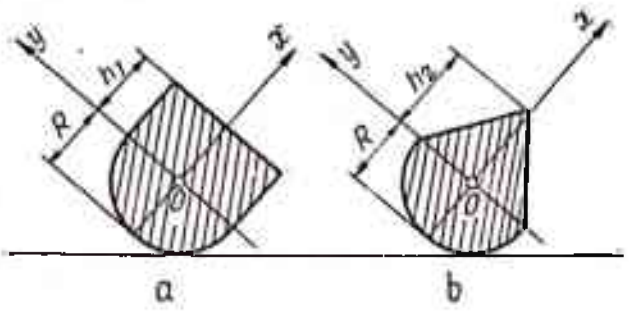


Fig. 4.24

Rezolvare. Pentru poziția de echilibru indiferent este necesar ca centrele de masă ale celor două figuri să se găsească în punctul O.

a) Axa Ox este axa de simetrie, deci $y_G = 0$. Din condiția de echilibru indiferent rezultă

$$x_G = 0,$$

adică

$$-A_1x_1 + A_2x_2 = 0,$$

unde am notat cu A_1 și A_2 ariile suprafețelor jumătății de cerc, respectiv a dreptunghiului. Înlocuind în formulă valorile acestor arii obținem relația

$$\frac{\pi R^2}{2}\,\frac{4R}{3\pi} = Rh_1^2,$$

din care rezultă pentru h_1 valoarea,

$$h_1 = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

b) Ca și în cazul a), axa Ox este axă de simetrie, deci $y_G = 0$. Condiția de echilibru indiferent conduce la relațiile

$$x_G = 0,$$

adică

$$-A_1x_1 + A_2x_2 = 0,$$

respectiv

$$\frac{\pi R^2}{2}\,\frac{4R}{3\pi} = \frac{Rh_2^2}{3},$$

de unde

$$h_2 = R\sqrt{2}.$$

4.25. Să se calculeze coordonatele centrului de masă ale unei plăci de forma unui trapez, omogen, cu bazele $\frac{b}{2}$, $\frac{B}{2}$ și înălțimea h (fig. 4.25), aplicînd teorema a doua a lui Guldin. Să se calculeze apoi aria totală a trunchiului de con rezultat prin rotația trapezului $ABCD$ în jurul axei Ox.

Rezolvare. Coordonata y_G a centrului de masă al trapezului $ABCD$ este, conform primei teoreme Guldin-Pappus

$$y_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{\pi h}{12}(B^2 + Bb + b^2)}{2\pi \cdot \frac{B+b}{4} \cdot h} = \frac{B^2 + Bb + b^2}{6(B+b)}.$$

Pentru calculul ariei totale a trunchiului de con rezultat prin rotația trapezului considerăm în calcule numai conturul $AB + BC + CD$. Aria căutată va fi

$$A = 2\pi y_G L = 2\pi[y_1 L_{AB} + y_2 L_{BC} + y_3 L_{CD}] =$$

$$= 2\pi\left[\frac{b^2}{8} + \frac{b+B}{4}\sqrt{h^2 + \left(\frac{B-b}{2}\right)^2} + \frac{B^2}{8}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[b^2 + 2(b+B)\sqrt{4h^2 + (B-b)^2} + B^2\right].$$

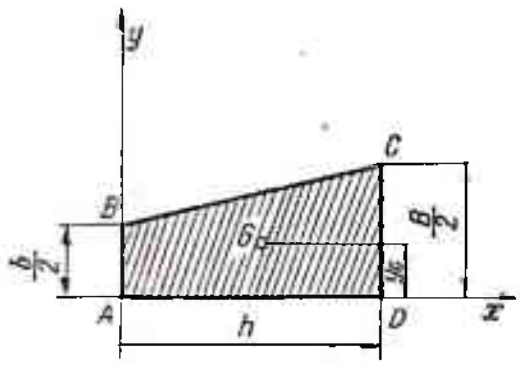


Fig. 4.25

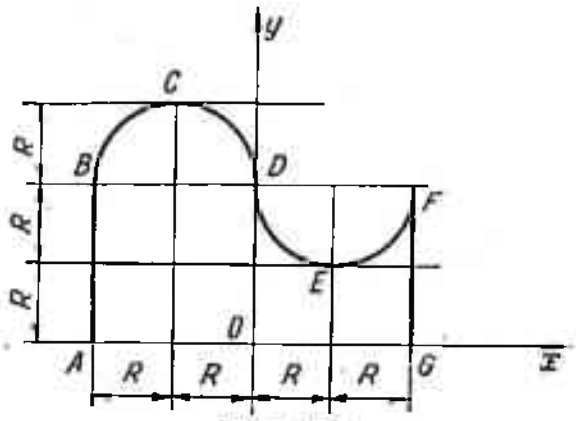


Fig. 4.26

4.26. Aplicînd teoremele lui Guldin, să se calculeze suprafața și volumul corpului generat de linia $ABCDEFG$ cînd aceasta se rotește în jurul axei Ox (fig. 4.26).

Rezolvare. Calculul suprafeței totale. Centrul de masă al liniei $ABCDEFG$ este

$$y_{G_1} = \frac{2 \cdot 2R \cdot R + \pi R\left(2R + \frac{2R}{\pi}\right) + \pi R\left(2R - \frac{2R}{\pi}\right)}{4R + 2R} = 2R\,\frac{\pi + 1}{\pi + 2}.$$

Aria suprafeței căutate, conform teoremei a doua Guldin-Pappus este

$$A = 2\pi y_{G_1} \cdot L = 2\pi \cdot 2R\,\frac{\pi+1}{\pi+2} \cdot 2(\pi R + 2R) = 8\pi R^2(\pi + 1).$$

Calculul volumului total. Centrul de masă al suprafeței cuprinse între linia $ABCDEFG$ și axa Ox are ordonata

$$y_{G_2} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}\left(2R + \frac{4R}{3\pi} - 2R + \frac{4R}{3\pi}\right) + 8R^2 \cdot R}{8R^2} = \frac{7}{6}R.$$

Volumul obținut prin rotația acestei suprafețe în jurul axei Ox este

$$V = 2\pi y_{G_1} \cdot S = 2\pi \cdot \frac{7}{6} R \cdot 8R^2 = \frac{56}{3} \pi R^3.$$

4.27. Aplicînd teoremele Guldin-Pappus să se calculeze suprafața și volumul conului circular drept.

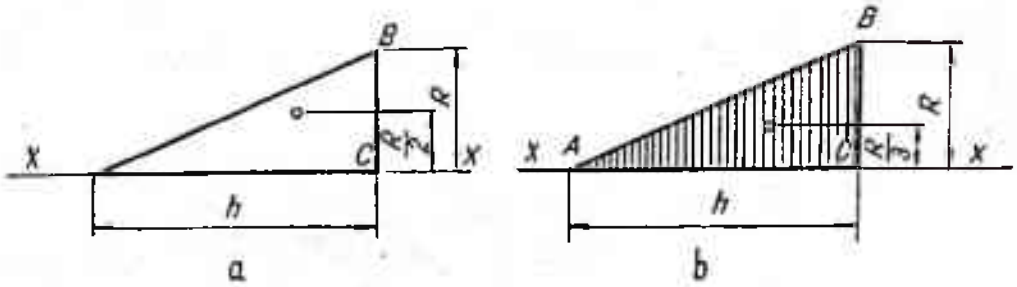


Fig. 4.27

Rezolvare. Conul se obține prin rotația liniei frînte ABC (fig. 4.27, *a*) în jurul axei $X - X$. Suprafața totală căutată este:

$$A = 2\pi y_G L_{ABC} = 2\pi \frac{R}{2} (\sqrt{h^2 + R^2} + R).$$

Volumul conului se obține (fig. 4.27, *b*)

$$V = 2\pi y_G S_{ABC} = 2\pi \frac{R}{3} \cdot \frac{Rh}{2} = \frac{\pi}{3} R^2 h.$$

4.28. Să se afle centrul de masă al volumului omogen rezultat prin scoaterea unui cub de latură a dintr-un cub de latură $2a$, ca în figura 4.28.

Rezolvare. Cubul de latură $2, a$ are volumul $V_1 = 8a^3$; coordonatele centrului său de masă sînt

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0.$$

Cubul de latură a are volumul

$$V_2 = a^3$$

și coordonatele centrului de masă

$$x_2 = y_2 = z_2 = \frac{a}{2}.$$

Coordonatele centrului de masă căutat vor fi

$$x_G = y_G = q_G = \frac{-\frac{a^4}{2}}{7a^3} = -\frac{a}{14}$$

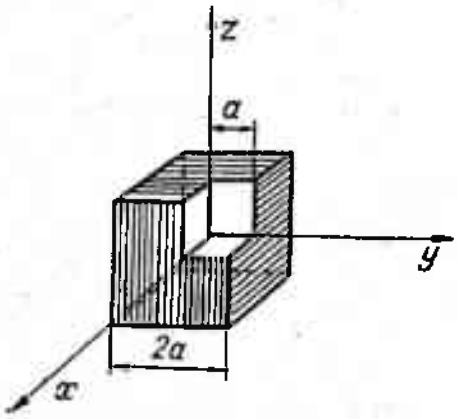


Fig. 4.28

4.29. Să se calculeze coordonatele centrului de masă ale unui sfert din sfera de rază R, cuprins între planele xOz şi yOz (fig. 4.29).

Rezolvare. Datorită simetriei figurii

$$z_G = 0 \quad \text{şi} \quad x_G = y_G = \frac{\iiint x\,dV}{V}.$$

Cu notaţiile din figură, elementul de volum dV devine

$$dV = \frac{\pi r^2}{4}\,dz = \frac{\pi}{4} R^2 \sin^2 \varphi\, dz,$$

iar abscisa centrului de masă al acestui element este

$$x = \frac{2}{3} r \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4R}{3\pi} \sin \varphi.$$

Cota z a elementului de volum fiind $z = R \cos \varphi$ ($dz = -R \sin \varphi\, d\varphi$), rezultă pentru volumul sfertului de sferă

$$V = \frac{1}{4}\,\frac{4}{3}\,\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{3}.$$

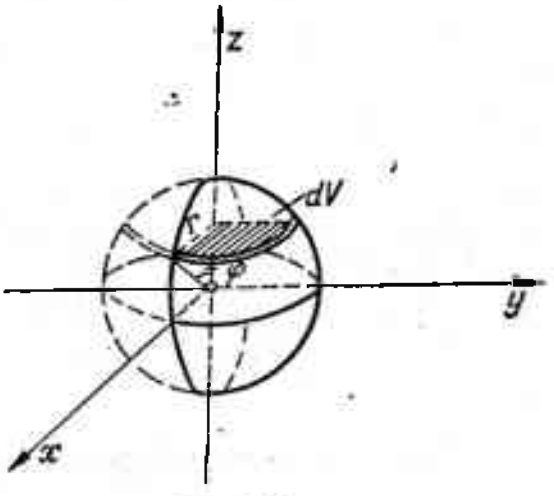


Fig. 4.29

Deci coordonatele centrului de masă au expresia ($x_G = y_G$)

$$x_G = \frac{+\frac{4R}{3\pi}\,\frac{\pi}{4}\,R^2 R \cdot \int_0^{\pi} \sin^4 \varphi\, d\varphi}{\frac{\pi R^3}{3}} = +\frac{2R}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi\, d\varphi =$$

$$= +\frac{2R}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi)^2\, d\varphi = +\frac{R}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= +\frac{R}{2\pi}\left| \varphi - \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R}{8}.$$

Pentru semisferă se obţine

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{3}{8} R, \quad z_G = 0.$$

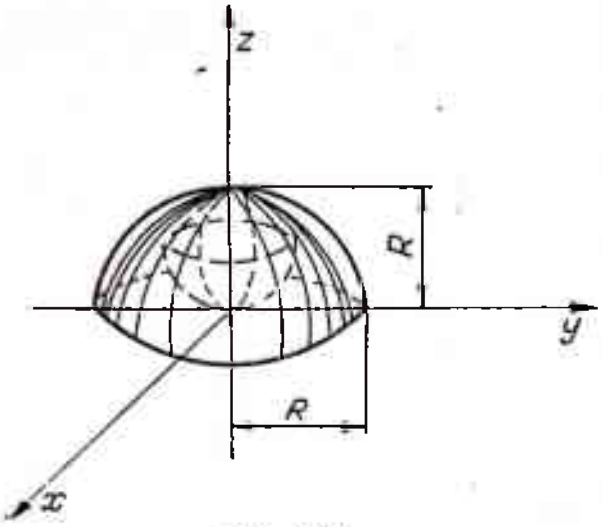


Fig. 4.30

4.30. Să se găsească poziția centrului de masă al volumului omogen rezultat din scoaterea sferei de rază $\frac{R}{2}$ din semisfera de rază R (fig. 4.30).

Rezolvare. Axa Oz fiind axă de simetrie,

$$x_G = y_G = 0.$$

Cota z_G a centrului de masă are expresia

$$z_G = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{3R}{8} - \frac{\pi}{6} R^3 \cdot \frac{R}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{R^3}{8}} = \frac{R}{3}.$$

4.31. Să se calculeze poziția centrului de masă al volumului omogen rezultat din extragerea sferei înscrise conului circular drept, de înălțime $h = R\sqrt{3}$ și rază R (fig. 4.31).

Rezolvare. Corpul avînd axa Oz ca axă de simetrie,

$$x_G = y_G = 0.$$

Cota z_G a centrului de masă are expresia

$$z_G = \frac{VZ - vz}{V - v},$$

unde s-a notat cu V volumul conului, v volumul sferei, Z cota centrului de masă al volumului conului întreg și z cota centrului de masă al sferei;

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}, \quad Z = \frac{R\sqrt{3}}{4} \quad v = -\frac{4}{3}\pi r^3, \quad z = r.$$

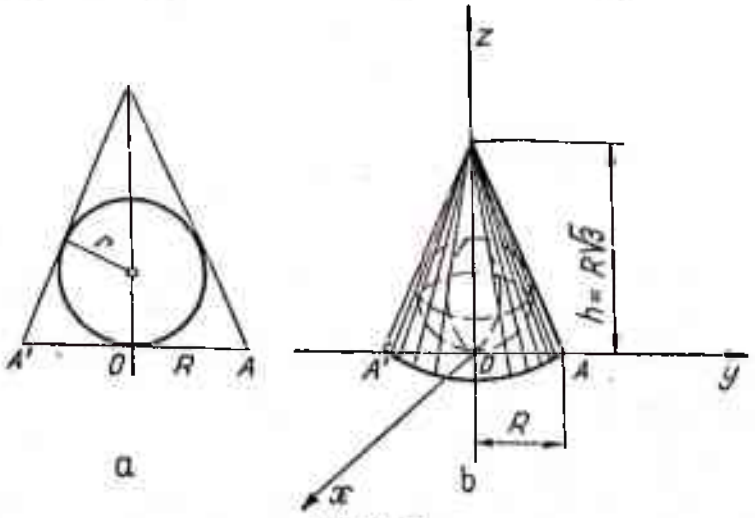


Fig. 4.31

Valoarea lui r se obține (fig. 4.31, a) observînd că

$$\frac{r}{R} = \frac{R\sqrt{3} - r}{2R},$$

de unde rezultă pentru r

$$r = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Cota z_G căutată este

$$z_G = \frac{\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{4} - \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{3\sqrt{3}}{3^3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3}}{\pi R^3\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{3}\frac{3\sqrt{3}}{3^3}\right)} = \frac{11\sqrt{3}}{60} R.$$

4.32. Să se calculeze coordonatele centrului de masă ale unei sfere neomogene compusă din două semisfere de densități ρ_1 și ρ_2 (fig. 4.32).

Rezolvare. Pentru semisfera de densitate ρ_1 masa totală este $M_1 = \frac{2}{3}\pi R^3\rho_1$, iar cota centrului de masă este $z_1 = \frac{3R}{8}$.

Pentru semisfera de densitate ρ_2 masa totală este $M_2 = \frac{2}{3}\pi R^3\rho_2$ și cota centrului de masă $z_2 = -\frac{3R}{8}$.

Axa Oz fiind axă de simetrie a corpului, cota z_G a centrului de masă este

$$z_G = \frac{\frac{3}{8}R \cdot \frac{2}{3}\pi R^3(\rho_1 - \rho_2)}{\frac{2\pi}{3}R^3(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{3}{8}R\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2},$$

iar

$$x_G = y_G = 0.$$

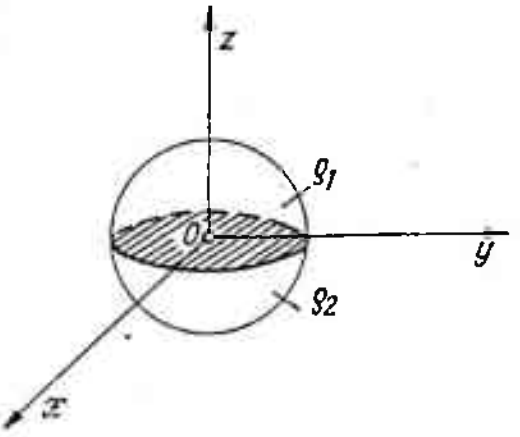


Fig. 4.32

Probleme propuse pentru rezolvare

4.33. Să se calculeze coordonatele centrului de masă pentru linia omogenă din figura 4.33. Să se determine a astfel încît centrul de masă să se găsească în planul $z = \frac{c}{2}$.

R. $x_G = y_G = 0$, $z_G = \frac{c^2 + 2bc}{2(a + b + c)}$.

Pentru $z_G = \frac{c}{2}$ rezultă $a = b$.

Scanned with OKEN Scanner

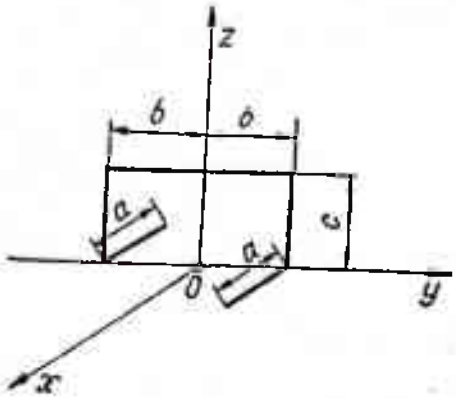


Fig. 4.33

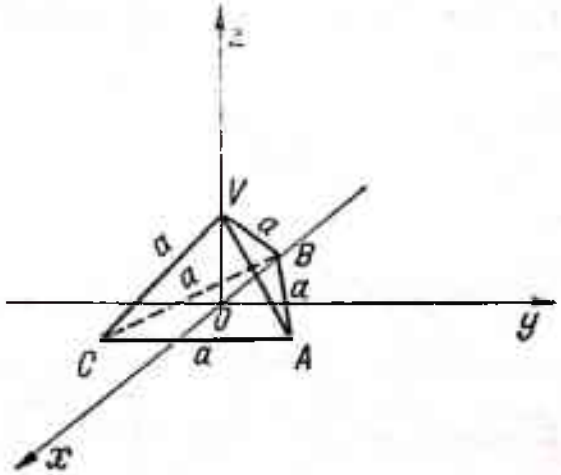


Fig. 4.34

4.34. Să se calculeze coordonatele centrului de masă pentru muchiile unui tetraedru regulat de latură a (fig. 4.34).

R. $x_G = y_G = 0,\ z_G = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4.35. Să se găsească raportul dintre densitatea liniei omogene $ACODB$ și cea a liniei AEB astfel încît centrul de masă al liniei neomogene din figura 4.35 să fie în punctul O.

R. ρ_1 fiind densitatea porțiunii $ACODB$ și $\rho_2 = k\rho_1$, rezultă $k = \frac{1}{2}$.

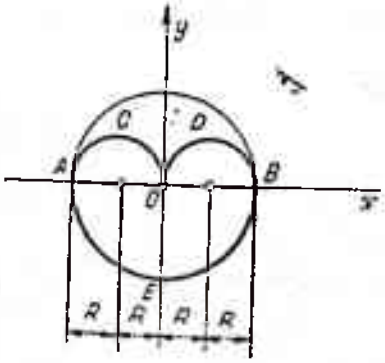


Fig. 4.35

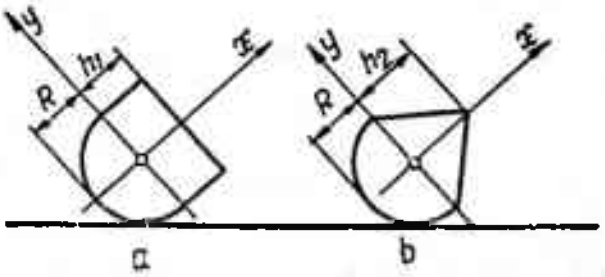


Fig. 4.36

4.36. Să se calculeze lungimile h_1 și h_2, astfel încît liniile omogene din fig. 4.36, a și b să stea în echilibru indiferent pe planul orizontal.

$$h_1 = R\sqrt{2};\ h_2 = R\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

4.37. Să se calculeze poziția centrului de masă al suprafeței omogene rezultate prin extragerea unui semicerc de rază R dintr-un sfert de cerc de rază $2R$ (fig. 4.37).

R. $x_G = R\,\frac{16-3\pi}{3\pi}$, $y_G = \frac{4R}{\pi}$.

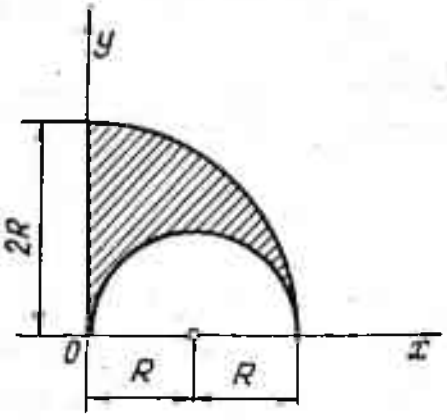


Fig. 4.37

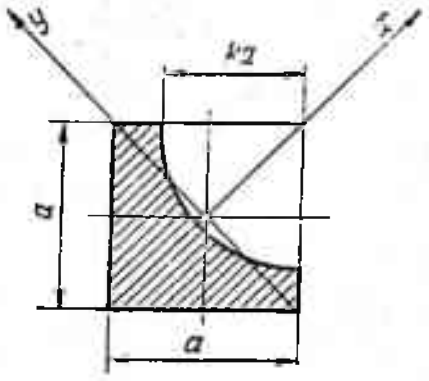


Fig. 4.38

4.38. Să se calculeze coordonatele centrului de masă pentru suprafața hașurată din fig. 4.38.

R. $x_G = -\dfrac{\frac{k^2\cdot\pi a\cdot\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{8k}{3\pi}\right)}{(4-k^2\pi)}$, $y_G = 0$.

O b s e r v a ț i e. Pentru $k = 0$, $x_G = 0$ și $y_G = 0$;

pentru $k = 1$, $x_G = -\dfrac{\pi a\cdot\sqrt{2}\left(1-\frac{8}{3\pi}\right)}{2(4-\pi)}$.

Deoarece $0 \leqslant k \leqslant 1$, $x_G \leqslant 0$.

4.39. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al suprafeței omogene hașurate din figura 4.39.

R. $x_G = \dfrac{3R}{2(3\cdot\sqrt{3}-\pi)}$, $y_G = \dfrac{\frac{R}{24}(4\pi-3\cdot\sqrt{3}-8)}{\frac{2}{24}(3\cdot\sqrt{3}-\pi)}$.

(Vezi problema 4.19.)

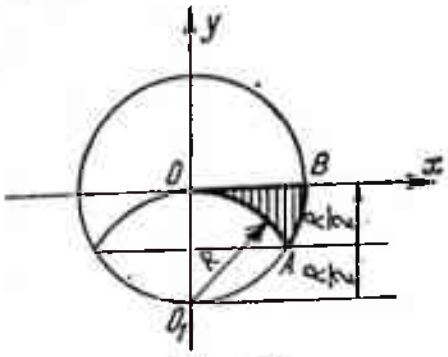


Fig. 4.39

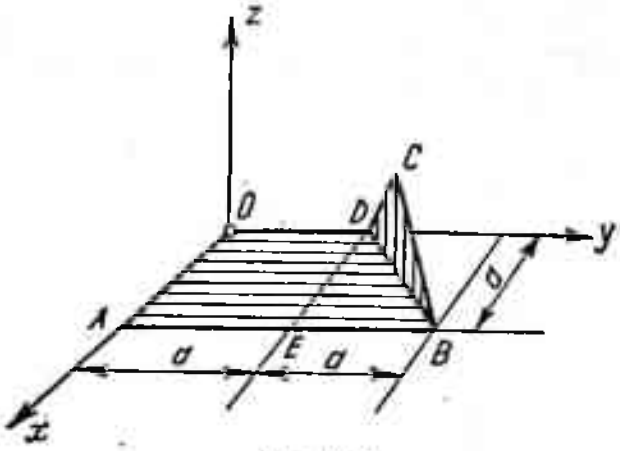


Fig. 4.40

4.40. O placă omogenă dreptunghiulară $OACB$ este îndoită după direcția BD, formînd un unghi diedru drept. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al plăcii astfel formate (fig. 4.40).

R. $x_G = \frac{13a}{24}$, $y_G = \frac{23a}{24}$, $z_G = \frac{a\sqrt{2}}{24}$.

4.41. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al suprafeței mărginite de cosinusoidă și de axa Ox în intervalul $(0, \pi/2)$, (fig. 4.41).

R. $x_G = \frac{\pi - 2}{2}$, $y_G = \frac{\pi}{8}$.

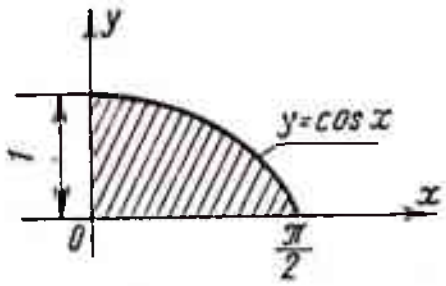


Fig. 4.41

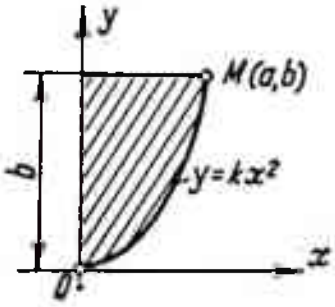


Fig. 4.42

4.42. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al suprafeței omogene a unei jumătăți de parabolă de ecuație $y = kx^2$ cuprinsă între axa Oy și dreapta $y = b$ (fig. 4.42)

R. $y_G = \frac{3}{5} b$, $x_G = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{b}{k}}$.

4.43. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al suprafeței cuprinse între parabola $y = kx^2$ și dreapta $y = kx$ (fig. 4.43).

R. Elementele de suprafață considerate în calcul sînt

$$dA_2 = \Delta x\, dy = \left(\frac{-y}{k} + \sqrt{\frac{y}{k}}\right) dy$$

și

$$dA_1 = \Delta y\, dy = (kx - kx^2)\, dx,$$

iar coordonatele centrului de masă căutat

$$x_G = \frac{1}{2}, \quad y_G = \frac{6k}{15}.$$

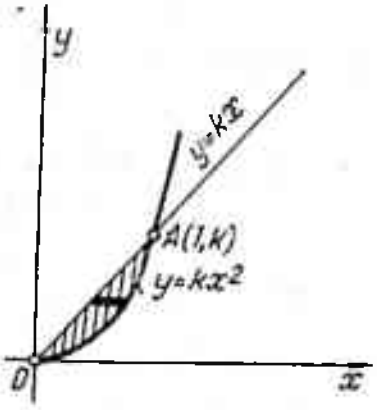


Fig. 4.43

4.44. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al unei optimi din elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (fig. 4.44).

R. $x_G = \frac{3a}{8}, \quad y_G = \frac{3b}{8}, \quad z_G = \frac{3c}{8}.$

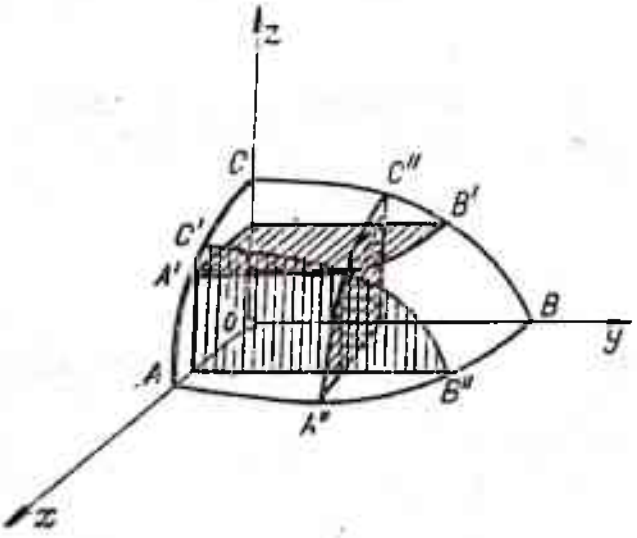


Fig. 4.44

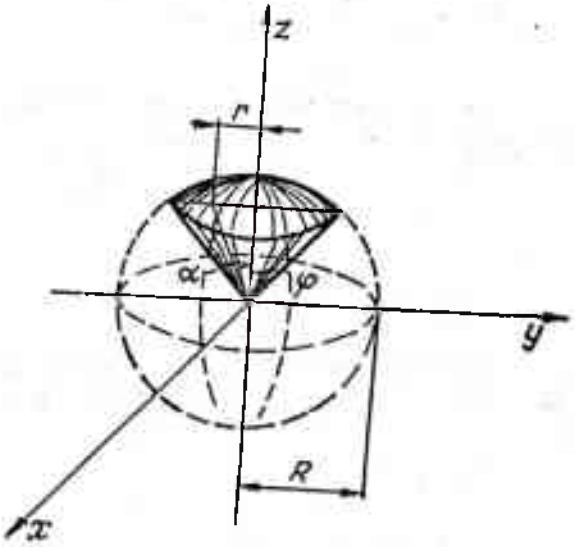


Fig. 4.45

4.45. Să se calculeze poziția centrului de masă al unei calote sferice și al sectorului de sferă corespunzător (fig. 4.45).

R. Pentru calota sferică: $z_G = \frac{3}{4} R \frac{\sin^2\varphi(1 + \cos^2\varphi)}{2 - 3\cos\varphi + \cos^3\varphi}.$

Pentru sectorul de sferă: $z_G = \frac{3R\sin^2\varphi(1 + 2\cos^2\varphi)}{8(1 - \cos\varphi)}.$

Scanned with OKEN Scanner

4.46. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al ariei suprafeței mărginite de cardioida $r = 2a(1 + \cos\theta)$.

R. $x_G = \frac{11}{6} a$, $y_G = 0$.

4.47. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al unui sfert de astroidă $x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}$. Să se calculeze și pentru aria unui sfert de astroidă situat în cadranul întîi.

R. a) $x_G = y_G = \frac{2}{5} r$; G este situat pe bisectoarea axelor de coordonate la distanța $OG = \frac{2}{5} 2r$;

b) Coordonatele centrului de masă al ariei unui sfert de astroidă situat în cadranul întîi: $x_G = y_G = \frac{256}{315} \frac{r}{\pi}$.

4.48. Să se calculeze coordonatele centrului de masă ale ariei suprafeței mărginite de parabola semicubică $ay^2 = x^3$ și de dreapta $x = b$.

R. $x_G = \frac{5}{7} b$; $y_G = 0$.

4.49. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al arcului de cicloidă generat prin rostogolirea fără alunecare pe dreapta OX a cercului de rază r.

R. $x_G = \pi r$;

$y_G = \frac{4}{3} r$.

4.50. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al ariei limitate de axa Ox și arcul unei cicloide.

R. $x_G = \pi r$,

$y_G = \frac{5}{6} r$.

4.51. Să se calculeze volumul solidului obținut prin rotația suprafeței cuprinse între parabola semicubică $ay^2 = x^3$, axa Ox și dreapta $x = a$,

1) în jurul axei Ox R: $V_x = \frac{1}{4} \pi a^3$;

2) în jurul axei Oy R: $V_y = \frac{3}{7} \pi a^3$.

Scanned with OKEN Scanner

V. STATICA SOLIDULUI RIGID

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este stabilirea condiţiilor de echilibru ale solidului rigid cu legături fără frecare şi cu frecare.

Formule fundamentale. Pentru ca un sistem de forţe care acţionează asupra unui solid rigid liber să fie în echilibru este necesar şi suficient ca într-un punct arbitrar din spaţiu rezultanta sistemului de forţe şi momentul rezultant faţă de punctul respectiv să fie egale cu zero

$$\bar{R} = 0, \qquad \bar{M}_o = 0,$$

În cazul solidului rigid supus la legături geometrice, în virtutea axiomei legăturilor, în baza căreia orice legătură geometrică poate fi înlocuită cu o forţă de legătură corespunzătoare (reacţiune), condiţiile de echilibru devin

$$\bar{R} + \bar{\mathcal{R}} = 0. \qquad \bar{M}_o + \bar{\mathcal{M}}_o = 0,$$

unde $(\bar{R}, \bar{M}_o)$ este torsorul forţelor exterioare, iar $(\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}}_o)$ este torsorul forţelor de legătură.

Tipuri de legături. *Reazemul simplu* (fig. V.1) obligă un punct al solidului să se găsească pe o suprafaţă; legătura suprimă solidului rigid un

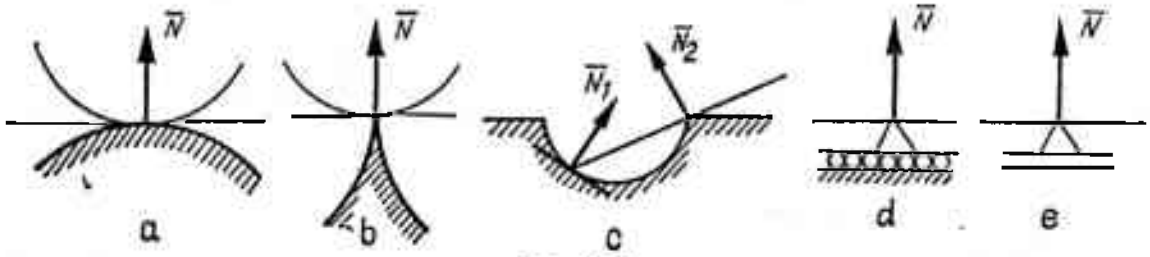


Fig. V.1

grad de libertate. În virtutea axiomei legăturilor, reazemul simplu poate fi înlocuit cu o reacţiune normală pe suprafaţa de rezemare.

Articulaţia (fig. V.2) obligă rigidul de a avea un punct fix.

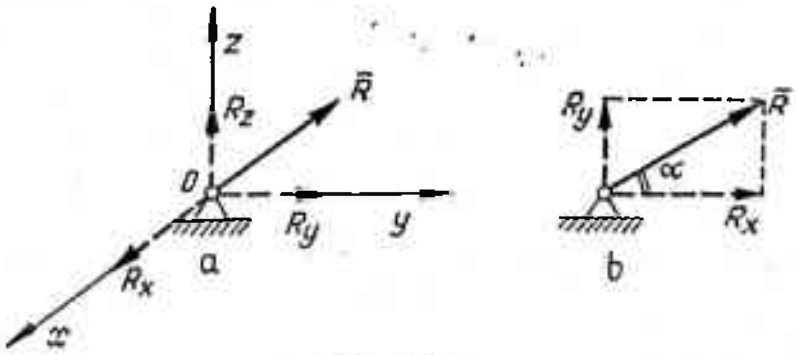


Fig. V.2

Articulaţia sferică suprimă unui solid rigid trei grade de libertate şi poate fi înlocuită cu o reacţiune de direcţie necunoscută. În acest caz, reprezentînd reacţiunea $\bar{R}$ din articulaţie prin componentele sale R_x, R_y, R_z pe axele de coordonate ale triedrului cartezian $Oxyz$, avem relaţiile

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(R, \bar{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(R, \bar{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(R, \bar{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

Articulaţia cilindrică suprimă unui solid rigid două grade de libertate şi poate fi înlocuită cu o reacţiune al cărui suport este situat în planul forţelor şi a cărui direcţie este necunoscută. În acest caz, reprezentarea analitică a reacţiunii $\bar{R}$ se face utilizînd componentele sale R_x şi R_y

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}.$$

Încastrarea (fig. V.3, *a*) suprimă corpului toate gradele sale de libertate. Ea introduce şase necunoscute scalare în cazul sistemelor de forţe oarecare (în spaţiu) şi trei necunoscute scalare în cazul unui sistem de forţe plane (fig. V.3, *b*).

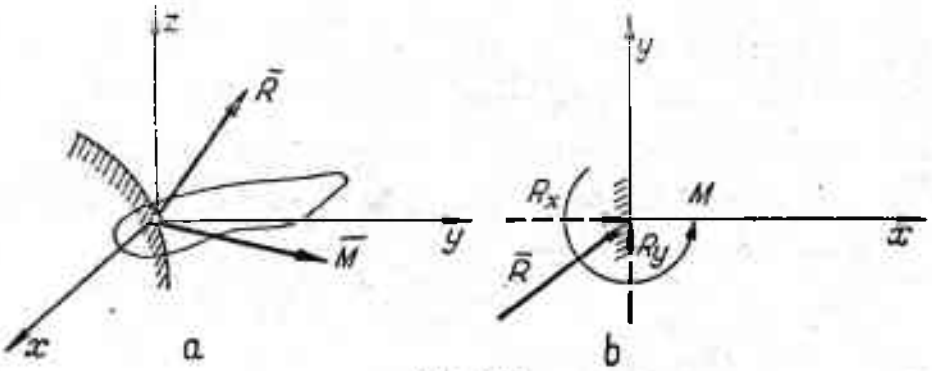


Fig. V.3

Reacţiunea $\bar{R}$ şi cuplul de moment $\bar{M}$ se reprezintă prin proiecţiile lor pe axe R_x, R_y, R_z şi M_x, M_y, M_z:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

În plan, reacţiunea din încastrare se exprimă prin cele două proiecţii pe axe şi cuplul prin valoarea momentului său M

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

În cazul legăturilor cu frecare, apar la contactul dintre corpuri următoarele reacţiuni (fig. V.4):

— forţa de frecare de alunecare $\bar{T}$, situată în planul tangent la contact, dirijată în sens contrar mişcării sau tendinţei de mişcare, de valoare variabilă

$$0 \leqslant T \leqslant fN,$$

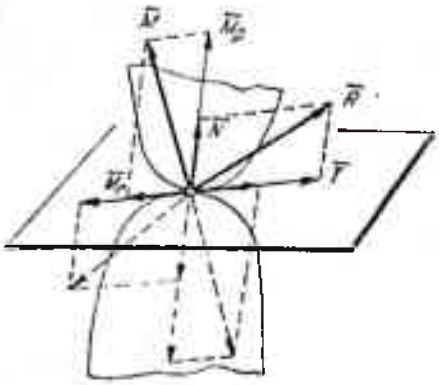


Fig. V.4

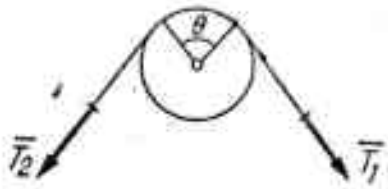


Fig. V.5

unde f este coeficientul de frecare la alunecare;

— reacţiunea normală pe planul tangent comun $\overline{N}$;

— cuplul de frecare la rostogolire, avînd momentul $\overline{M}_r$, opus sensului mişcării sau tendinţei de mişcare de rostogolire, de valoare variabilă.

$$0 \leqslant M_r \leqslant sN,$$

s fiind coeficientul de frecare la rostogolire;

— cuplul de frecare de pivot, avînd momentul $\overline{M}_p$ opus mişcării de pivotare sau tendinţei de mişcare de pivotare

$$0 \leqslant M_p \leqslant M_1.$$

$\overline{M}_1$ se determină experimental de la caz la caz.

În afara acestor forţe de legătură, mai apar în articulaţii cupluri de frecare de moment M_f, opuse mişcării de rotaţie sau tendinţei de mişcare de rotaţie

$$0 \leqslant M_f \leqslant f'Nr,$$

f' fiind coeficientul de frecare în articulaţie, N reacţiunea totală pe axă şi r raza axei.

În cazul alunecării unor fire pe un tambur fix (fig. V.5), condiţia de echilibru este

$$e^{-f\theta} \leqslant \frac{T_1}{T_2} \leqslant e^{f\theta},$$

T_1 şi T_2 fiind tensiunile în fire, θ unghiul la centru (exprimat în radiani), f coeficientul de frecare de alunecare între fir şi tambur şi e baza logaritmilor naturali.

În cazul repausului, frecările sînt nedeterminate, valorile lor numerice putînd varia de la zero la valoarea maximă.

Probleme rezolvate

5.1. Bara cotită ABC, care formează un unghi de 60° (fig. 5.1), este suspendată într-un plan vertical de capătul A cu ajutorul unui fir. Bara este omogenă şi satisface relaţia $BC = 2\,AB$. Să se determine unghiul dintre porţiunea $\overline{BC}$ şi planul orizontal pentru poziţia de echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. În poziția de echilibru, tensiunea din fir $\bar{T}$ și greutatea barei cotite $\bar{G}$ trebuie să se găsească pe același suport. Există deci relația

$$x_G = x_A.$$

Considerînd $BC = 2l$ și $AB = l$, abscisele punctelor A, B și G sînt următoarele

$$x_B = 2l \cos \alpha$$

$$x_G = \frac{\Sigma x_i l_i}{\Sigma l_i} = \frac{2l \cdot l \cos \alpha + l\left[2l \cos \alpha - \frac{l}{2} \cos (60° - \alpha)\right]}{3l} = \frac{15l \cos \alpha - l\sqrt{3} \sin \alpha}{12}$$

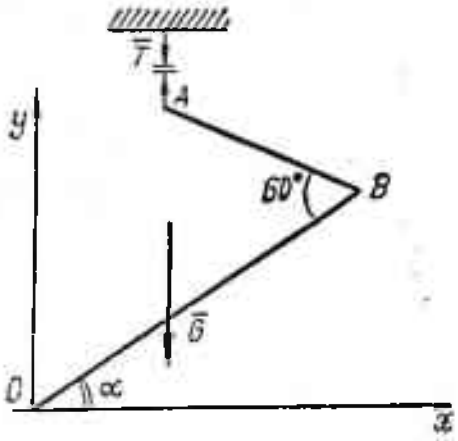


Fig. 5.1

$$x_A = 2l \cos \alpha - l \cos (60° - \alpha) =$$

$$= l\left[2 \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right],$$

deci

$$\frac{15l \cos \alpha - l\sqrt{3} \sin \alpha}{12} = l\left[\frac{3}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right].$$

Rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}\sqrt{3}.$$

5.2. O bară de lungime $2l$ și greutate $\bar{G}$ se reazemă fără frecare pe un colț de masă C și pe un perete vertical A (fig. 5.2). Se cer reacțiunile din punctele A și C și unghiul φ dintre bară și peretele vertical pentru poziția de echilibru.

Rezolvare. Condiția de echilibru a barei este dată de ecuațiile

$$\bar{N}_A + \bar{N}_C + \bar{G} = 0 \text{ și } \bar{M}_A(\bar{N}_A) + \bar{M}_A(\bar{N}_C) + \bar{M}_A(\bar{G}) = 0,$$

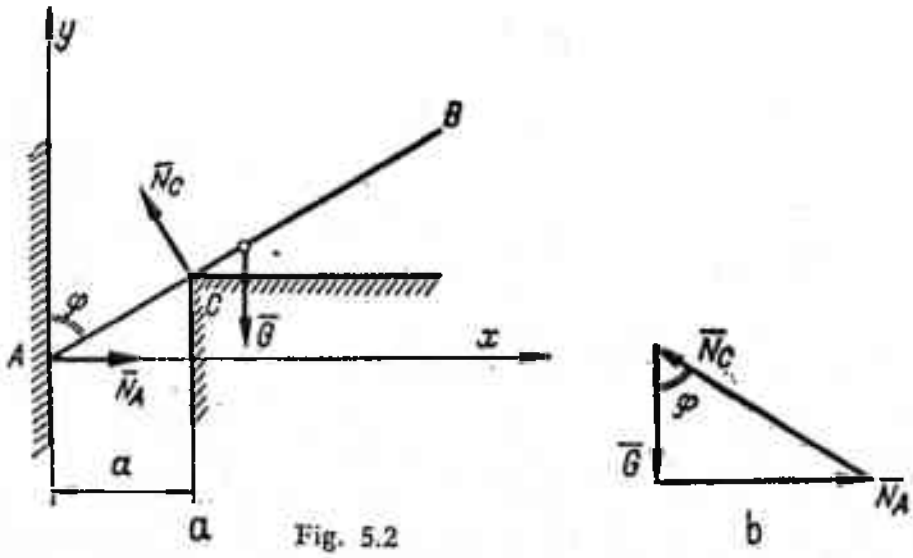


Fig. 5.2

respectiv

$$\Sigma X_i = N_A - N_C \cos \varphi = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_C \sin \varphi - G = 0$$

$$\Sigma M_{A_i} = N_C \frac{a}{\sin \varphi} - Gl \sin \varphi = 0.$$

Din ultima ecuație obținem

$$N_C = \frac{Gl \sin^2 \varphi}{a}$$

și introducînd în a doua, rezultă pentru determinarea lui φ, ecuația

$$\frac{Gl \sin^3 \varphi}{a} - G = 0,$$

de unde

$$\sin \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Pentru ca echilibrul barei să fie posibil, trebuie ca

$$\sin \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{l}} \leqslant 1.$$

Rezultă condiția $a < l$, deci centrul de greutate al barei trebuie să fie în dreapta punctului de rezemare C. Utilizînd expresia lui $\sin \varphi$ se obțin pentru reacțiuni valorile

$$N_C = \frac{Gl \sin^2 \varphi}{a} = \frac{Gl}{a} \sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}} = G \sqrt[3]{\frac{l}{a}}$$

$$N_A = N_C \cos \varphi = G \sqrt[3]{\frac{l}{a}} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^{2/3}}.$$

O b s e r v a ț i e. Pentru ca sistemul de trei forțe care acționează asupra barei să fie în echilibru trebuie ca aceste forțe să fie concurente, iar poligonul lor să fie un poligon închis (fig. 5.2, *a* și *b*).

5.3. Într-un vas semisferic neted, de rază $OC = r$, este așezată o bară AB de lungime $2l$ și greutate $\bar{P}$ (fig. 5.3). Să se determine unghiul φ și reacțiunile din punctele A și C pentru echilibru. Să se discute rezultatele.

R e z o l v a r e. Condiția de echilibru a barei este dată de ecuațiile

$$\bar{N}_A + \bar{N}_C + \bar{P} = 0, \quad \bar{M}_A(\bar{P}) + \bar{M}_A(\bar{N}_C) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

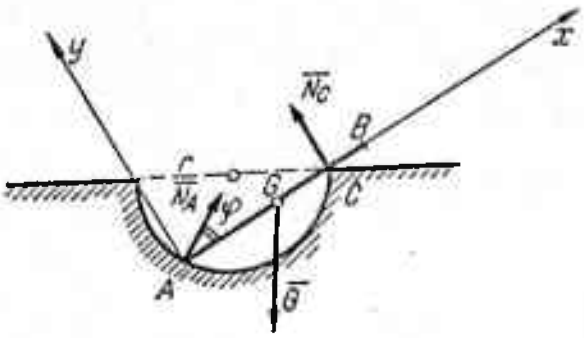


Fig. 5.3

respectiv ecuațiile scalare

$$\Sigma X_i = N_A \cos\varphi - P \sin\varphi = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_A \sin\varphi + N_C - P\cos\varphi = 0.$$

$$\Sigma M_{A_i} = N_C \cdot 2r\cos\varphi - Pl\cos\varphi = 0.$$

Din ultima ecuație rezultă

$$N_C = \frac{Pl}{2r},$$

iar din prima

$$N_A = P \operatorname{tg}\varphi.$$

Introducînd expresiile lui N_C și N_A în ecuația a doua obținem relația

$$P \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi + \frac{Pl}{2r} - P\cos\varphi = 0,$$

respectiv

$$2r(1-\cos^2\varphi) + l\cos\varphi - \cos^2\varphi \cdot 2r = 0$$

sau

$$4r\cos^2\varphi - l\cos\varphi - 2r = 0.$$

Soluția problemei este

$$\cos\varphi = \frac{l \pm \sqrt{l^2+32r^2}}{8r};$$

deoarece $\cos\varphi > 0$, se va păstra doar soluția

$$\varphi = \arccos\frac{l+\sqrt{l^2+32r^2}}{8r},$$

Dar $\cos\varphi \leqslant 1$, adică

$$\frac{l+\sqrt{l^2+32r^2}}{8r} \leqslant 1$$

$$l^2 + 32r^2 \leqslant 64r^2 + l^2 - 16lr,$$

respectiv

$$l \leqslant 2r.$$

Pentru ca echilibrul să fie posibil trebuie ca centrul de greutate al barei să fie la stînga punctului de rezemare C.

5.4. Bara AB, de lungime $2l$ și greutate $\overline{G}$, se reazemă cu extremitatea A pe o suprafață orizontală, iar în punctul C pe un vîrf ascuțit ($AC = a$; fig. 5.4, *a*). Să se determine mărimea forței orizontale $\overline{F}$, aplicată în punctul A, care menține bara în echilibru sub un unghi α dat și valoarea reacțiunilor din punctele A și C.

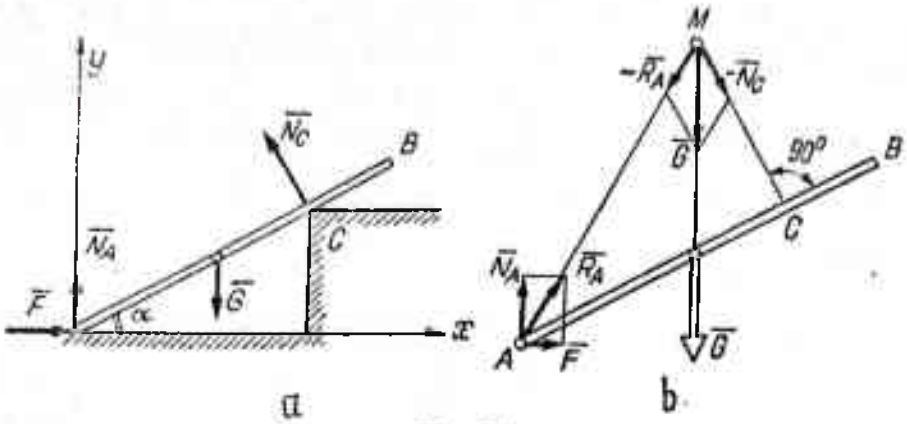


Fig. 5.4

Rezolvare. Soluția analitică. Condiția de echilibru a barei se exprimă prin ecuațiile

$$\bar{F} + \bar{N}_A + \bar{G} + \bar{N}_C = 0, \quad \bar{M}_A(\bar{G}) + \bar{M}_A(\bar{N}_C) = 0$$

sau scalar,

$$\Sigma X_i = -N_C \sin\alpha + F = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_C \cos\alpha + N_A - G = 0$$

$$\Sigma M_{A_i} = N_C \cdot a - Gl\cos\alpha = 0.$$

Din ultima ecuație rezultă

$$N_C = \frac{Gl\cos\alpha}{a}.$$

Utilizînd această expresie și prima ecuație de proiecție obținem

$$F = \frac{Gl\sin 2\alpha}{2a}.$$

Din a doua ecuație de proiecții

$$N_A = G - \frac{Gl\cos^2\alpha}{a} = G\left(1 - \frac{l}{a}\cos^2\alpha\right).$$

Soluția grafică. Se deplasează forța $\bar{G}$ pe suportul ei pînă cînd intersectează normala la bară în punctul C (direcția reacțiunii din C), obținîndu-se punctul M (fig. 5.4, *b*).

Se descompune forța $\bar{G}$ după direcțiile MC și MA și se obțin reacțiunile $\bar{N}_C$ și $\bar{R}_A$ cu semn schimbat. Se schimbă semnele și se deplasează aceste forțe pe suportul lor pînă în punctele A și C.

Forța $\bar{R}_A$, care acționează în punctul A, poate fi descompusă după verticală și orizontală, obținîndu-se reacțiunea normală $\bar{N}_A$ și forța $\bar{F}$.

5.5. O placă pătrată $ABCD$, de latură a și greutate $\overline{P}$ este atîrnată de firul BE și se sprijină cu vîrful A pe un perete neted vertical (fig. 5.5). Știind că $AB = BE$ să se determine reacțiunea peretelui în punctul A, tensiunea $\overline{T}$ a firului și unghiul φ pentru poziția de echilibru.

Rezolvare. Soluția analitică. Ecuațiile scalare de echilibru ale plăcii sînt

$$\Sigma X_i = N_A - T \sin \varphi = 0$$

$$\Sigma Y_i = -P + T \cos \varphi = 0$$

$$\Sigma M_{A_i} = -P \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha + T \cdot 2a \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

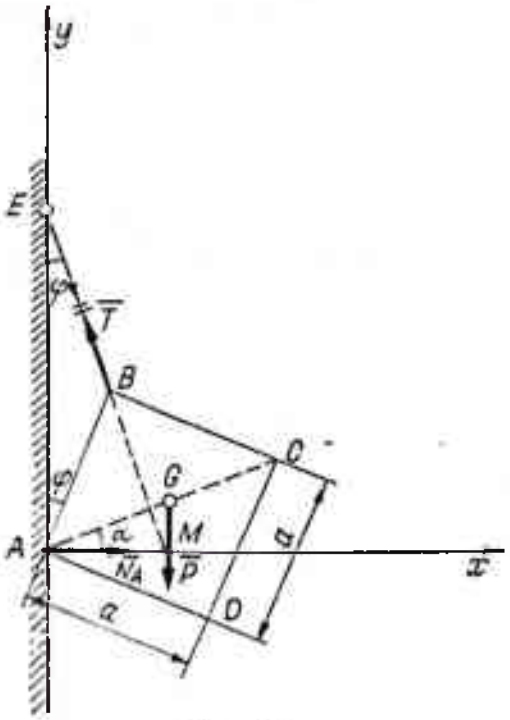


Fig. 5.5

Din a doua ecuație obținem $T = \dfrac{P}{\cos \varphi}$ și introducînd în a treia rezultă

$$2aP \sin \varphi - P \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \alpha = 0$$

Dar

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \varphi,$$

deci

$$4 \sin \varphi - \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0$$

sau

$$3 \sin \varphi - \cos \varphi = 0,$$

adică

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}.$$

Rezultă, pentru tensiunea din fir și reacțiunea din punctul A, valorile

$$T = \frac{P}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{P\sqrt{10}}{3}$$

$$N_A = T \sin \varphi = P \operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{3}.$$

Soluția geometrică. Pentru ca sistemul de forțe care acționează asupra plăcii să fie în echilibru trebuie ca direcțiile celor trei forțe să fie concurente în M. În triunghiul AMG avem

$$AM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

iar în triunghiul AME

$$AM = AE \operatorname{tg} \varphi = 2a \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi,$$

deci

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 2a \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi$$

sau

$$\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi\right] = 4 \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi.$$

Împărțind cu $\cos \varphi$ se obține

$$1 + \operatorname{tg} \varphi = 4 \operatorname{tg} \varphi,$$

adică

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}.$$

5.6. O bară omogenă AB, de lungime $2l$ și greutate $\bar{P}$, se reazemă în punctele A și B pe două plane fixe netede, care formează între ele unghiul α. Bara se reazemă pe planul orizontal sub unghiul β, iar pentru a se menține în echilibru este legată de punctul C de intersecție al planelor cu firul DC care formează cu orizontala unghiul γ (fig. 5.6). Se cere tensiunea T a firului și reacțiunile din punctele A și B. Să se discute rezultatele.

Rezolvare. Între elementele geometrice din figură există relațiile

$$AA' = 2l \sin \beta,$$

$$A'C = 2l \sin \beta \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$BC = 2l \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$BB' = 2l \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \sin \gamma.$$

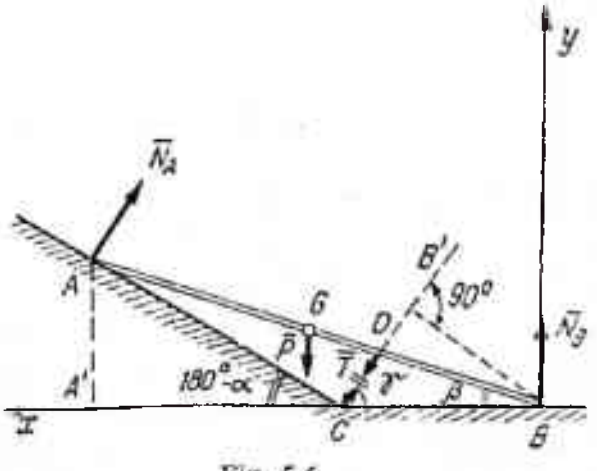


Fig. 5.6

Ecuațiile scalare de echilibru ale barei sînt

$$\Sigma X_i = N_A \sin(\pi - \alpha) - T \cos\gamma = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_A \cos(\pi - \alpha) - T \sin\gamma - P + N_B = 0.$$

$$\Sigma M_{B_i} = -N_A \cos(\pi - \alpha) \cdot 2l \cos\beta - N_A \sin(\pi - \alpha) \cdot 2l \sin\beta +$$

$$+ Pl \cos\beta + T \cdot 2l \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha} \sin\gamma = 0.$$

Din prima ecuație rezultă

$$N_A = \frac{T \cos\gamma}{\sin\alpha}$$

valoare care, introdusă în a treia ecuație, duce la

$$2\cos(\alpha + \beta)\, T \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} + P\cos\beta + 2T \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha} \sin\gamma = 0,$$

de unde

$$T = -\frac{P \cos\beta \sin\alpha}{2\cos(\alpha + \beta - \gamma)}.$$

Prin urmare,

$$N_A = -\frac{P \cos\beta \cos\gamma}{2\cos(\alpha + \beta - \gamma)}$$

$$N_B = P\left[1 - \frac{\cos\beta \cos(\alpha - \gamma)}{2\cos(\alpha + \beta - \gamma)}\right].$$

Pentru ca echilibrul să fie posibil trebuie ca

$$T > 0, \quad N_A > 0, \quad N_B > 0.$$

Discuție.

a) $T > 0$ duce la condiția:

$$\cos(\alpha + \beta - \gamma) < 0, \text{ deci } \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + \beta - \gamma \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

b) $N_B > 0$ duce la condiția:

$$\cos\beta \cos(\alpha - \gamma) \leqslant 2\cos(\alpha + \beta - \gamma).$$

Dezvoltînd

$$\cos\beta \cos\alpha \cos\gamma + \cos\beta \sin\alpha \sin\gamma \leqslant 2\cos(\alpha + \beta)\cos\gamma + 2\sin(\alpha + \beta)\sin\gamma$$

$$\operatorname{tg}\gamma \leqslant \frac{2\sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta}{2\sin\beta \cos\alpha + \sin\alpha \cos\beta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.7. Un disc de rază r şi greutate $\bar{G}$ este prins în barele AB, CD şi EF, situate în acelaşi plan cu el şi articulate la ambele capete (fig. 5.7). Să se determine reacţiunile din bare pentru ca discul să fie în echilibru. Aplicaţie numerică pentru datele din figură.

Rezolvare. Condiţiile de echilibru scalar al discului se exprimă prin ecuaţiile

$$\Sigma X_i = -P_3 \cos\alpha + P_1 = 0$$

$$\Sigma Y_i = P_3 \sin\alpha + P_2 - G = 0$$

$$\Sigma M_{O_i} = -P_2 r + P_3 r \cos\alpha = 0.$$

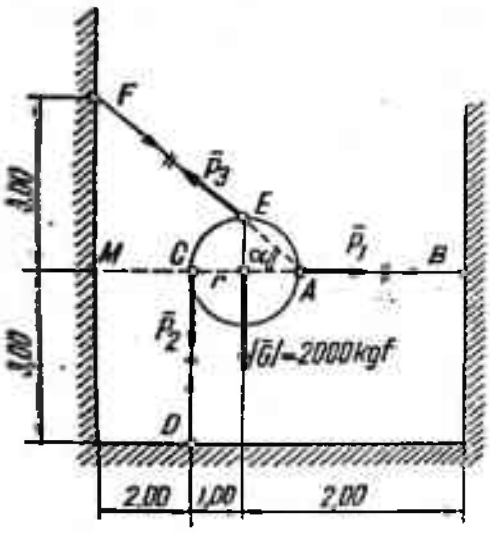


Fig. 5.7

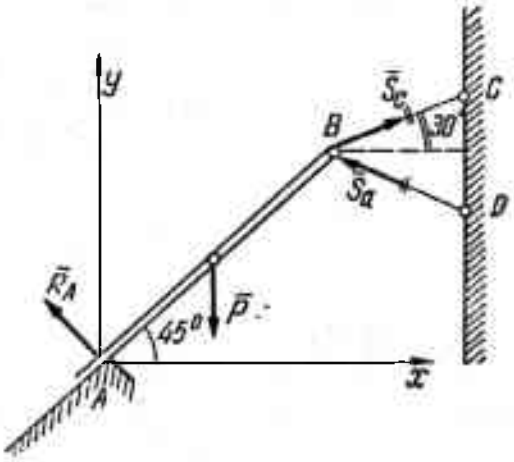


Fig. 5.8

Cu datele din figură rezultă următoarele valori

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$P_3 = \frac{G}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{2\,000 \cdot 5}{7} \approx 1\,430 \text{ kgf}$$

$$P_1 = P_2 = \frac{G\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{2\,000 \cdot 5}{7} \cdot \frac{4}{5} \approx 1\,140 \text{ kgf}.$$

5.8. O bară AB de greutate $\bar{P}$ este simplu rezemată în A şi menţinută într-o poziţie formînd un unghi de 45° cu orizontala prin două bare BC şi BD (fig. 5.8). Triunghiul BCD este un triunghi echilateral. Neglijînd greutatea barelor BC şi BD şi considerînd punctele B, C şi D ca articulaţii să se determine reacţiunea reazemului A şi eforturile din bare.

Rezolvare. Condiția de echilibru a barei AB este dată de ecuațiile vectoriale

$$\bar{R}_A + \bar{P} + \bar{S}_C + \bar{S}_D = 0$$
$$\bar{M}_B(\bar{R}_A) + \bar{M}_B(\bar{P}) + \bar{M}_B(\bar{S}_C) + \bar{M}_B(\bar{S}_D) = 0,$$

respectiv de ecuațiile scalare

$$\Sigma X_i = -R_A\frac{\sqrt{2}}{2} + (S_C - S_D)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Sigma Y_i = R_A\frac{\sqrt{2}}{2} - P + S_C\cdot\frac{1}{2} + S_D\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$\Sigma M_{B_i} = -R_A\cdot 2l - Pl\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0\cdot$$

Din ultima ecuație rezultă

$$R_A = \frac{P\sqrt{2}}{4},$$

care, introdusă în primele două, dă următorul sistem de ecuații

$$-\frac{P}{2} + (S_C - S_D)\sqrt{3} = 0$$

$$-\frac{3P}{2} + S_C + S_D = 0$$

cu soluțiile

$$S_C = \frac{P(1+3\sqrt{3})}{4\sqrt{3}}$$

$$S_D = -\frac{P(1-3\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} = +\frac{P(3\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{3}}.$$

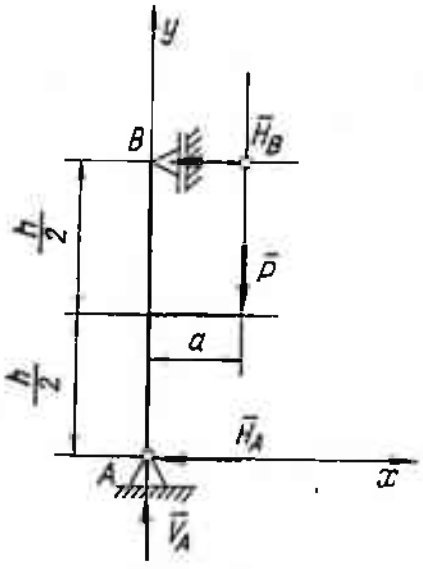


Fig. 5.9

5.9. Să se determine reacțiunile din reazemele stîlpului din figura 5.9, articulat în A și simplu rezemat în B. Stîlpul este încărcat cu o sarcină transversală uniform distribuită pe toată lungimea de p N/m și are o consolă de lungime a la jumătatea înălțimii, iar la capătul consolei acționează o forță P.

Rezolvare. Soluția analitică. Din ecuațiile scalare de echilibru

$$\Sigma X_i = ph - H_A - H_B = 0$$
$$\Sigma Y_i = V_A - P = 0$$
$$\Sigma M_{i_A} = -Pa - \frac{ph^2}{2} + H_B h = 0,$$

rezultă mărimea reacţiunilor

$$V_A = P, \quad H_B = P\frac{a}{h} + \frac{ph}{2}, \quad H_A = \frac{ph}{2} - P\frac{a}{h}.$$

Soluţia grafică. Pentru ca sistemul celor trei forţe care acţionează asupra barei să fie în echilibru trebuie ca direcţiile lor să fie concurente. Direcţia forţei $\bar{P}_1$ intersectează direcţia reacţiunii din B în punctul M. Se uneşte M cu A, se descompune $\bar{P}_1$ după cele două direcţii, se schimbă sensul acestor componente şi se obţin reacţiunile din A şi B. ($\bar{P}_1 = \bar{P} + ph\bar{i}$)

5.10. Să se determine reacţiunile din reazemele grinzii ABC, înclinată cu unghiul α faţă de orizontală, articulată în A şi simplu rezemată în B (fig. 5.10). Grinda este încărcată cu două sarcini egale P — una verticală acţionînd în punctul C şi alta orizontală acţionînd la jumătatea deschiderii AB.

Rezolvare. Sistemul de ecuaţii scalare de echilibru este

$$\Sigma X_i = -H_A + P - N_B \sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_A + N_B \cos\alpha - P = 0$$

$$\Sigma M_{i_A} = -P\frac{l}{2}\sin\alpha + lN_B - P(l+a)\cos\alpha = 0.$$

Rezultă soluţia problemei sub forma

$$N_B = P\left[\frac{\sin\alpha}{2} + \left(1 + \frac{a}{l}\right)\cos\alpha\right]$$

$$H_A = P\left[1 - \frac{\sin^2\alpha}{2} - \left(1 + \frac{a}{l}\right)\frac{\sin^2\alpha}{2}\right]$$

$$V_A = P\left[1 - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \left(1 + \frac{a}{l}\right)\cos^2\alpha\right].$$

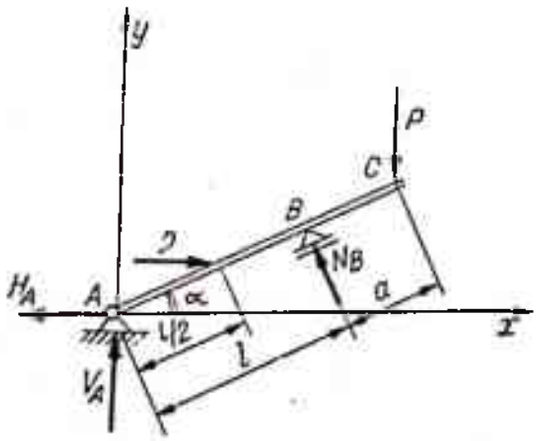


Fig. 5.10

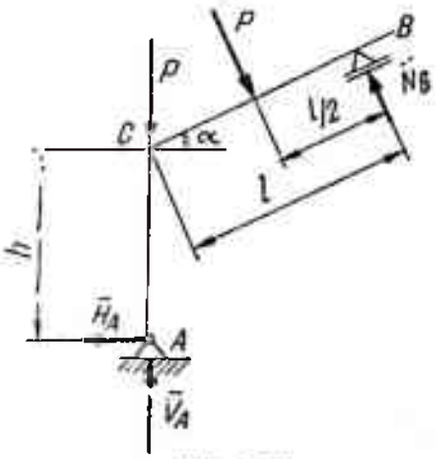


Fig. 5.11

5.11. Să se determine reacţiunile din punctele A şi B ale barei cotite din figura 5.11. Bara este încărcată în punctul C cu o sarcină P verticală, iar la jumătatea distanţei CB este acţionată de o forţă P normală pe ea.

Rezolvare. Ecuațiile scalare de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = -H_A + P\sin\alpha - N_B\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_A - P - P\cos\alpha + N_B\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma M_{iA} = -P\sin\alpha\left(h + \frac{l}{2}\sin\alpha\right) - P\cos^2\alpha\cdot\frac{l}{2} + N_B l\cos^2\alpha +$$

$$+ N_B\sin\alpha(h + l\sin\alpha) = 0.$$

Efectuînd calculele, rezultă pentru reacțiuni valorile

$$N_B = P\frac{l + 2h\sin\alpha}{2(l + h\sin\alpha)}$$

$$H_A = P\sin\alpha - P\sin\alpha\cdot\frac{l + 2h\sin\alpha}{2(l + h\sin\alpha)} = \frac{Pl\sin\alpha}{2(l + h\sin\alpha)}$$

$$V_A = P\left[1 + \cos\alpha - \frac{l\cos\alpha + 2h\sin\alpha\cos\alpha}{2(l + h\sin\alpha)}\right] = P\left[1 + \frac{l\cos\alpha}{2(l + h\sin\alpha)}\right].$$

5.12. O bară OA, de greutate $\bar{G}$, este articulată în O și are capătul A prins cu un cablu AB care trece peste scripetele B, situat pe aceeași verticală cu articulația O, la distanța $OB = OA = l$ (fig. 5.12, *a*). Cablul are prinsă la capăt o greutate $\bar{F}$. Cum variază mărimea forței $\bar{F}$ și reacțiunea din articulația O în funcție de unghiul α format de bară cu orizontala?

Rezolvare. Ecuațiile scalare de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = -H_0 + F\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Sigma Y_i = +V_0 + F\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - G = 0$$

$$\Sigma M_{O_i} = G\frac{l}{2}\cos\alpha - F\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)l = 0;$$

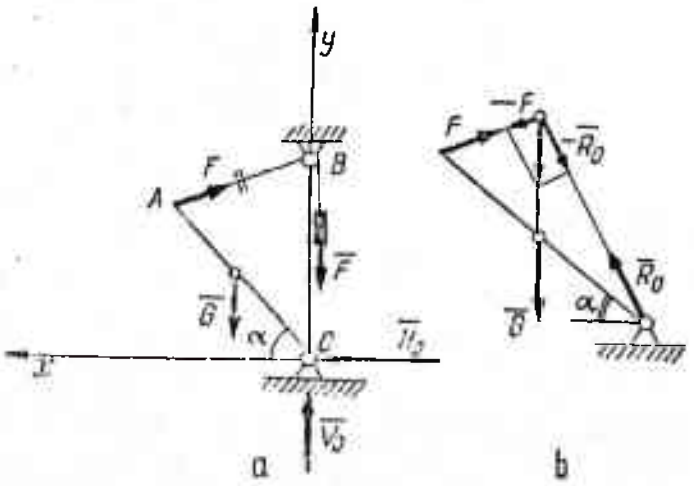


Fig. 5.12

ele admit soluția

$$F = \frac{G \cos\alpha}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}, \quad V_O = G\left[1 - \frac{\cos\alpha}{2}\right] \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$H_O = \frac{G \cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Dacă $\alpha = 0$,

$$F = \frac{G}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \text{ are valoarea maximă,}$$

$$V_O = G\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{G}{2}, \quad H_O = \frac{1}{2} G.$$

Dacă

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad F = 0, \quad V_O = G, \quad H_O = 0.$$

Soluția grafică (fig. 5.12, *b*). Se intersectează direcția lui $\bar{G}$ cu cea a firului. Se unește punctul de intersecție cu articulația O și se descompune forța $\bar{G}$ după cele două direcții.

Se schimbă semnul componentelor și se obțin astfel tensiunea din fir și reacțiunea din O.

Valoarea maximă pentru F se obține cînd bara OA este în poziție orizontală, iar $F = 0$ cînd bara ajunge în poziție verticală.

Mărimea reacțiunii din O crește o dată cu creșterea unghiului α.

5.13. O bară AB, de lungime $2l$ și greutate $\bar{G}$, reazemă fără frecare pe un perete vertical luciu și pe o curbă (C) (fig. 5.13). Să se determine ecuația curbei (C), astfel încît bara să se găsească în echilibru în orice poziție.

Rezolvare. Bara AB este acționată de trei forțe. Pentru echilibru, direcțiile celor trei forțe trebuie să fie concurente.

Ordonata centrului de masă este

$$y_G = \frac{l}{\sin\alpha} \cdot \sin(90 - \gamma - \alpha) = l \sin\gamma$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca echilibrul să fie indiferent, y_G trebuie să fie constant

$$y_G = l \sin\gamma = \frac{\frac{l}{2}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4}}} = l\frac{y'}{\sqrt{4+y'^2}} = Cx$$

$$\frac{l\frac{dy}{dx}}{\sqrt{4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = Cx,$$

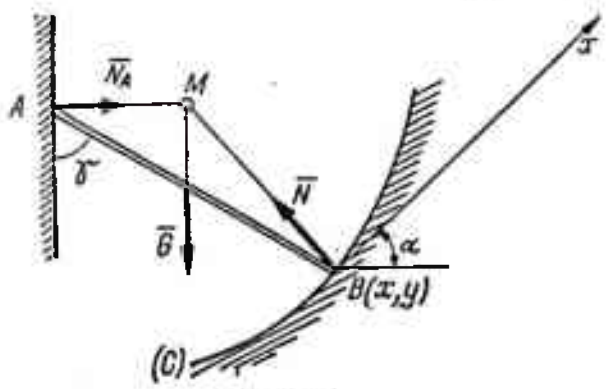


Fig. 5.13

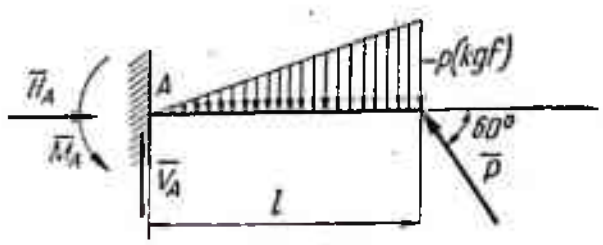


Fig. 5.14

de unde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Cx}{\sqrt{l^2 - C^2x^2}}$$

sau

$$\frac{dy}{2} = \frac{Cx\,dx}{\sqrt{l^2 - C^2x^2}}.$$

Prin integrare se obține ca soluție ecuația unei elipse.

$$C\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{(2l)^2} = 0.$$

5.14. Să se determine reacțiunile din încastrarea A a consolei AB din figura 5.14, acționată de o sarcină distribuită liniar de p N/m și de o forță P — înclinată cu 60° față de orizontală.

Rezolvare. Ecuațiile scalare de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = H_A - P\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_A - \frac{pl}{2} + P\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$\Sigma M_{A_i} = M_A - \frac{pl^2}{3} + Pl\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Reacțiunile au valorile

$$H_A = \frac{P}{2},$$

$$V_A = \frac{pl}{2} - \frac{P\sqrt{3}}{2},$$

$$M_A = \frac{pl^2}{3} - Pl\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

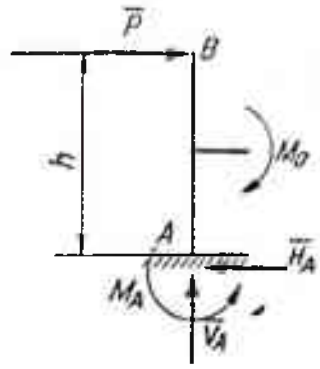


Fig. 5.15

5.15. Să se determine reacțiunile din încastrarea stîlpului AB cu consolă din fig. 5.15, supus acțiunii forței orizontale $\overline{P}$ în capătul B și acțiunii momentului $\overline{M}_O$ în capătul consolei.

Rezolvare. Ecuațiile scalare de echilibru ale stîlpului sînt

$$\Sigma X_i = P - H_A = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_A = 0$$

$$\Sigma M_{A_i} = M_A - M_O - Ph = 0$$

și admit soluțiile

$$H_A = P, \quad V_A = 0, \quad M_A = M_O + Ph.$$

5.16. Un stîlp OD, încastrat în O, susține o grindă orizontală AB prin intermediul firelor AC și BD (fig. 5.16). Grinda este acționată de o forță $\overline{P}$. În ce poziție trebuie să se găsească forța $\overline{P}$ pe grindă astfel încît sistemul să fie în echilibru? Să se determine mărimea momentului din încastrarea O.

Rezolvare. Echilibrul barei AB se exprimă prin ecuațiile vectoriale

$$\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \overline{P} = 0$$

$$\overline{M}_i(\overline{T}_1) + \overline{M}_i(\overline{T}_2) + M_i(\overline{P}) = 0,$$

ceea ce revine la scrierea ecuațiilor scalare

$$\Sigma X_i = T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0$$

$$\Sigma Y_i = T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta - P = 0$$

$$\Sigma M_{A_i} = -Px + T_1 \sin\beta \cdot L_{AB} = 0.$$

Din primele două ecuații obținem mărimea tensiunilor din fire

$$T_1 = \frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad T_2 = \frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Poziția forței concentrate $\overline{P}$ este dată de a treia ecuație

$$x = \frac{T_1 \sin\beta \cdot L_{AB}}{P} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} L_{AB}.$$

Scanned with OKEN Scanner

O b s e r v a ţ i e. Pentru echilibrul barei AB, direcţiile celor trei forţe $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ şi $\bar{P}$ trebuie să fie concurente. Se obţine în acest fel poziţia lui $\bar{P}$ pe grindă.

Momentul din încastrare va fi dat de ecuaţia de echilibru pentru stîlpul OD

$$\Sigma M_O = 0.$$

Dar $\Sigma M_O = M_O + T_1 \cos\alpha \cdot (h - l) - T_2 \cos\beta \cdot h = 0$, în care s-a notat cu h înălţimea stîlpului OD. Rezultă

$$M_O = T_2 \cos\beta \cdot h - T_1 \cos\alpha \cdot (h - l) = \frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\, h \cdot \cos\beta - (h - l)\cos\alpha \times$$

$$\times \frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = l\,\frac{P\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

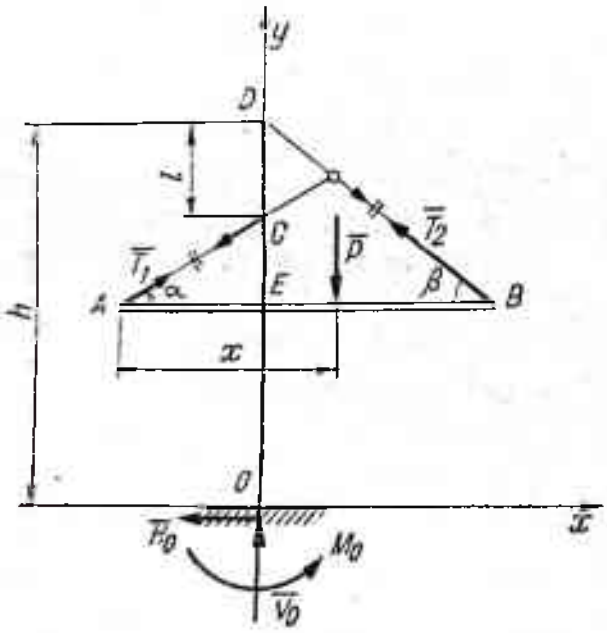


Fig. 5.16

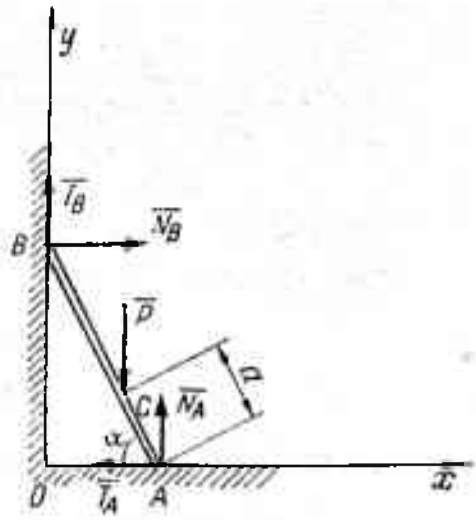


Fig. 5.17

5.17. O scară AB de lungime l şi greutate neglijabilă se sprijină cu un capăt A pe un plan orizontal şi cu capătul B pe un plan vertical. Pe scară în punctul C, se găseşte un om de greutate $\bar{P}$ (fig. 5.17). Cunoscînd coeficienţii de frecare f_1 şi f_2 în punctele A şi B să se determine valorile unghiului α de înclinare a scării, în funcţie de distanţa $AC = a$, pentru echilibru.

R e z o l v a r e. Echilibrul barei AB se exprimă prin ecuaţiile vectoriale

$$\Sigma \bar{F}_i = \bar{T}_B + \bar{N}_B + \bar{T}_A + \bar{N}_A + \bar{P} = 0$$

$$\Sigma \bar{M}_i = \bar{M}_O(\bar{T}_B) + \bar{M}_O(\bar{T}_A) + \bar{M}_O(\bar{N}_A) + \bar{M}_O(\bar{N}_B) + \bar{M}_O(\bar{P}) = 0.,$$

cărora le corespund ecuațiile scalare

$$\Sigma X_i = N_B - T_A = 0$$

$$\Sigma Y_i = T_B - P + N_A = 0$$

$$\Sigma M_{O_i} = -N_B \cdot l \sin\alpha + N_A \cdot l \cos\alpha - P(l-a)\cos\alpha = 0$$

și

$$T_A \leqslant f_1 N_A, \quad T_B \leqslant f_2 N_B.$$

În poziția limită de echilibru

$$T_A = f_1 N_A, \quad T_B = f_2 N_B.$$

Înlocuind aceste expresii în prima ecuație scalară, obținem

$$N_B - f_1 N_A = 0, \text{ de unde } N_B = f_1 N_A$$

și apoi din a treia ecuație scalară

$$f_1 N_A l \sin\alpha + P(l-a)\cos\alpha - N_A l \cos\alpha = 0,$$

deci

$$N_A = \frac{P(l-a)\cos\alpha}{l(\cos\alpha - f_1 \sin\alpha)}$$

și

$$N_B = \frac{f_1 P(l-a)\cos\alpha}{l(\cos\alpha - f_1 \sin\alpha)},$$

iar

$$T_B = P - N_A = \frac{Pl\cos\alpha - Pf_1 l \sin\alpha - Pl\cos\alpha + Pa\cos\alpha}{l(\cos\alpha - f_1\sin\alpha)} = \frac{P(a\cos\alpha - f_1 l \sin\alpha)}{l(\cos\alpha - f_1\sin\alpha)}.$$

Dar $T_B = f_2 N_B$, deci obținem pentru α relația

$$\frac{P(a\cos\alpha - f_1 l\sin\alpha)}{l(\cos\alpha - f_1\sin\alpha)} = f_2 \frac{f_1 P(l-a)\cos\alpha}{l(\cos\alpha - f_1\sin\alpha)},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a(1+f_1 f_2)}{f_1 l} - f_2.$$

Condiția de echilibru este deci

$$\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{a}{l}\,\frac{1+f_1 f_2}{f_1} - f_2.$$

Pentru ca scara să rămînă în echilibru la orice poziţie a omului de pe ea vom considera cazul cel mai dezavantajos: $a = l$; în acest caz

$$\operatorname{tg} \alpha \geqslant \frac{1}{f_1}.$$

5.18. O bară omogenă, de greutate $\overline{P}$, se sprijină cu capătul inferior pe un plan orizontal aspru şi este menţinută în echilibru cu ajutorul unui fir legat cu o extremitate la capătul superior şi trecut peste un scripete ideal fix, la cealaltă extremitate a sa fiind atîrnată o greutate $\overline{Q}$ oarecare (fig. 5.18, *a*). Se cere valoarea maximă a greutăţii $\overline{Q}$, cunoscînd coeficientul de frecare f al barei pe plan, unghiul α dintre bară şi orizontală şi greutatea $\overline{P}$ a barei.

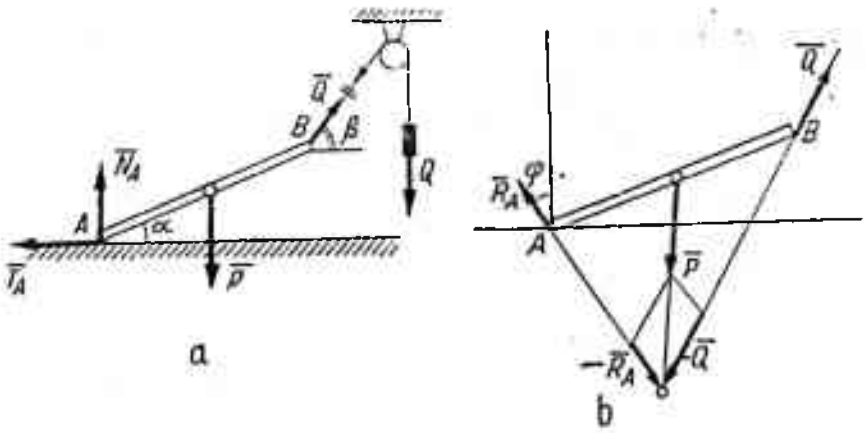


Fig. 5.18

Rezolvare. Condiţia vectorială de echilibru este

$$\Sigma \overline{F}_i = \overline{N}_A + \overline{T}_A + \overline{P} + \overline{Q} = 0$$

$$\Sigma \overline{M}_{A_i} = \overline{M}_A(\overline{N}_A) + \overline{M}_A(\overline{T}_A) + \overline{M}_A(\overline{P}) + \overline{M}_A(\overline{Q}) = 0$$

sau, proiectînd pe axele de coordonate,

$$\Sigma X_i = -T_A + Q \cos \beta = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_A - P + Q \sin \beta = 0$$

$$\Sigma M_{A_i} = -P \frac{l}{2} \cos \alpha + Q \sin \beta \cdot l \cos \alpha - Q \cos \beta \cdot l \sin \alpha = 0,$$

la care se adaugă condiţia

$$T_A \leqslant f N_A.$$

Din primele două ecuații de proiecții se obține

$$T_A = Q\cos\beta, \quad N_A = P - Q\sin\beta.$$

Înlocuind în inegalitate, la limită rezultă

$$Q\cos\beta = f(P - Q\sin\beta)$$

respectiv

$$Q = \frac{fP}{\cos\beta + f\sin\beta}.$$

Introducînd valoarea lui Q în ecuația de moment obținem relația

$$\cos\alpha = 2f\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 2f\sin\alpha - f\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

respectiv

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\alpha + 2f\sin\alpha}{f\cos\alpha} = \frac{1}{f} + 2\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{f} + 2\operatorname{tg}\alpha\right)^2}}.$$

Înlocuind în expresia lui Q valoarea β găsită rezultă

$$Q = \frac{fP\sqrt{\frac{f^2 + (1 + 2f\operatorname{tg}\alpha)^2}{f^2}}}{2(1 + f\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{P\sqrt{f^2 + (1 + 2f\operatorname{tg}\alpha)^2}}{2(1 + f\operatorname{tg}\alpha)}.$$

O b s e r v a ț i e. Pentru $f = 0$, $Q = \frac{P}{2}$.

Rezolvare grafică (fig. 5.18, *b*). Tendința de deplasare a capătului A al barei este spre dreapta. Cunoscînd unghiul de frecare maximă $\operatorname{tg}\varphi = f$, se trasează direcția reacțiunii maxime din A. Bara AB este acționată de trei forțe care, pentru a forma un sistem echivalent cu zero, trebuie să fie concurente. Se intersectează direcția reacțiunii din A cu suportul greutății $\bar{P}$ și se unește punctul de intersecție cu B.

Se descompune greutatea $\bar{P}$ după cele două direcții. Se schimbă semnul componentelor și se obține reacțiunea din A și forța maximă $\bar{Q}$ în poziția de echilibru.

5.19. O platformă orizontală DC, de greutate $\bar{G}$, se sprijină cu frecare, prin intermediul unui stîlp DE, pe două reazeme simple A și B (fig. 5.19). Cunoscînd coeficientul de frecare f din reazemele A și B, precum și poziția centrului de greutate comun al platformei și al stîlpului, să se determine pozițiile în care poate fi așezată o greutate $\bar{P}$ pe platformă, astfel încît aceasta să rămînă în echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Forțele fiind coplanare se pot scrie trei ecuații de echilibru și două inegalități de frecare

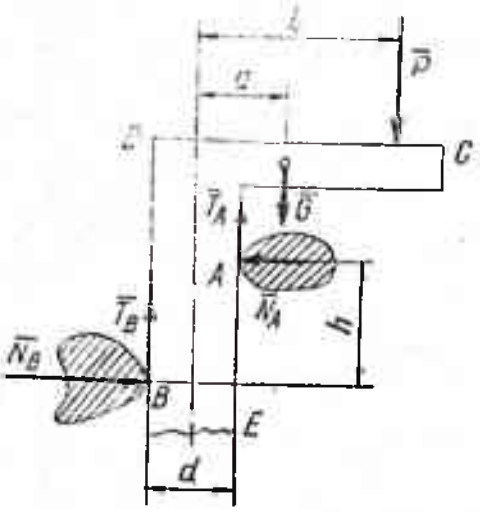


Fig. 5.19

$$\Sigma M_{A_i} = P\left(b - \frac{d}{2}\right) + G\left(a - \frac{d}{2}\right) - N_B h + T_B d = 0$$

$$\Sigma M_{B_i} = P\left(b + \frac{d}{2}\right) + G\left(a + \frac{d}{2}\right) - N_A h - T_A d = 0$$

$$\Sigma X_i = N_B - N_A = 0$$

$$T_A \leqslant f N_A$$

$$T_B \leqslant f N_B.$$

Din a doua și a patra relație se obține

$$N_A \geqslant \frac{P\left(b + \frac{d}{2}\right) + G\left(a + \frac{d}{2}\right)}{h + fd},$$

iar din prima și a cincea

$$N_B \geqslant \frac{P\left(b - \frac{d}{2}\right) + G\left(a - \frac{d}{2}\right)}{h - fd}.$$

Utilizînd și ecuația a treia se obține condiția de echilibru

$$b \geqslant \frac{h}{2f} + \frac{G}{P}\left(\frac{h}{2f} - a\right).$$

5.20. Un paralelipiped dreptunghic omogen $ABCD$, de greutate P, se sprijină cu fața AB pe un plan înclinat aspru MN, al cărui unghi cu orizontala crește mereu (fig. 5.20). Care va fi valoarea unghiului α în poziția limită de echilibru, cunoscînd valoarea coeficientului de frecare la alunecare f?

Rezolvare. Pentru echilibrul paralelipipedului trebuie să existe relațiile

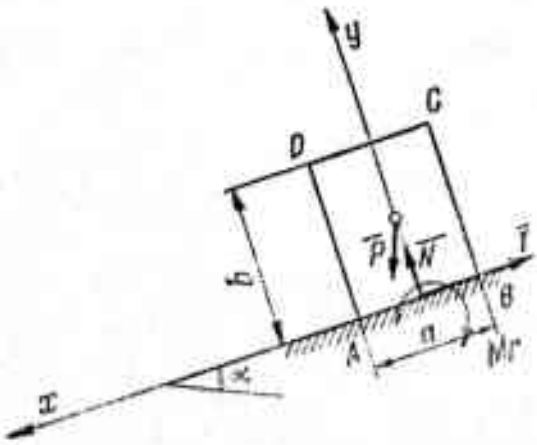


Fig. 5.20

$$\Sigma X_i = P \sin\alpha - T = 0$$

$$\Sigma Y_i = -P\cos\alpha + N = 0$$

$$\Sigma M_{O_i} = -M_r + P\sin\alpha \cdot \frac{b}{2} = 0$$

$$T \leqslant fN$$

$$M_r \leqslant sN.$$

Din prima, a doua și a patra relație rezultă

$$P\sin\alpha \leqslant Pf\cos\alpha,$$

iar din a doua, a treia și a cincea

$$P\frac{b}{2}\sin\alpha \leqslant sP\cos\alpha.$$

Observînd că $s = \frac{a}{2}$, ultimele două condiții de echilibru devin

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f, \quad \operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{a}{b}.$$

— Dacă $\frac{a}{b} < f$, pierderea echilibrului se va face prin rostogolire pentru $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$.

— Dacă $\frac{a}{b} > f$ se va produce o alunecare pentru $\alpha = \operatorname{arctg} f$.

5.21. O roată de rază R și greutate $\bar{G}$ este așezată pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, fiind conținută într-un plan vertical care taie planul înclinat după linia de cea mai mare pantă a acestuia (fig. 5.21,*a*). Cunoscînd coeficienții de frecare f și s, să se determine valoarea unghiului α, astfel încît roata să rămînă în echilibru.

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = T - G\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = N - G\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma M_{A_i} = GR\sin\alpha - M_r = 0,$$

iar inegalitățile de frecare

$$T \leqslant fN, \quad M_r \leqslant sN.$$

Rezultă condițiile de echilibru

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f, \quad \operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{s}{R}.$$

Rezultatele discuției acestor două inegalități se pun în evidență cu ajutorul diagramei din figura 5.21, *b*, unde sînt delimitate cele patru regiuni: de echilibru, de alunecare, de rostogolire și de alunecare cu rostogolire:

— pentru $\operatorname{tg}\alpha < \frac{s}{R}$, roata rămîne în echilibru;

— pentru $\frac{s}{R} < \operatorname{tg}\alpha < f$, roata se rostogolește;

— pentru $\operatorname{tg}\alpha > f$, roata alunecă și se rostogolește.

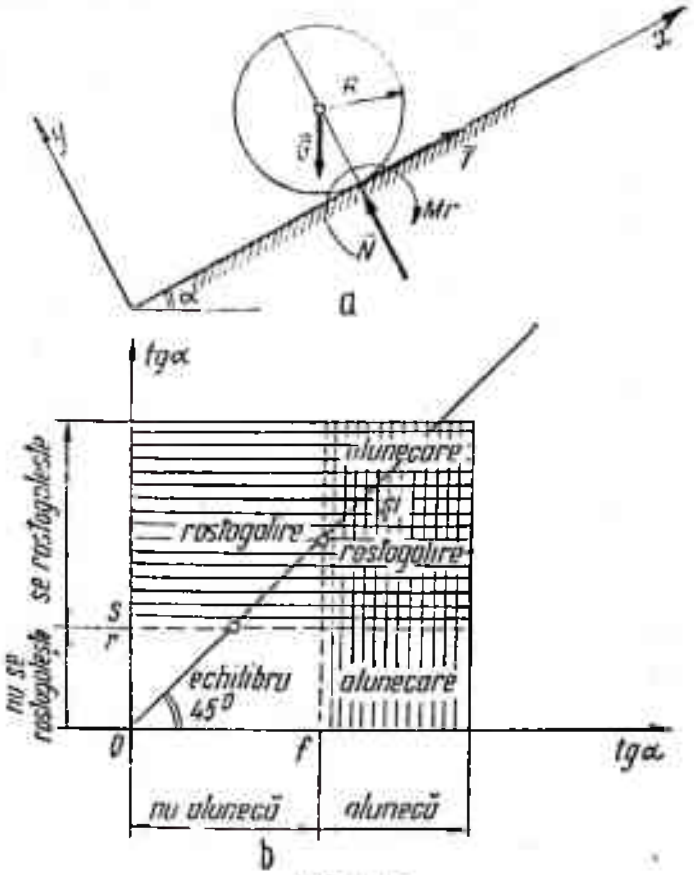


Fig. 5.21

5.22. Un disc de rază r și greutate $\bar{G}$ este menținut în echilibru pe un plan înclinat cu ajutorul unui fir paralel cu linia de cea mai mare pantă a planului (fig. 5.22). Cunoscînd coeficienții de frecare de alunecare f și de rostogolire s să se studieze condițiile de echilibru ale discului și să se determine tensiunea F din fir.

Rezolvare. Condițiile de echilibru sînt

$$F - G\sin\alpha - T = 0$$
$$N - G\cos\alpha = 0$$
$$-Fr + Gr\sin\alpha + M_t = 0$$
$$T \leqslant fN, \quad M_t \leqslant Ns.$$

— Dacă $f > \frac{s}{r}$, echilibrul se strică prin rostogolire. Pentru echilibru trebuie ca

$$G\left(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha\right) \leqslant F \leqslant G\left(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha\right).$$

— Dacă $\frac{s}{r} > f$, echilibrul se strică prin alunecare. Pentru echilibru trebuie ca

$$G(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leqslant F \leqslant G(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

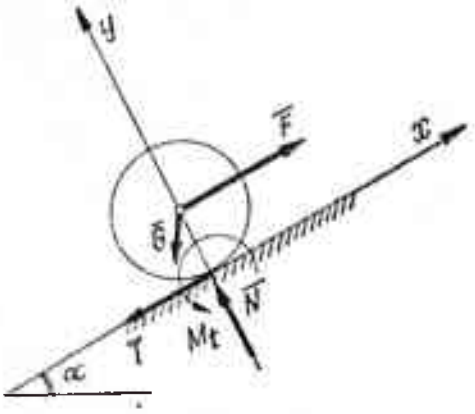


Fig. 5.22

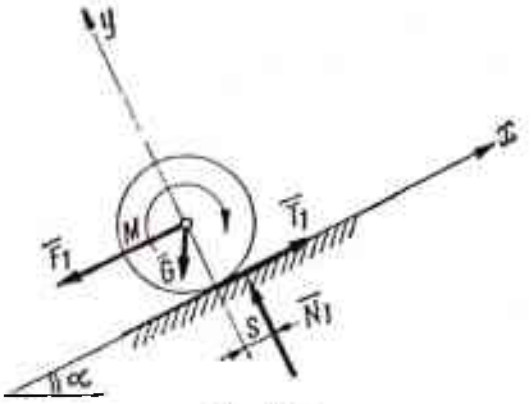


Fig. 5.23

5.23. Să se studieze echilibrul pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală al unui cilindru de rază R și greutate $\bar{G}$, atunci cînd acesta este acționat de un cuplu motor de moment $\bar{M}$ și trage după sine o greutate $\bar{F}_1$ (fig. 5.23). Coeficientul de frecare la alunecare f și coeficientul de frecare la rostogolire s sînt dați.

Rezolvare. Condițiile scalare de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = T_1 - F_1 - G \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_1 - G \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma M_i = -M + F_1 R + GR \sin \alpha + M = 0$$

$$T_1 \leqslant f N_1, \quad M_i \leqslant N_1 s.$$

Condițiile de echilibru devin

$$F_1 \leqslant G(f \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$M \leqslant F_1 R + G(R \sin \alpha + s \cos \alpha).$$

5.24. Se dă o pîrghie orizontală AB, rezemată articulat în O pe un fus cilindric de rază r. Pîrghia este acționată la capetele ei de două forțe verticale $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ (fig. 5.24). Cunoscîndu-se coeficientul f de frecare în lagăr se cere să se determine intervalul de variație a raportului dintre P și Q, astfel încît pîrghia să rămînă în echilibru.

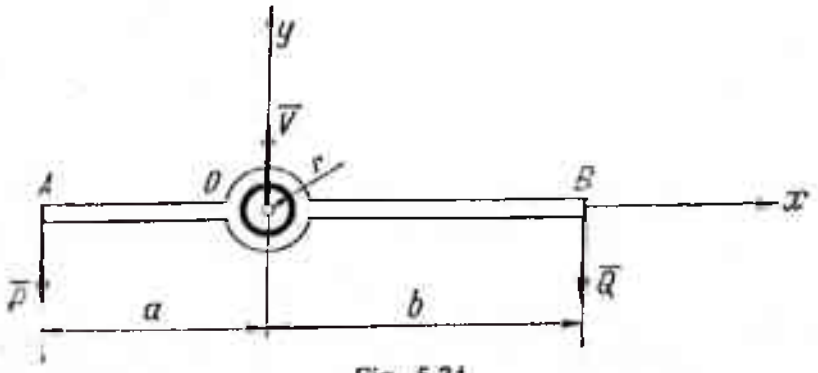


Fig. 5.24

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0$$

$$\Sigma Y_i = V - P - Q = 0$$

$$\Sigma M_{O_i} = Qb - Pa + \mathcal{M}_f = 0, \quad \text{dacă} \quad \frac{P}{Q} > \frac{b}{a}$$

sau

$$\Sigma M_{O_i} = Qb - Pa - \mathcal{M}_f = 0, \quad \text{dacă} \quad \frac{P}{Q} < \frac{b}{a},$$

unde

$$\mathcal{M}_f \leqslant fr(P + Q).$$

Rezultă

$$\frac{b - fr}{a + fr} \leqslant \frac{P}{Q} \leqslant \frac{b + fr}{a - fr}.$$

5.25. Să se determine reacțiunile din reazemele rezervorului cilindric circular drept, solicitat de forțele $\bar{P}$, $\bar{Q}$ și $\bar{R}$ ca în figura 5.25.

Rezolvare. Condițiile de echilibru se exprimă prin ecuații de momente date în raport cu șase axe.

Axa 1:

$$R_D \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + R \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} - P \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot h - Q \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot h = 0.$$

Axa 2:

$$R_A \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + R \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} + P \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}(h + a) = 0.$$

Axa 3:

$$R_E \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} - P \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} - Q \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

Axa 4:

$$R_B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} - P \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} - Q \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

Axa 5:

$$R_F \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + R_E \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + R \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} + Q \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot h = 0.$$

Axa 6:

$$R_C \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a + R_F \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + R \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} + Q \frac{1}{2}\sqrt{3}(h + a) = 0.$$

Rezultă valorile reacţiunilor

$$R_D = -\frac{1}{3}\left[R - 3\frac{h}{a}(P+Q)\right], \quad R_A = -\frac{1}{3}\left[R + 3\left(1+\frac{h}{a}\right)P\right]$$

$$R_E = \frac{\sqrt{2}}{3}(P+2Q), \quad R_B = \frac{\sqrt{2}}{3}(2P+Q)$$

$$R_F = -\frac{1}{3}\left[R + P + \left(2+3\frac{h}{a}\right)Q\right], \quad R_C = \frac{\sqrt{2}}{3}(P-Q).$$

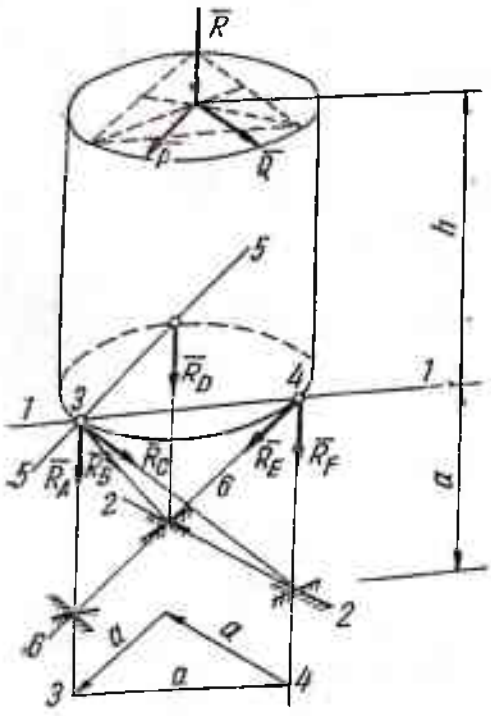


Fig. 5.25

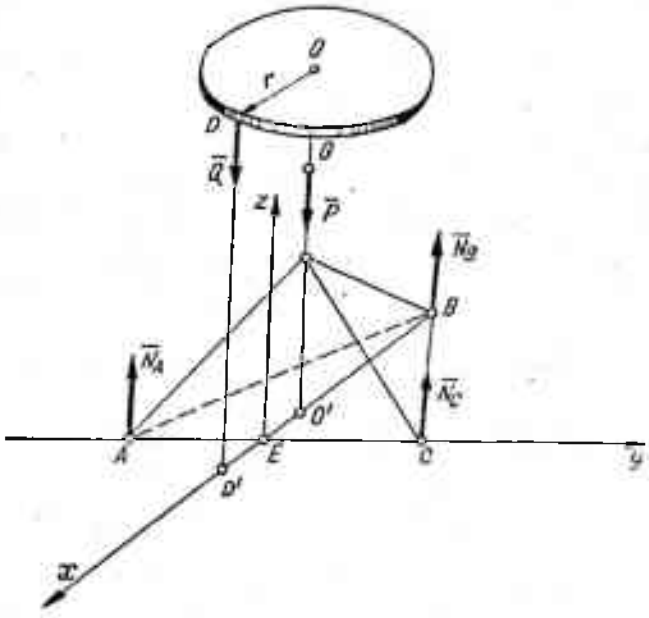


Fig. 5.26

5.26. O masă rotundă de rază r are trei picioare ale căror capete formează un triunghi echilateral ABC, de latură a (fig. 5.26). Greutatea mesei este $\bar{P}$ şi este aplicată în punctul G aflat pe axa mesei. Pe marginea mesei în punctul D, se află greutatea $\bar{Q}$, OD fiind perpendicular pe AC. Să se determine presiunea picioarelor mesei pe podea şi să se arate pentru ce valoare, $\bar{Q}$ va răsturna masa.

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru sînt

$$\Sigma Z_i = N_A + N_B + N_C - P - Q = 0$$

$$\Sigma M_{xi} = -N_A \cdot \frac{a}{2} + N_C \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$\Sigma M_{yi} = Q \cdot \left(r - \frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + N_B \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} - P \cdot \frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Rezultă

$$N_A = N_C = \frac{P+Q}{3} + \frac{Qr}{a\sqrt{3}}, \quad N_B = \frac{P+Q}{3} - \frac{2Qr}{a\sqrt{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca masa să se răstoarne, punem condiția

$$N_B < 0,$$

adică

$$\frac{P+Q}{3} < \frac{2Qr}{a\sqrt{3}},$$

de unde

$$Q > P\,\frac{a}{2\sqrt{3}r - a}.$$

O b s e r v a ț i e. Dacă $r \leqslant \frac{a}{2\sqrt{3}}$, atunci totdeauna $N_B > 0$ și masa nu se răstoarnă indiferent de mărimea forței Q.

5.27. Un rezervor este sprijinit prin șase bare dublu articulate, ca în figura 5.27. Rezervorul este acționat de o forță orizontală $\bar{P}$, aplicată în punctul D. Să se determine reacțiunile exercitate de barele de reazem asupra rezervorului.

R e z o l v a r e. Reacțiunile exercitate de bare se notează cu R_{1A}, R_{1B}, R_{2B}, R_{2C}, R_{3A} și R_{3C} și se presupun toate dirijate de jos în sus, după direcțiile barelor respective. Se vor scrie șase ecuații de momente în raport cu șase axe.

Astfel, în raport cu axa $2-3$ și axa verticală prin C avem

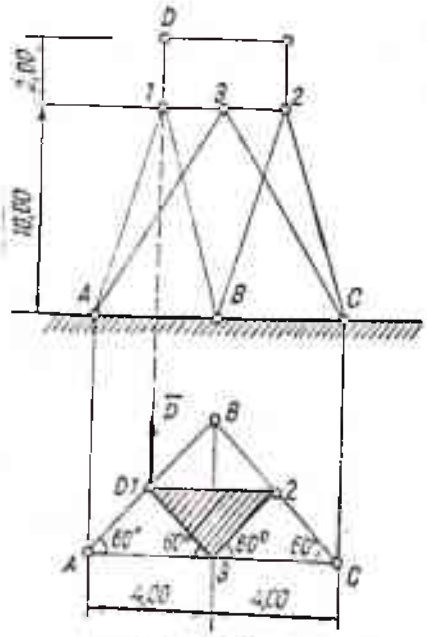


Fig. 5.27

$$R_{1A}\sin\alpha\cdot h + R_{B1}\sin\alpha\cdot h - P\cos 60^\circ\cdot 2 = 0$$

$$R_{1A}\cos\alpha\cdot 2h - R_{B1}\cos\alpha\cdot 2h + P\cdot 6 = 0,$$

unde h este înălțimea triunghiului echilateral $1-2-3$, iar α este unghiul de înclinare al barelor față de planul orizontal. Înlocuind $h = 3{,}47$ m, $\sin\alpha = 0{,}93$; $\cos\alpha = 0{,}372$, se obține

$$R_{1B} = +1{,}325\,P \quad \text{și} \quad R_{1A} = -1{,}015\,P.$$

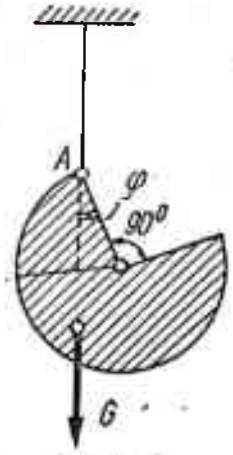
Reacțiunile R_{2B}, R_{2C} se obțin din ecuații de momente în raport cu axa $2-3$ și cu axa verticală prin A, iar R_{3C}, R_{3A} din ecuații de momente în raport cu axa $1-2$ și cu axa verticală prin B. Rezultă

$$R_{2B} = +0{,}656\,P, \qquad R_{2C} = -0{,}123\,P$$

$$R_{3C} = -0{,}698\,P, \qquad R_{3A} = +0{,}076\,P.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

5.28. Să se determine unghiul φ pentru poziția de echilibru a plăcii omogene, de greutate $\bar{G}$, din figura 5.28.



R. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{9\pi + 4}$.

Fig. 5.28

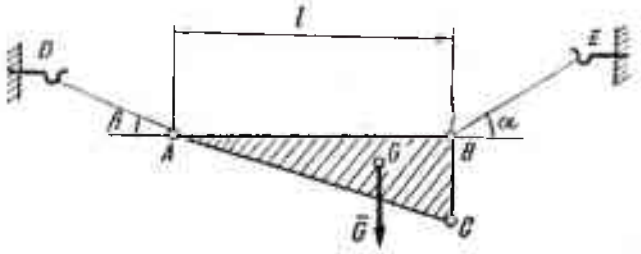


Fig. 5.29

5.29. O placă triunghiulară omogenă ABC, de greutate $\bar{G}$, este suspendată prin intermediul a două fire AD și BE (fig. 5.29). Placa se așază în poziția de echilibru, cînd latura AB este orizontală, iar firul BE face unghiul α cu această latură. Se cere tensiunea în fire și unghiul firului AD cu orizontala în poziția de echilibru.

R. $T_A = \frac{G}{3\sin\alpha}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$, $T_B = \frac{2G}{3\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

5.30. O grindă AB este simplu rezemată în B și suspendată de capătul A cu un fir vertical AC. Încărcările fiind cele din figura 5.30, să se găsească mărimea reacțiunilor în B și C.

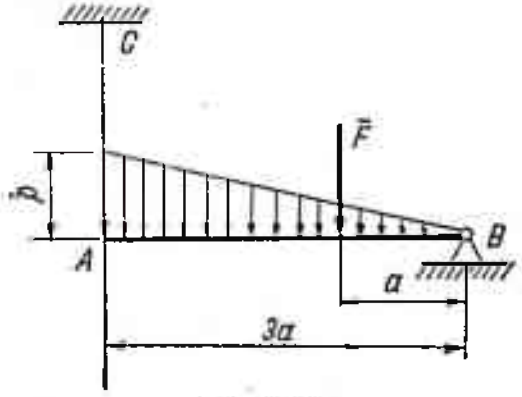


Fig. 5.30

R. $T = pa + \frac{F}{3}$, $V_B = \frac{2F}{3} + \frac{ap}{2}$.

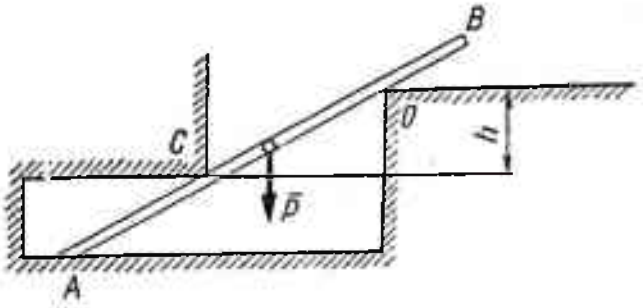


Fig. 5.31

5.31. O bară omogenă AB, de lungime $2l$ și greutate $\bar{P}$, se sprijină cu capătul A pe o podea orizontală netedă, și pe două role C și D (fig. 5.31). Să se determine reacțiunile barei, știind că $CD = a$.

R. $N_A = P$, $N_B = N_C = P\frac{l\sqrt{a^2 - h^2}}{a^2}$, perpendiculare pe bara AB.

5.32. O macara este formată dintr-o bară omogenă AC de greutate $\bar{P}$; bara se poate roti în jurul articulației A. Ea este prinsă de punctul fix B,

printr-un lanț BC, iar de capătul C este atîrnată o greutate $\bar{Q}$ (fig. 5. 32). Să se determine tensiunea $\bar{T}$ a lanțului și reacțiunea în articulația A dacă unghiurile α și β sînt cunoscute. Cum variază tensiunea în cazul cînd lanțul va deveni orizontal?

Caz particular: se neglijează greutatea barei.

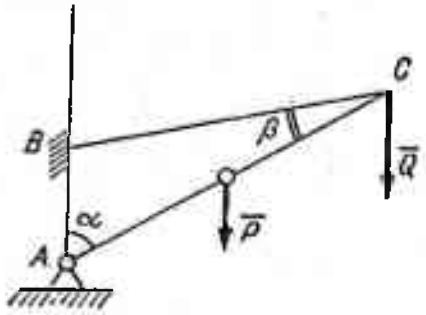


Fig. 5.32

R. $T = \dfrac{(P + 2Q)\sin\alpha}{2\sin\beta}$

$$X_A = \frac{(P + 2Q)\sin\alpha\sin(\alpha + \beta)}{2\sin\beta}$$

$$Y_A = P + Q + \frac{(P + 2Q)\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)}{2\sin\beta}.$$

5.33. O bară AB este articulată în A și are capătul B prins cu două fire: unul vertical BC, avînd suspendată o greutate $\bar{G}$ și celălalt BD, trecut peste scripetele D și avînd la capăt o greutate de două ori mai mare $2\bar{G}$ (fig. 5.33). Să se determine mărimea unghiului α pentru echilibru, știind că $AB = AD$, greutatea barei este $2\bar{G}$ și $G = 1$ N.

R. $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 120°$

$$H_A = 2\sin\frac{\alpha}{2} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ N}$$

$$V_A = 3 + 2\cos\frac{\alpha}{2} = 3 + 2\cdot\frac{1}{2} = 4\text{ N}.$$

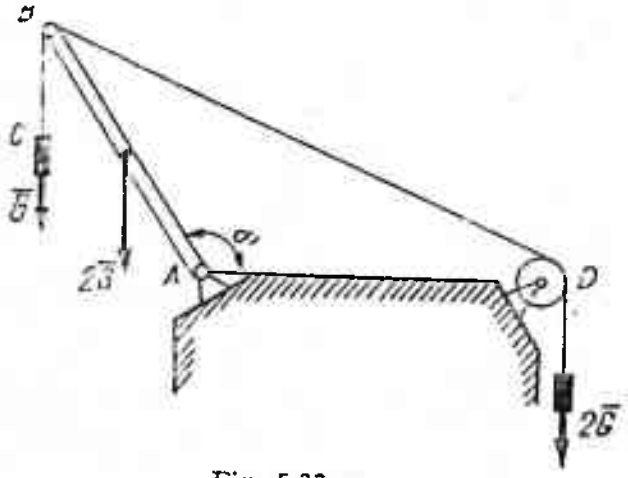


Fig. 5.33

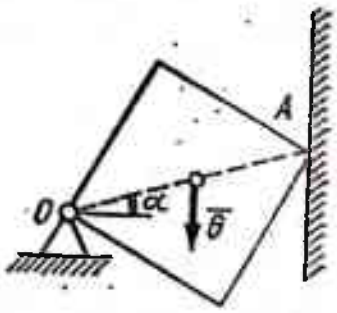


Fig. 5.34

5.34. O placă pătrată, de greutate $\bar{G}$, este articulată în colțul ei O și simplu rezemată în A pe un perete vertical luciu (fig. 5.34). Să se determine mărimea reacțiunii din articulația O și unghiul ce-l face cu orizontala, știind că în poziția de echilibru diagonala pătratului face cu orizontala unghiul α.

R. $R_O = G\sqrt{1 + \frac{1}{4}\operatorname{cotg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}\alpha.$

5.35. Să se determine reacţiunile din încastrarea A a barei AB din fig. 5.35, încărcată pe jumătate din lungime cu o sarcină uniform distribuită de p kN/m.

R. $H_A = 0, \quad V_A = \frac{pl}{2}, \quad M_A = \frac{3pl^2}{8}.$

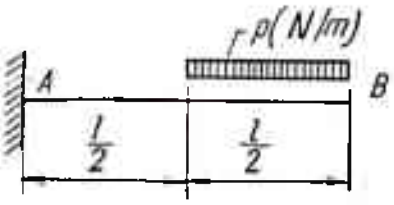


Fig. 5.35

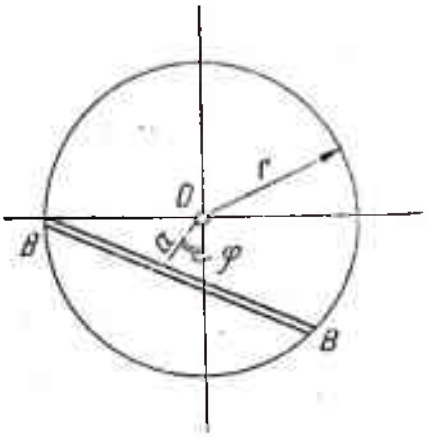


Fig. 5.36

5.36. O bară omogenă se sprijină cu frecare într-un ghidaj circular de rază r, distanţa de la centrul O pînă la bară fiind egală cu a. Să se determine unghiul φ din figura 5.36 pentru poziţia limită de echilibru (coeficientul de frecare f).

R. $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{1+f^2}{f} - f.$

5.37. O bară AB, cu centrul de masă C, se reazemă pe o suprafaţă orizontală aspră (coeficient de frecare f_1) şi pe un perete vertical (coeficient f_2), (fig. 5.37). Care sînt valorile unghiului φ, pentru care bara este în echilibru?

R. $\operatorname{tg}\varphi \geqslant \frac{a - bf_1f_2}{f_1(a+b)}.$

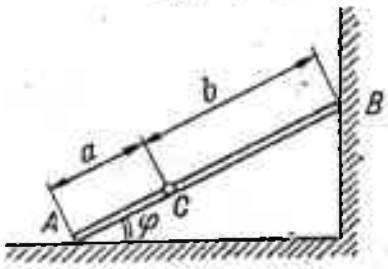


Fig. 5.37

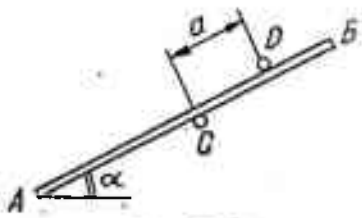


Fig. 5.38

5.38. O bară AB se reazemă cu frecare în punctele C şi D (coeficient de frecare f), (fig. 5.38). La ce distanţă de punctul C trebuie să se găsească centrul de masă al barei pentru ca bara să nu alunece?

R. $x = \frac{a}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{f} - 1\right).$

5.39. Un bloc paralelipipedic, de greutate $\bar{G}$, este tras orizontal de o forță $\bar{H}$ aplicată la înălțimea h de pămînt. Forța $\bar{H}$ este situată într-un plan vertical de simetrie al blocului (fig. 5.39). Să se studieze posibilitățile de echilibru și de mișcare ale blocului în funcție de valoarea forței $\bar{H}$.

R. Echilibru: $H \leqslant G\frac{b}{2h}$, $H \leqslant fG$;

— alunecare fără rostogolire:

$$H \leqslant G\frac{b}{2h}, \quad H > fG, \quad \text{pentru} \quad \frac{b}{2h} \geqslant f;$$

— rostogolire fără alunecare:

$$H > G\frac{b}{2h}, \quad H \leqslant fG, \quad \text{pentru} \quad \frac{b}{2h} \leqslant f;$$

— alunecare și rostogolire:

$$H > G\frac{b}{2h}, \quad H > fG.$$

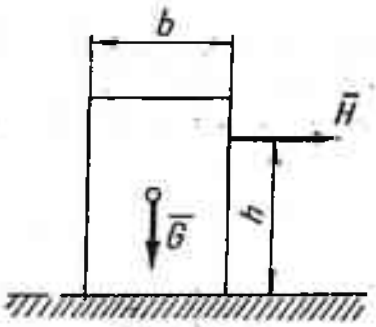


Fig. 5.39

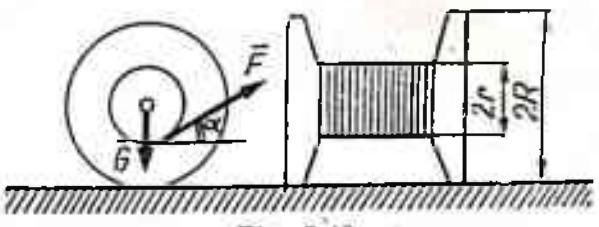


Fig. 5.40

5.40. Un mosor, de greutate $\bar{G}$, este așezat pe un plan orizontal (fig. 5.40). Se cunosc raza mosorului R, raza de înfășurare a firului r, coeficientul de frecare de alunecare dintre mosor și planul orizontal f, coeficientul de frecare de rostogolire dintre mosor și planul orizontal s. Știind că se trage de fir sub un unghi α cu o forță $\bar{F}$, să se examineze diferitele posibilități de pierdere a echilibrului și să se determine în funcție de unghiul α valoarea maximă a forței $\bar{F}$ pentru care mosorul rămîne încă în repaus. (Se vor considera numai unghiurile $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$.)

R. *Echilibru.* Condițiile de echilibru sînt

$$F\cos\alpha - T = 0$$
$$N - G + F\sin\alpha = 0$$
$$Fr - TR + M_r = 0$$
$$T \leqslant fN$$
$$M_r \leqslant Ns$$

de unde rezultă

$$F = \frac{fG}{\cos\alpha + f\sin\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{fr}{s - fR}, \quad N = \frac{G\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha}.$$

Rostologire spre dreapta.

$$fNR - Ns - Fr > 0, \text{ cu condiția } \cos\alpha > \frac{fr}{fR - s},$$

$$F_{max} = \frac{Gs}{R\cos\alpha - r + s\sin\alpha}.$$

Rostogolire spre stinga.

$$fNR - Ns - Fr < 0, \text{ cu condiția } \cos\alpha < \frac{fr}{fR - s},$$

$$F_{max} = \frac{Gs}{R\cos\alpha - r - s\sin\alpha}.$$

Alunecare.

$$\frac{fr}{fR + s} < \cos\alpha < \frac{fr}{fR - s}.$$

5.41. O placă de greutate $\bar{P}$, avînd forma unui triunghi echilateral ABC cu latura a, se reazemă cu vîrfurile A, B și C pe trei plane perpendiculare între ele: xOy, yOz, și zOx (fig. 5.41). În vîrful A placa este legată de

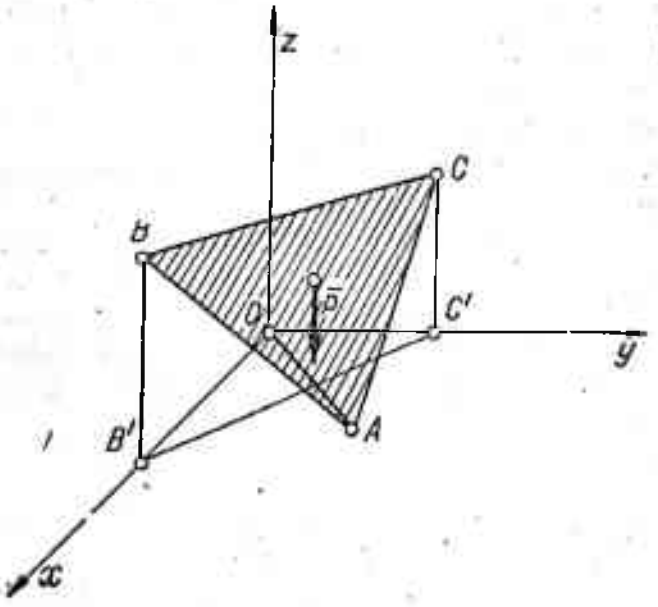


Fig. 5.41

punctul O printr-un fir de lungime l, care împarte unghiul xOy în două părți egale. Să se afle reacțiunile în punctele A, B, C și tensiunea T a firului, dacă $OB' = OC'$.

R. $N_A = P$, $N_B = N_C = P\dfrac{2l - a}{3\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}}$

$$T = P\frac{\sqrt{2}(2l - a)}{3\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}}.$$

VI. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE PUNCTE ŞI CORPURI MATERIALE

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este studiul echilibrului sistemelor de puncte materiale care se acţionează mecanic între ele. Forţele care acţionează sistemele de puncte materiale sînt: forţe interioare, forţe exterioare date şi forţe exterioare de legătură.

Teoremele cu ajutorul cărora se studiază echilibrul sistemelor de puncte sînt următoarele.

Teorema solidificării: dacă un sistem de puncte materiale libere sau cu legături se află în echilibru, el poate fi considerat ca un sistem rigid în această stare. Rezultă că, pentru un sistem de puncte, condiţiile de echilibru ale rigidului sînt necesare; în general ele nu sînt şi suficiente.

Teorema echilibrului părţilor: dacă un sistem de puncte libere sau cu legături, se află în echilibru sub acţiunea unor forţe, atunci o parte oarecare din acest sistem va fi de asemenea în echilibru sub acţiunea forţelor corespunzătoare acestei părţi (efective şi de legătură).

Aplicaţii tehnice importante sînt: echilibrul sistemelor articulate (grinzi cu zăbrele) şi echilibrul firelor.

Studiul echilibrului sistemelor articulate revine la determinarea eforturilor care iau naştere în barele sistemului. Metodele de calcul, bazate pe teorema echilibrului părţilor, cercetează fie echilibrul fiecărui nod în parte (metoda izolării nodurilor), fie echilibrul unei părţi din sistem, obţinut prin separarea grinzii în părţi distincte, prin suprimarea a trei bare (metoda secţiunilor). Acestor metode analitice le corespund metodele grafice: metoda Cremona (construcţie grafică pentru determinarea echilibrului nodurilor succesive) şi metoda Culmann (determinarea grafică a eforturilor din trei bare neconcurente).

Firele sînt corpuri flexibile la care două dintre dimensiuni sînt neglijabile faţă de a treia. Studiul static al firelor urmăreşte determinarea formelor de echilibru, precum şi a eforturilor interioare din firele supuse acţiunii unor forţe exterioare oarecare.

Ecuaţiile generale de echilibru (scalare) ale firelor sînt

$$\mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)+p_x=0 \quad , \quad \mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)+p_y=0 \quad , \quad \mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)+p_z=0,$$

unde T reprezintă efortul interior într-o secţiune curentă a firului şi $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ cosinuşii unghiurilor formate de direcţia tangentei la fir într-un punct curent cu direcţiile axelor de coordonate.

Prin integrarea acestor ecuaţii, se obţin soluţiile diferitelor probleme şi se pot determina necunoscutele x, y, z, T.

Cazuri particulare. 1) Firul supus acţiunii greutăţii proprii p, uniform distribuite pe lungimea firului. Forma de echilibru este lănţişorul

$$y - y_0 = a \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a},$$

unde $a = \frac{H}{p}$, H este o constantă de integrare care reprezintă valoarea tensiunii minime, respectiv componenta orizontală a tensiunii din fir, iar x_0 şi y_0 sînt de asemenea două constante de integrare.

Printr-o alegere convenabilă a axelor (Oy — axă de simetrie, iar ordonata minimă a curbei egală cu a), ecuaţia lănţişorului devine

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

2) Firul supus la o încărcare uniform distribuită pe orizontală are ca formă de echilibru parabola

$$y - y_0 = \frac{p}{2H} (x - x_0)^2,$$

unde H, x_0 şi y_0 sînt constante de integrare.

3) Firul supus acţiunii unor forţe concentrate are ca formă de echilibru poligonul funicular al forţelor respective.

Probleme rezolvate

6.1. Trei sfere egale, de raze R şi greutate $\bar{G}$, sînt legate cu un cablu, care formează unghiuri de 45° cu orizontala în punctele de suspensie (fig. 6.1, *a*). Se cere să se determine tensiunea în cablu şi reacţiunile dintre sfere pentru poziţia de echilibru.

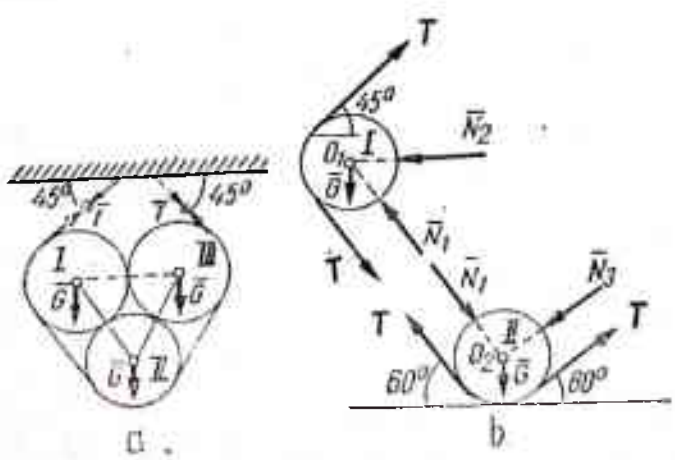


Fig. 6.1

Rezolvare. Sistemul fiind simetric, se va cerceta numai echilibrul a două dintre cele trei sfere (*I* și *II*).

Prin separarea corpurilor (fig. 6.1, *b*) și exprimarea echilibrului corpurilor *I* și *II* rezultă sistemele de ecuații:

— pentru corpul *I*

$$\Sigma X_i = -N_2 - N_1 \cos 60° + T \cos 45° + T \cos 60° = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_1 \sin 60° + T \sin 45° - T \sin 60° - G = 0$$

$$\Sigma M_{O_1} = TR - TR \equiv 0;$$

— pentru corpul *II*

$$\Sigma X_i = N_1 \cos 60° - N_3 \cos 60° - T \cos 60° + T \cos 60° = 0$$

$$\Sigma Y_i = -N_1 \sin 60° - N_3 \sin 60° + 2T \sin 60° - G = 0$$

$$\Sigma M_{O_1} = TR - TR \equiv 0$$

$$T = \frac{3G}{\sqrt{2}}, \quad N_1 = N_3 = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6} G, \quad N_2 = \frac{G}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\right].$$

Din punct de vedere practic, o astfel de problemă necesită determinarea în special a tensiunii din cablu, reacțiunile dintre sfere fiind forțe interioare. Soluția se obține simplu (fig. 6.1, *b*) prin proiectarea pe verticală a forțelor

$$\Sigma Y_i = 2T \cos 45° - 3G = 0.$$

Rezultă, pentru tensiunea *T*, aceeași valoare

$$T = \frac{3G}{\sqrt{2}}.$$

6.2. Bara *AB*, de lungime $4l$ și greutate $\bar{G}$, se reazemă fără frecare în punctele *A* și $C(AC = 3l)$, respectiv pe un plan orizontal și într-un punct. Capătul *A* este legat cu un fir orizontal *AD*, iar bara formează unghiul α dat, cu orizontala. Pe bară se reazemă în punctul $E(AE = l)$ o sferă de rază *R* și greutate $\bar{P}$, care este prinsă cu firul *OF*, paralel cu bara *AB* (fig. 6.2, *a*). Se cer tensiunile în firele *AD* și *OF* cînd sistemul este în echilibru.

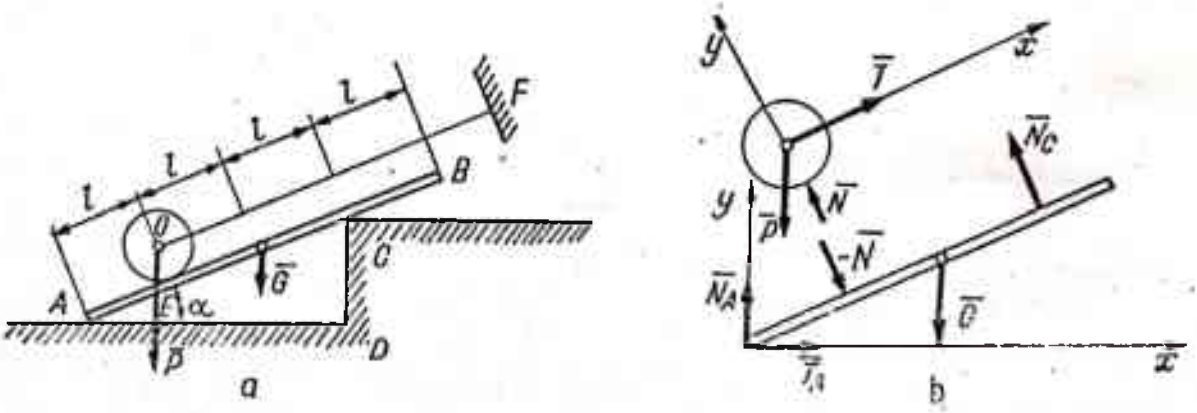


Fig. 6.2

Rezolvare. Separînd corpurile (fig. 6.2, *b*) şi scriind echilibrul fiecărui corp, obţinem sistemul de ecuaţii

$$\text{I.}\quad \Sigma X_i = T - P\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = N - P\cos\alpha = 0$$

$$\text{II.}\quad \Sigma X_i = T_A + N\sin\alpha - N_C\sin\alpha = 0,$$

$$\Sigma Y_i = N_A - N\cos\alpha + N_C\cos\alpha - G = 0.$$

$$\Sigma M_{Ai} = -Nl - G2l\cos\alpha + N_C\cdot 3l = 0.$$

Soluţiile acestui sistem de ecuaţii sînt

$$T = P\sin\alpha,\ N = P\cos\alpha,\ N_C = \frac{(P+2G)}{3}\cos\alpha$$

$$N_A = G + \frac{2}{3}(P-G)\cos^2\alpha,\quad T_A = \frac{(G-P)}{3}\sin 2\alpha.$$

6.3. Într-un punct A este suspendată cu un fir de lungime b o sferă de rază r şi greutate $\bar{P}$; în acelaşi punct A este fixată printr-o articulaţie şi o bară omogenă de lungime $2a$ şi greutate $\bar{Q}$. În poziţia de echilibru, reprezentată în figura 6.3, firul şi bara formează cu verticala unghiurile α şi β. Să se determine mărimea acestor unghiuri.

Rezolvare. Se observă că există următoarea condiţie geometrică

$$r = (r+b)\sin(\alpha+\beta).$$

Aplicînd teorema solidificării se scrie ecuaţia de momente în punctul O şi se obţine

$$\Sigma M_O = P(r+b)\sin\beta - Qa\sin\alpha = 0,$$

de unde

$$\sin\alpha = \frac{P(r+b)}{Qa}\sin\beta.$$

Introducînd această valoare în prima relaţie, rezultă ecuaţia

$$\frac{P(r+b)^2}{Qa}\sin\beta\cos\beta + (r+b)\sin\beta\sqrt{1-\frac{P^2(r+b)^2}{Q^2a^2}\sin^2\beta} = r$$

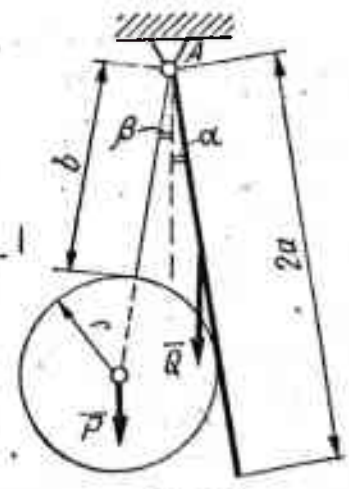


Fig. 6.3

sau

$$(r+b)^2\sin^2\beta\left[1-\frac{P^2(r+b)^2}{Q^2a^2}\sin^2\beta\right]=r^2+\frac{P^2(r+b)^4}{Q^2a^2}\sin^2\beta\cos^2\beta-$$

$$-\frac{2rP(r+b)^2}{Qa}\sin\beta\cos\beta.$$

Soluţiile problemei sînt

$$\operatorname{cotg}\beta=\frac{\sqrt{b(b+2r)}}{r}+\frac{P}{Q}\frac{(b+r)^2}{ar}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\sqrt{b(b+2r)}}{r}+\frac{Qa}{Pr}.$$

6.4. Să se determine reacţiunile din articulaţiile A, B şi C ale sistemului de bare egale AB şi BC din figura 6.4*a*, acţionat de forţa $\bar{P}$. Sistemul este în echilibru pentru înclinarea barelor sub unghiul α faţă de orizontală. Caz particular: $P=2\text{kN}$, $\alpha=30°$.

Rezolvare. *Soluţia analitică.* Aplicînd teorema solidificării obţinem

$$\Sigma X_i=H_A-H_C=0$$

$$\Sigma Y_i=V_A+V_B-P=0$$

$$\Sigma M_{Ai}=V_C\cdot 2l-P\cdot\frac{l}{2}=0.$$

A patra ecuaţie, necesară pentru determinarea reacţiunilor, se obţine scriind echilibrul barei BC

$$\Sigma M_{C_i}=V_C l-H_C\cdot l\operatorname{tg}\alpha=0$$

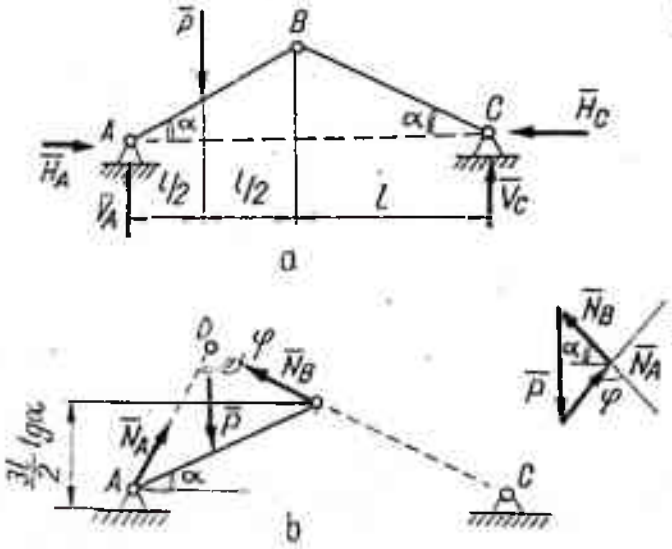


Fig. 6.4

Rezultă

$$V_A=\frac{3P}{4},\quad V_C=\frac{P}{4},$$

$$H_A=H_C=\frac{P}{4\operatorname{tg}\alpha}.$$

Mărimea reacţiunilor va fi

$$N_A=\frac{P}{4\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{9\operatorname{tg}^2\alpha+1},$$

$$N_C=\frac{P}{4\sin\alpha}.$$

Reacţiunea din B este egală ca mărime cu cea din C

$$N_B = N_C = \frac{P}{4 \sin \alpha}$$

şi are direcţia barei BC (fig. 6.4, *b*).

Caz particular: $\alpha = 30°$, $P = 2$kN. Se obţine:

$$N_A = \frac{P}{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot 2 = \frac{P\sqrt{3}}{2}, \quad N_C = N_B = \frac{P}{2}$$

$$\varphi = 90°.$$

Soluţia grafică şi geometrică. Sistemul este alcătuit din două corpuri: barele AB şi BC. Deoarece bara BC nu este încărcată, reacţiunile din B şi C au direcţia barei BC.

Pentru ca forţele $\bar{P}$, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ să fie în echilibru, trebuie ca ele să fie concurente, iar poligonul forţelor să fie un poligon închis.

În poligonul forţelor $\bar{P}$, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ există relaţiile

$$\frac{P}{\sin(180° - \varphi)} = \frac{N_A}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{N_B}{\sin(\varphi + \alpha - 90°)}.$$

Scriind teorema sinuşilor în triunghiul ADC, mai obţinem relaţia

$$\frac{AC}{\sin \varphi} = \frac{AD}{\sin \alpha}$$

în care $AC = 2l$ şi $AD = \frac{l}{2}\sqrt{1 + 9\,\mathrm{tg}^2\alpha}$. Se obţine

$$\sin \varphi = \frac{4 \sin \alpha}{\sqrt{1 + 9\,\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

relaţie care, înlocuită în condiţiile de echilibru, conduce la soluţiile

$$N_A = \frac{P}{4\,\mathrm{tg}\,\alpha}\sqrt{1 + 9\,\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad N_B = \frac{P}{4 \sin \alpha}.$$

6.5. Să se determine reacţiunile din reazemele A, B şi D ale grinzii cu articulaţii $ABCDE$ din figura 6.5, încărcată pe consola DE cu o sarcină uniform distribuită de p kN/m şi avînd la mijlocul deschiderii AB o sarcină $\bar{P}$ înclinată cu unghiul α faţă de orizontală.

Scanned with OKEN Scanner

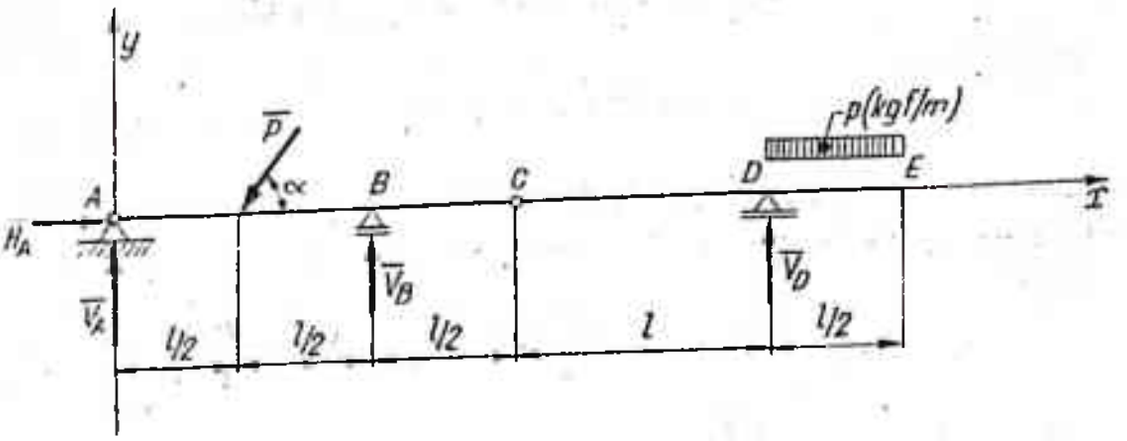


Fig. 6.5

Rezolvare. Aplicînd teorema solidificării, obținem următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma X_i = H_A - P\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_A - P\sin\alpha + V_B + V_D - \frac{pl}{2} = 0$$

$$\Sigma M_{Ai} = -P\sin\alpha\frac{l}{2} + V_B l + V_D\cdot\frac{5l}{2} - \frac{pl}{2}\cdot\frac{11l}{4} = 0.$$

A patra ecuație, necesară pentru determinarea reacțiunilor, rezultă din echilibrul unei părți — grinda CDE

$$\Sigma M_{Ci} = V_D l - \frac{pl}{2}\left(l + \frac{l}{4}\right) = 0.$$

Sistemul de ecuații admite soluțiile:

$$H_A = P\cos\alpha, \quad V_A = \frac{P\sin\alpha}{2} + \frac{pl}{16}$$

$$V_B = \frac{P\sin\alpha}{2} - \frac{3}{16}pl, \quad V_D = \frac{5}{8}pl.$$

6.6. Un stîlp AB, de greutate $\overline{P}$ și lungime $a + b$, este articulat în A, iar în B este supus acțiunii tensiunii $\overline{T}$ a unui fir telegrafic. Stîlpul este sprijinit de o bară CD, de greutate $\overline{Q}$, articulată la capete (fig. 6.6, *a*). Cunoscînd unghiul α pentru poziția de echilibru, să se determine reacțiunile din punctele A, C și D.

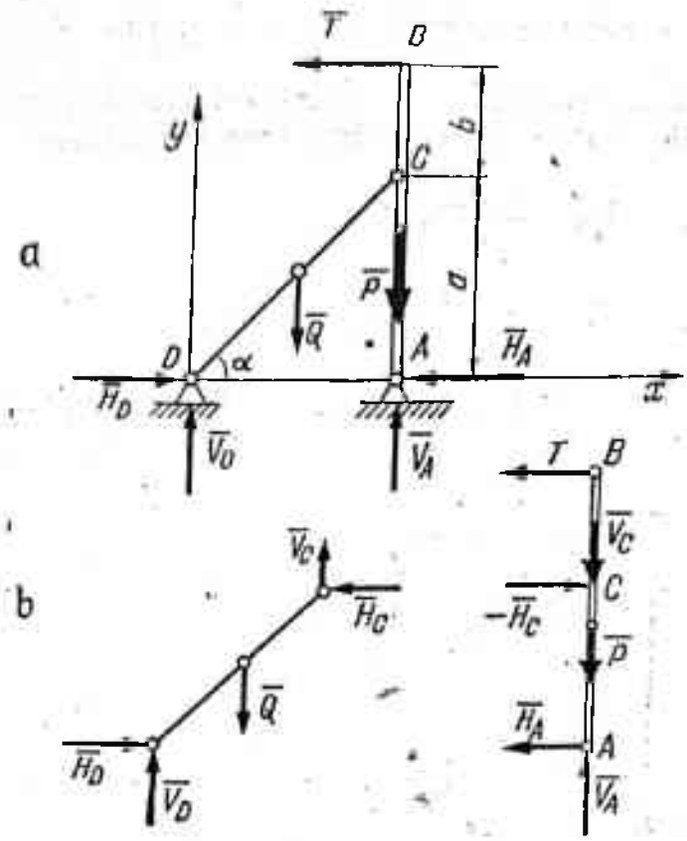


Fig. 6.6

Rezolvare. Separăm barele şi punem condiţia de echilibru $\bar{R} = 0$ $\bar{M} = 0$ pentru fiecare din ele (fig. 6.6, *b*). Obţinem sistemele de ecuaţii

I. $\Sigma X_i = H_D - H_C = 0$

$\Sigma Y_i = V_D - Q + V_C = 0$

$\Sigma M_{Di} = -Q\frac{l\cos\alpha}{2} + V_C l\cos\alpha + H_C l\sin\alpha = 0$

II. $\Sigma X_i = H_C - H_A - T = 0$

$\Sigma Y_i = V_A - V_C - P = 0$

$\Sigma M_{Ai} = T(a+b) - H_C a = 0,$

ale căror soluţii sînt

$$H_A = \frac{b}{a}T, \quad H_C = \frac{(a+b)}{a}T = H_D$$

$$V_A = P + \frac{Q}{2} - \frac{(a+b)}{a}T\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad V_C = \frac{Q}{2} - \frac{(a+b)}{a}T\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$V_D = \frac{Q}{2} + \frac{(a+b)}{a}T\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

6.7. Să se determine reacţiunile din articulaţiile A, B, C ale arcului din figura 6.7, *a*.

Rezolvare. Soluţia analitică. Se separă cele două corpuri (fig. 6.7, *b*) şi se scriu ecuaţiile scalare de echilibru corespunzătoare

$$\text{I.}\quad \Sigma X_i = H_A - H_B + \frac{P\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_A + V_B - P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma MA_i = H_B f + V_B l - P\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{2} - P\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)f = 0$$

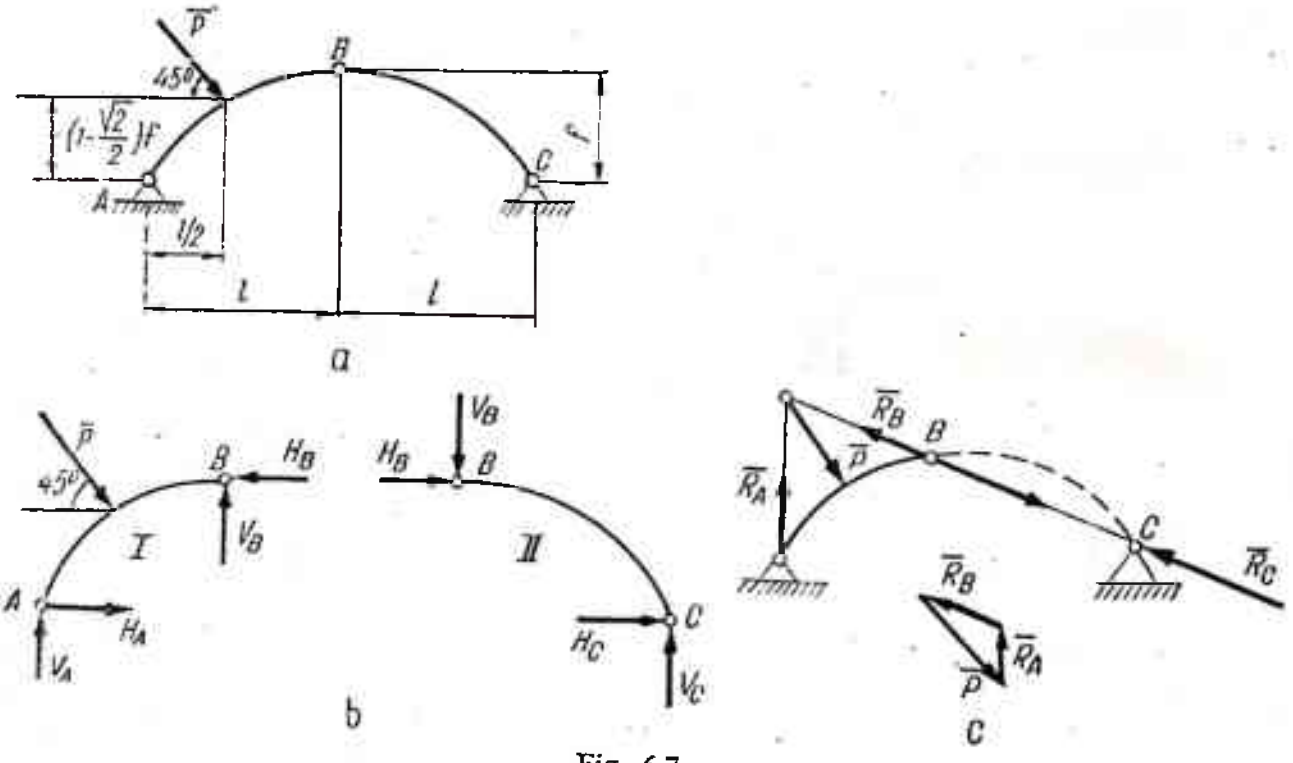


Fig. 6.7

$$\text{II.}\quad \Sigma X_i = H_B - H_C = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_C - V_B = 0$$

$$\Sigma MC_i = -H_B f + V_B l = 0$$

care admit soluţiile

$$H_A = \frac{P\sqrt{2}}{8}\left(\frac{l}{f} - 2 - \sqrt{2}\right), \quad V_A = \frac{P\sqrt{2}}{8}\left[3 + (2 - \sqrt{2})\frac{f}{l}\right]$$

$$H_B = \frac{P\sqrt{2}}{8}\left(\frac{l}{f} + 2 - \sqrt{2}\right) = H_C, \quad V_B = \frac{P\sqrt{2}}{8}\left[1 + (2 - \sqrt{2})\frac{f}{l}\right] = V_C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia grafică. Arcul BC nefiind încărcat, direcţia reacţiunii din articulaţia C va trece şi prin articulaţia B (fig. 6.7, *c*).

Arcul AB este acţionat de trei forţe, care pentru echilibru trebuie să aibă direcţiile concurente şi poligonul închis.

6.8. Să se determine pe cale grafică reacţiunile din articulaţiile arcului din fig. 6.8, *a*.

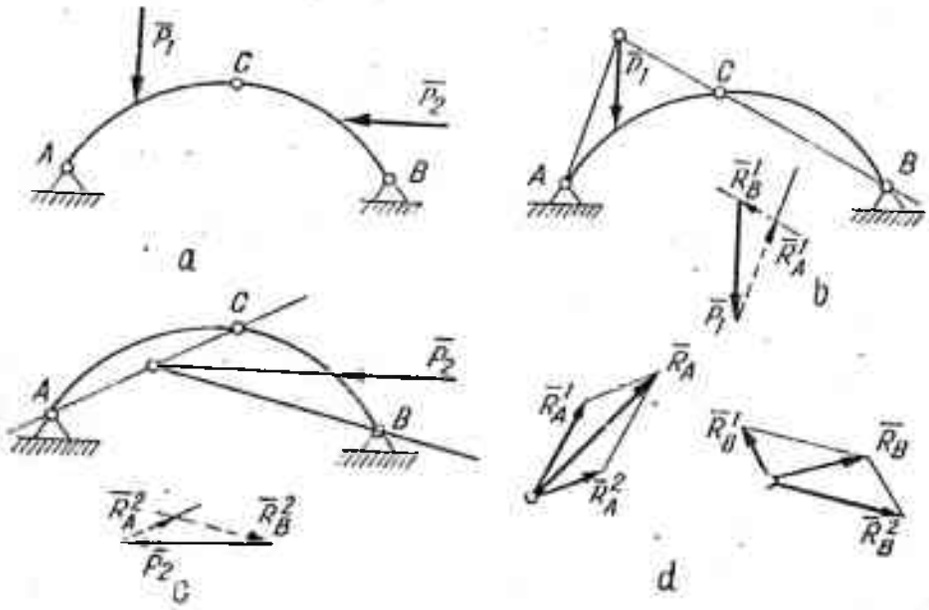


Fig. 6.8

Rezolvare. Pentru determinarea reacţiunilor din articulaţiile A şi B se va utiliza principiul suprapunerii efectelor. Se consideră arcul încărcat numai cu forţa $\bar{P}_1$ (fig. 6.8, *b*) şi procedînd ca în problema precedentă, se determină pe cale grafică reacţiunile $\bar{R}_A^1$ şi $\bar{R}_B^1$. Considerînd apoi arcul încărcat numai cu forţa $\bar{P}_2$ (fig. 6.8, *c*) se obţin reacţiunile $\bar{R}_A^2$ şi $\bar{R}_B^2$.

Pentru încărcarea din fig. 6.8, *a* rezultă reacţiunile din articulaţiile A şi B din compunerea vectorială a reacţiunilor obţinute în cele două situaţii de încărcare (fig. 6.8, *d*):

$$\bar{R}_A = \bar{R}_A^1 + \bar{R}_A^2, \quad \bar{R}_B = \bar{R}_B^1 + \bar{R}_B^2.$$

6.9. Se dă un sistem de trei bare articulate între ele în punctele D şi C şi în reazemele A şi B. Barele AC şi BD au lungimi egale $AC = BD = l$ şi greutatea $\bar{P}$. Bara CD de lungime l_1 este orizontală şi are greutatea $\bar{Q}$. Tot sistemul se află în echilibru într-un plan vertical (fig. 6.9, *a*). Să se determine mărimea reacţiunilor din A şi C, cunoscînd unghiul α în poziţia de echilibru.

Rezolvare. Sistemul fiind simetric, studiem numai echilibrul barelor AC (I) şi CD (II) (fig. 6.9, *b*).

I. $\Sigma X_i = -H_A + H_C = 0$

$\Sigma Y_i = V_A - P - V_C = 0$

$\Sigma M_{Ai} = -P \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha - V_C l \cos\alpha + H_C l \sin\alpha = 0$

II. $\Sigma X_i = -H_C + H_D = 0$

$\Sigma Y_i = V_C + V_D - Q = 0$

$\Sigma M_{Di} = -V_C \cdot l_1 + Q \frac{l_1}{2} = 0.$

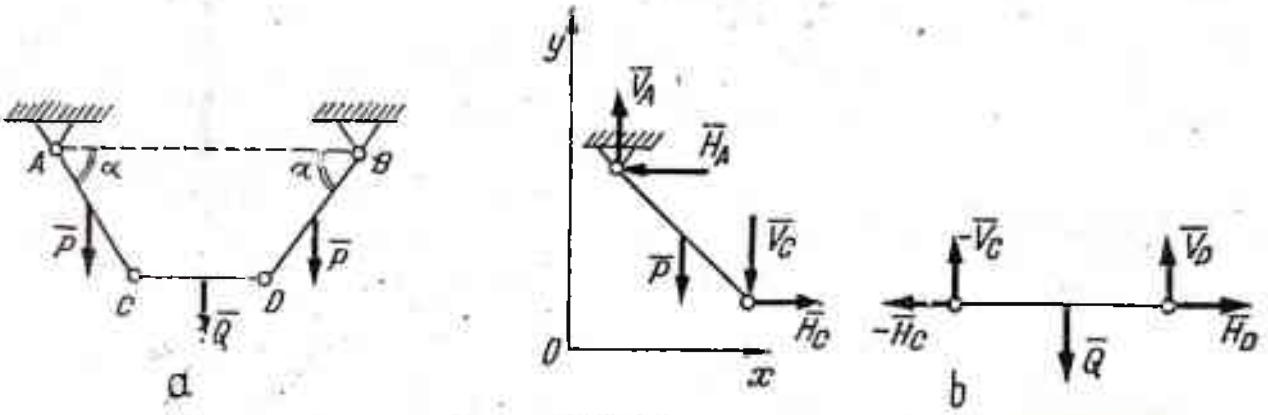


Fig. 6.9

Rezultă mărimea reacţiunilor

$$V_A = P + \frac{Q}{2}, \quad V_C = \frac{Q}{2}$$

$$H_A = H_C = H_D = \frac{1}{2}(P + Q) \operatorname{cotg} \alpha.$$

6.10. Să se determine reacţiunile din încastrările A şi E ale cadrului din figura 6.10, *a*.

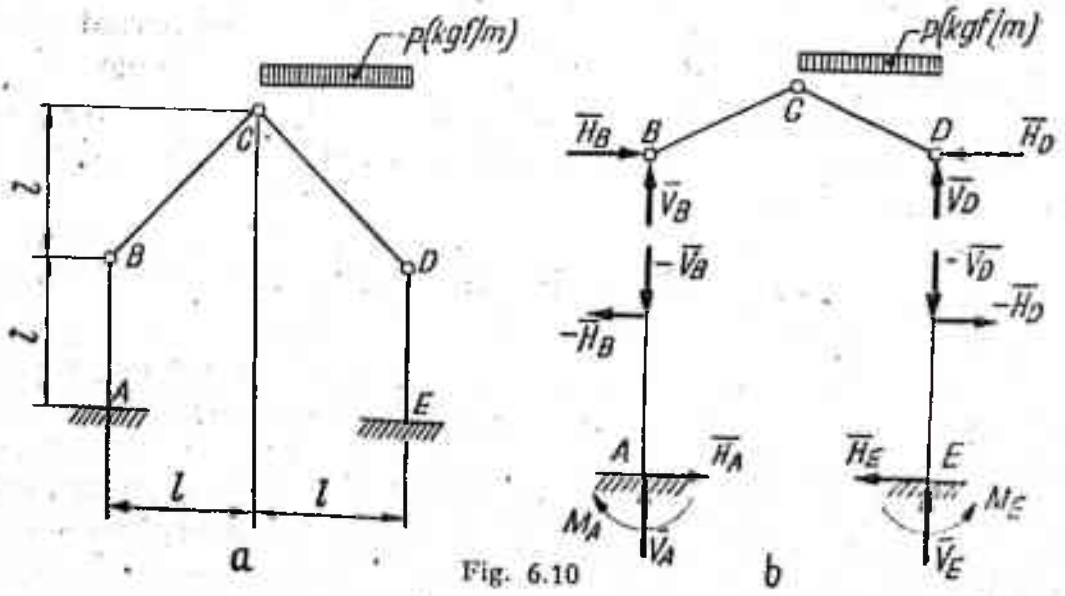


Fig. 6.10

Rezolvare. Sistemul se separă în cadrul BCD şi stîlpii AB şi ED (fig. 6.10, *b*). Din echilibrul cadrului BCD rezultă sistemul de ecuaţii

$$\Sigma X_i = H_B - H_D = 0$$
$$\Sigma Y_i = V_B + V_D - pl = 0$$
$$\Sigma M_{Di} = -V_B \cdot 2l + pl \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Se va adăuga ecuaţia de momente a forţelor care acţionează asupra barei BC faţă de punctul C

$$\Sigma M_{Ci} = -V_B l + H_B l = 0.$$

Soluţiile sistemului de ecuaţii astfel obţinut sînt

$$H_B = H_D = \frac{pl}{4}, \quad V_B = \frac{pl}{4}, \quad V_D = \frac{3pl}{4}.$$

Din echilibrul barelor AB şi ED se obţin sistemele de ecuaţii

I. $$\Sigma X_i = H_A - \frac{pl}{4} = 0$$
$$\Sigma Y_i = V_A - \frac{pl}{4} = 0$$
$$\Sigma M_{Ai} = -M_A + \frac{pl}{4} \cdot l = 0$$

II. $$\Sigma X_i = \frac{pl}{4} - H_E = 0$$
$$\Sigma Y_i = V_E - \frac{3pl}{4} = 0$$
$$\Sigma M_{Ei} = M_E - \frac{pl}{4} \cdot l = 0.$$

Rezultă valorile reacţiunilor din A şi E

$$H_A = \frac{pl}{4} = H_E, \quad V_A = \frac{pl}{4}, \quad M_A = \frac{pl^2}{4}, \quad V_E = \frac{3pl}{4}, \quad M_E = \frac{pl^2}{4}.$$

6.11. O sferă de greutate $2\bar{P}$ se reazemă ca în figura 6.11, *a* pe două semisfere de greutăţi $\bar{P}$ egale. Cît de mare trebuie să fie coeficientul de frecare f dintre semisfere şi masă, pentru ca sistemul să fie în echilibru în poziţia din figură?

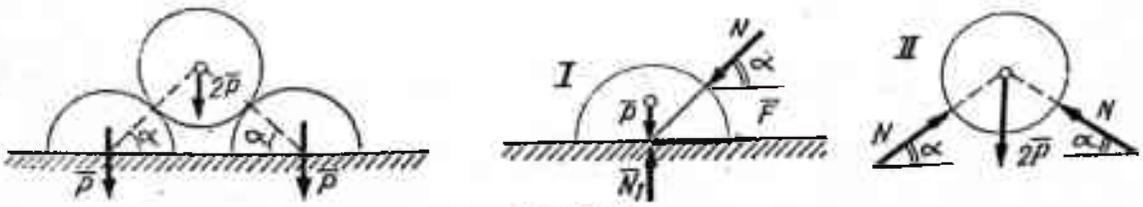


Fig. 6.11

Rezolvare. Separînd corpurile (fig. 6.11, *b*) și scriind ecuațiile scalare de echilibru obținem

I. $\Sigma X_i = F - N\cos\alpha = 0$

$\Sigma Y_i = N_1 - P - N\sin\alpha = 0$

$F \leqslant fN_1$

II. $\Sigma X_i = N\cos\alpha - N\cos\alpha \equiv 0$

$\Sigma Y_i = 2N\sin\alpha - 2P = 0.$

Din ultima relație rezultă

$$N = \frac{P}{\sin\alpha},$$

iar din primele trei obținem

$$\frac{P}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha = f\left(P + \frac{P}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha\right),$$

deci

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2f}.$$

În lipsa frecării, echilibrul nu este posibil, α trebuind să fie egal cu $\pi/2$.

6.12. Să se determine reacțiunile și condiția de echilibru a sistemului de corpuri din figura 6.12. (Se va neglija frecarea firelor și se va lua în considerare numai frecarea dintre greutatea $\bar{Q}$ și planul orizontal, coeficient de frecare f).

Rezolvare. Ecuațiile scalare de echilibru ale fiecăruia din corpurile sistemului sînt

I. $T_3 - P = 0$

II. $-X_1 + T_3 = 0$, $-T_3 + Y_1 = 0$

III. $-T_3 + T_2 + F = 0$, $N - Q = 0$, $F \leqslant fN$

IV. $-T_2 + X = 0$, $Y - T_1 = 0$, $T_2R - T_1 r = 0$

V. $T_1 - G = 0.$

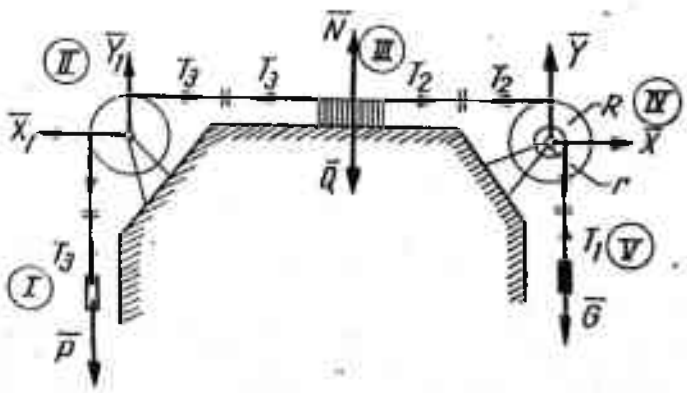


Fig. 6.12

Soluţia sistemelor de ecuaţii este

$$T_3 = P,\ X_1 = P,\ Y_1 = P,\ N = Q,\ F = fQ$$

$$T_2 = P - fQ,\ X = P - fQ,\ Y = G,\ T_1 = G$$

şi condiţia de echilibru

$$(P - fQ)\,R = Gr.$$

6.13. Să se studieze poziţia de echilibru a penei de greutate $\bar{P}$ şi a blocului de greutate $\bar{G}$ din figura 6.13, *a* (coeficient de frecare între bloc şi masă f, între bloc şi pană şi între pană şi planul înclinat f_1). Cît de mare trebuie să fie greutatea $\bar{G}$ a blocului, pentru ca sistemul să fie în echilibru?

Rezolvare (fig. 6.13, *b*). Echilibrul penei este dat de sistemul

$$f_1N_2 \sin\alpha - f_1N_1 \sin\alpha + N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha = 0$$

$$-P + (f_1N_1 + f_1N_2)\cos\alpha + (N_1 + N_2)\sin\alpha = 0.$$

Echilibrul blocului se studiază cu ecuaţiile

$$fN - N_1 \cos\alpha + f_1N_1 \sin\alpha = 0$$

$$-G + N - N_1 \sin\alpha - f_1N_1 \cos\alpha = 0$$

$$bG - (N_1 \sin\alpha + f_1N_1 \cos\alpha)(a + b) - N_1h(\cos\alpha - f_1 \sin\alpha) = 0.$$

Din cele cinci ecuaţii rezultă mărimile reacţiunilor $\bar{N}$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, greutatea blocului $\bar{G}$ şi poziţia reacţiunii $\bar{N}$ faţă de $\bar{G}$, dată de b

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2(\sin\alpha + f_1 \cos\alpha)}$$

$$N = \frac{P(\cos\alpha - f_1 \sin\alpha)}{2f(\sin\alpha + f_1 \cos\alpha)}$$

$$G = \frac{P}{2}\left[\frac{\cos\alpha - f_1 \sin\alpha}{f(\sin\alpha + f_1 \cos\alpha)} - 1\right].$$

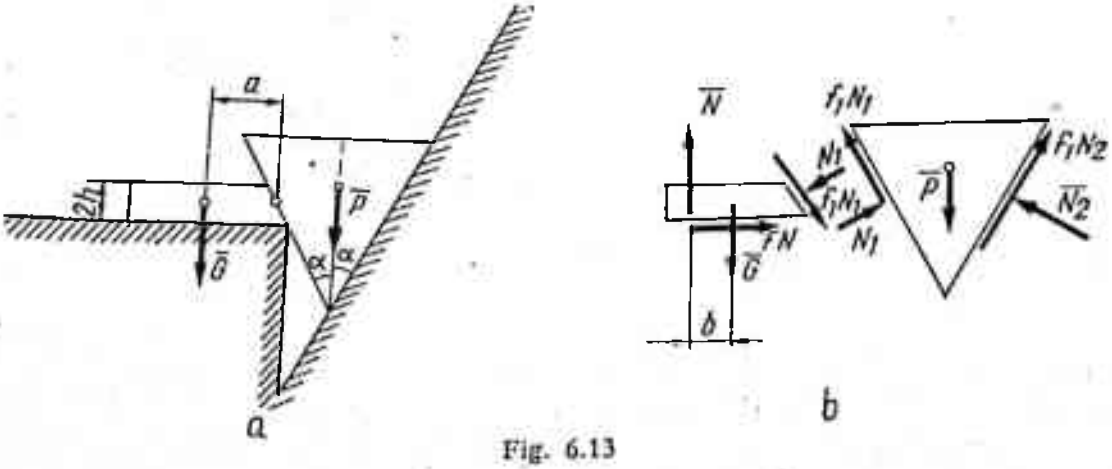


Fig. 6.13

6.14. Un cilindru gol, deschis la ambele capete, cu pereții foarte subțiri, avînd raza r_1, este așezat pe un plan orizontal (fig. 6.14, *a*). Înăuntrul lui se pun două sfere de raze r și greutatea $\bar{G}_1\left(r > \frac{r_1}{2}\right)$. Care trebuie să fie greutatea minimă $\bar{G}$ a cilindrului, pentru ca să nu se răstoarne?

Rezolvare. Pentru ca cilindrul să nu se răstoarne trebuie ca

$$0 < x < 2r_1.$$

Izolînd corpurile (fig. 6.14, *b*) și exprimînd echilibrul sistemului, obținem ecuațiile

$$\text{I.}\quad \Sigma X_i = N_1 - N_2 = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_3 - 2G_1 = 0$$

$$\Sigma M_{Oi} = N_2 \cdot 2\sqrt{r^2 - (r_1 - r)^2} - G_1 \cdot 2(r_1 - r) = 0$$

$$\text{II.}\quad \Sigma X_i = -N_1 + N_2 = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_3 - G = 0$$

$$\Sigma M_{Ai} = G \cdot r_1 + N_1 r - N_2\left(2\sqrt{r^2 - (r_1 - r)^2} + r\right) - N_3 x = 0.$$

Soluțiile sistemelor sînt

$$N_3 = G,\quad N_2 = N_1 = G_1 \frac{r_1 - r}{\sqrt{r^2 - (r_1 - r)^2}},\quad N = 2G_1,\quad x = \frac{Gr_1 - 2G_1(r_1 - r)}{G}.$$

Din condiția pentru x se obține greutatea minimă a cilindrului

$$G > 2G_1\left(\frac{(r_1 - r)}{r_1}\right).$$

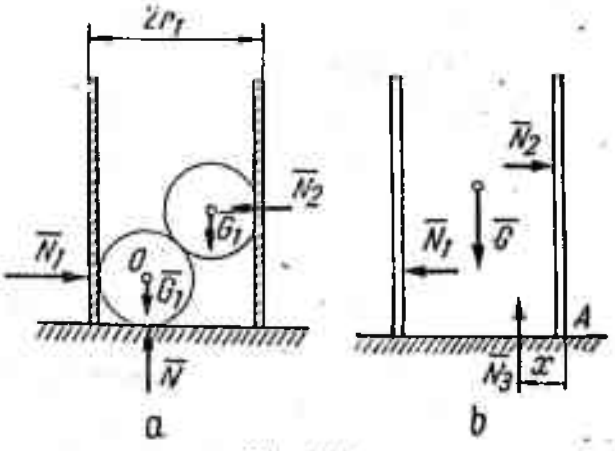


Fig. 6.14

6.15. Un bloc de greutate $\bar{Q}$ este așezat pe un plan înclinat prin intermediul a două role cilindrice de rază r. Coeficienții de frecare la alunecare, respectiv de rostogolire între bloc și role, precum și între role și planul încli-

nat sînt egali cu f, respectiv s. Rolele sînt de greutate neglijabilă. Să se determine valoarea minimă a forţei $\bar{P}$ care poate să deplaseze blocul în sus (fig. 6.15, *a*).

Rezolvare. Izolăm cele trei corpuri, introducînd forţele de legătură corespunzătoare (fig. 6.15, *b*). Presupunînd că s este foarte mic în raport cu distanţa dintre role şi considerînd că rolele sînt aşezate simetric faţă de centrul de greutate al blocului, rezultă din echilibrul blocului

$$N = \frac{Q}{2}\cos\alpha, \quad T = \frac{P}{2} - \frac{Q\sin\alpha}{2}.$$

Din relaţia

$$T_{max} = fN,$$

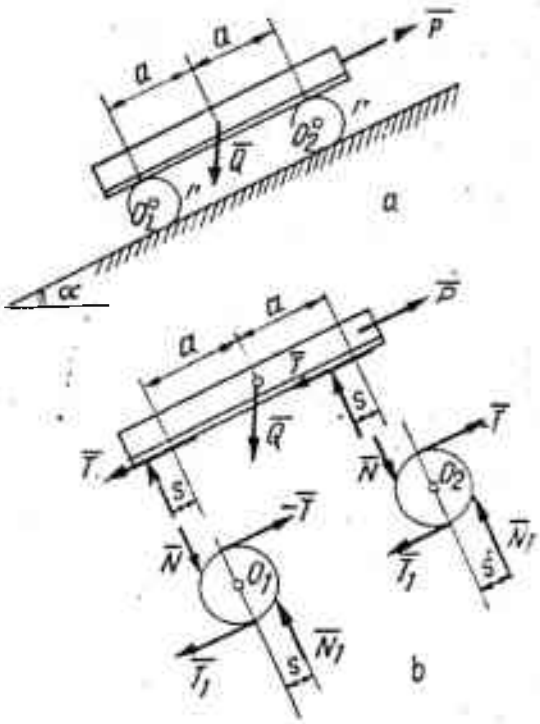


Fig. 6.15

care are loc la limita echilibrului, deducem valoarea maximă a forţei P pentru ca blocul să nu alunece pe role.

$$P = Q(f\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Valorile forţei $\bar{P}$, capabile să producă alunecarea blocului, sînt date de

$$P \geqslant Q(f\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Din ecuaţiile de echilibru ale celor două role rezultă

$$N = N_1, \quad T = T_1.$$

Condiţia de echilibru la limita rostogolirii rolelor, atît pe planul înclinat cît şi pe bloc, este

$$2rT = 2Ns$$

sau, înlocuind pe T şi N cu valorile de mai sus, obţinem

$$P = Q\left(\frac{s}{r}\cos\alpha + \sin\alpha\right).$$

Valorile forţei P, capabile să producă rostogolirea rolelor, sînt date de

$$P \geqslant Q\left(\frac{s}{r}\cos\alpha + \sin\alpha\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că valoarea minimă a forței P în cazul rostogolirii este mai mică decît în cazul alunecării, deoarece avem aproape totdeauna

$$\frac{s}{r} < f.$$

Blocul se pune în mișcare prin rostogolirea rolelor.

6.16. Două bare omogene AB și BC, de lungime l și greutate $\bar{G}$, se sprijină în punctele A și C pe un plan orizontal. Barele sînt situate într-un plan vertical. Raza fusului din articulația B fiind r, coeficientul de frecare între bare și planul orizontal f, iar coeficientul de frecare în articulație μ, să se determine valorile unghiului α pentru pozițiile de echilibru ale sistemului (fig. 6.16, *a*).

Rezolvare. Ecuațiile scalare de echilibru pentru întregul sistem sînt

$$\Sigma X_i = T_A - T_C = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_A + V_C - 2G = 0$$

$$\Sigma M_{Ci} = V_A \cdot 2l \cos\alpha - G \cdot \frac{3l}{2} \cos\alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha = 0$$

$$T_A \leqslant fV_A, \quad T_C \leqslant fV_C.$$

Se izolează bara AB (fig. 6.16, *b*) și se scrie o ecuație de momente în raport cu articulația B

$$\Sigma M_{Bi} = V_A \cdot l \cos\alpha - T_A \cdot l \sin\alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha - M_f = 0.$$

Momentul din articulația B satisface inegalitatea

$$M_f \leqslant \mu r R_B,$$

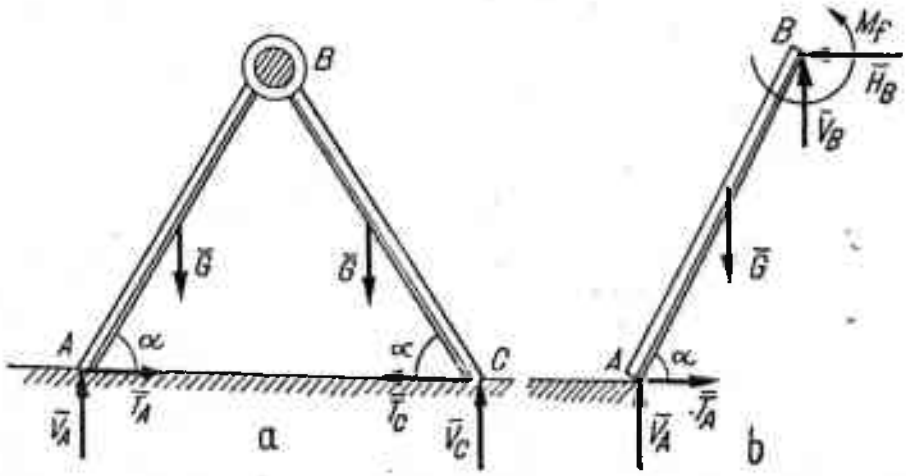


Fig. 6.16

unde $R_B = \sqrt{H_B^2 + V_B^2}$. Din a doua şi a treia ecuaţie rezultă

$$V_A = V_C = G.$$

Înlocuind acest rezultat în ecuaţia de momente şi simplificînd obţinem

$$G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha - T_A \cdot l \sin \alpha - M_f = 0,$$

deci

$$G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha - T_A \cdot l \sin \alpha \leqslant \mu r R_B.$$

Dar din echilibrul părţii AB rezultă: $V_B = 0$, $H_B = T_A$, deci $R_B = H_B$ şi relaţia de mai înainte devine

$$G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha - T_A \cdot l \sin \alpha \leqslant \mu r H_B$$

sau

$$T_A \geqslant G \frac{\frac{l}{2} \cos \alpha}{r + l \sin \alpha},$$

respectiv

$$fG \geqslant G \frac{\frac{l}{2} \cos \alpha}{\mu r + l \sin \alpha}.$$

Considerînd valoarea limită a unghiului α, ecuaţia trigonometrică rezultată are rădăcinile

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_{min}}{2} = \frac{-2f \pm \sqrt{4 \cdot f^2 \left(1 + \mu^2 \frac{r^2}{l^2}\right) + 1}}{1 + 2f\mu \frac{r}{l}}.$$

6.17. Să se determine reacţiunile din articulaţiile A, B, C şi D, astfel încît sistemul de bare din figura 6.17 să fie în echilibru.

Rezolvare. Se observă că reacţiunile din A, B, C şi D au direcţiile barelor respective, deoarece acestea sînt articulate la capete şi neîncărcate.

Aplicînd teorema solidificării, se obţin următoarele ecuaţii de echilibru:

$$\Sigma X_i = R_B \frac{\sqrt{2}}{2} - R_C \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma Y_i = R_A + R_B \frac{\sqrt{2}}{2} + R_C \frac{\sqrt{2}}{2} + R_D - P = 0$$

$$\Sigma M_{B_z} = - R_A \cdot 1{,}8 + P \cdot 0{,}45 + R_C \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1{,}80 + R_D \cdot 3{,}60 = 0$$

$$\Sigma M_M = - R_C \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}9 - R_D \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2{,}7 = 0.$$

Rezultă următoarele valori:

$$R_B = R_C = 265{,}95 \text{ kgf}$$

$$R_A = 187{,}5 \text{ kgf}$$

$$R_C = -62{,}5 \text{ kgf}.$$

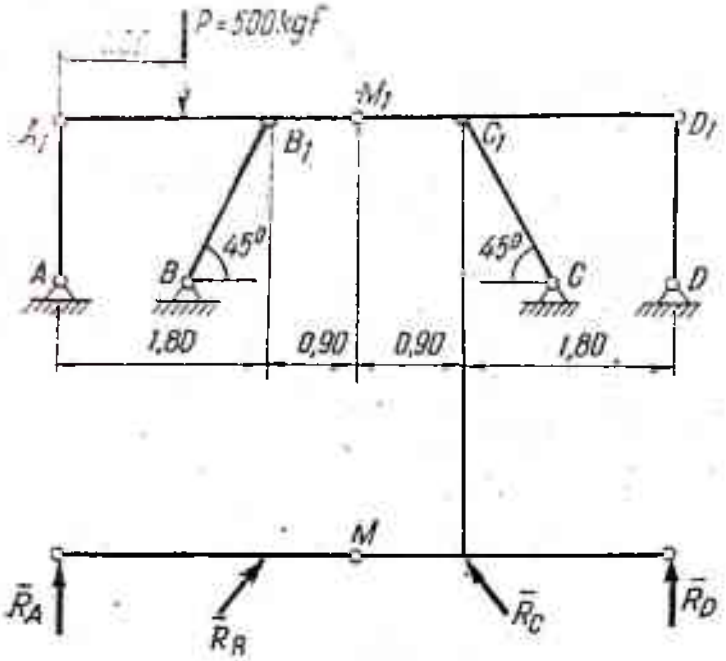


Fig. 6.17

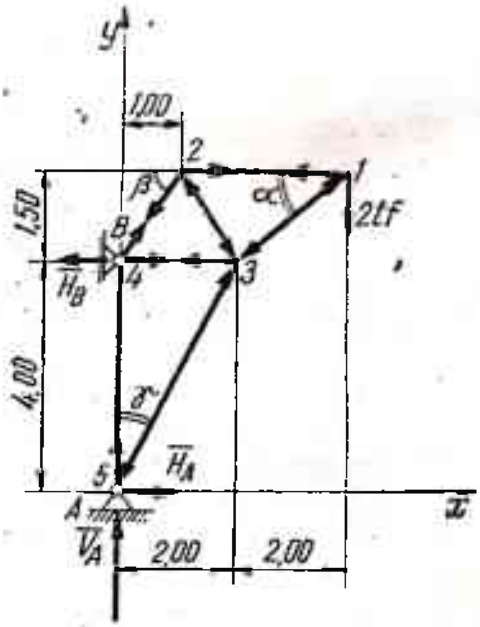


Fig. 6.18

6.18. Să se determine reacțiunile și eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 6.18.

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru pentru întreaga grindă sînt

$$\Sigma X_i = H_A - H_B = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_A - 2 = 0$$

$$\Sigma M_{At} = -2 \times 4 + 4H_B = 0$$

și rezultă

$$H_A = H_B = 2 \text{ tf}, \quad V_A = 2 \text{ tf}.$$

Ecuațiile de echilibru ale fiecărui nod în parte sînt

— pentru nodul 1

$$-S_{12} + D_{13} \cos \alpha = 0$$

$$D_{13} \sin \alpha - 2 = 0;$$

— pentru nodul 2

$$S_{21} - S_{24} \cos \beta - D_{23} \cos \beta = 0$$

$$-S_{24} \sin \beta + D_{23} \sin \beta = 0;$$

— pentru nodul 3

$$I_{35} \sin \gamma - D_{31} \cos \alpha + D_{32} \cos \beta + M_{34} = 0$$

$$I_{35} \cos \gamma - D_{31} \sin \alpha - D_{32} \sin \beta = 0;$$

— pentru nodul 4

$$-2 + S_{42} \cos \beta + M_{43} = 0$$

$$S_{42} \sin \beta - M_{45} = 0;$$

— pentru nodul 5

$$2 - I_{53} \sin \gamma = 0$$

$$2 + M_{45} - I_{53} \cos \gamma = 0,$$

unde $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}75$ $\sin \alpha = 0{,}6$ $\cos \alpha = 0{,}8$

$\operatorname{tg} \beta = 1{,}5$ $\sin \beta = 0{,}83$ $\cos \beta = 0{,}56$

$\operatorname{tg} \gamma = 0{,}5$ $\sin \gamma = 0{,}446$ $\cos \gamma = 0{,}895.$

Rezultă prin rezolvarea din aproape în aproape următoarele valori pentru eforturi

Bara	S_{12}	S_{24}	D_{13}	D_{23}	I_{35}	M_{34}	M_{45}
Efortul [tf]	+2,67	+2,4	−3,33	−2,4	−4,47	+0,67	2

Semnele (+) indică eforturi de întindere, semnele (—) de compresiune

6.19. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 6.19, *a* utilizînd metoda grafică Cremona.

Rezolvare. Din figura 6.19, *b* se obţin următoarele mărimi ale eforturilor din bare

Bara	S_{2-7}	S_{3-8}	S_{4-10}	S_{5-11}	I_{6-7}	I_{6-9}	I_{6-11}	D_{7-8}	D_{8-9}	D_{9-10}	D_{10-11}
Efortul [tf]	−7,78	−7,23	−7,31	−8,52	−7,69	+3,98	+7,05	−2,08	+4,24	+3,61	−1,6

Scanned with OKEN Scanner

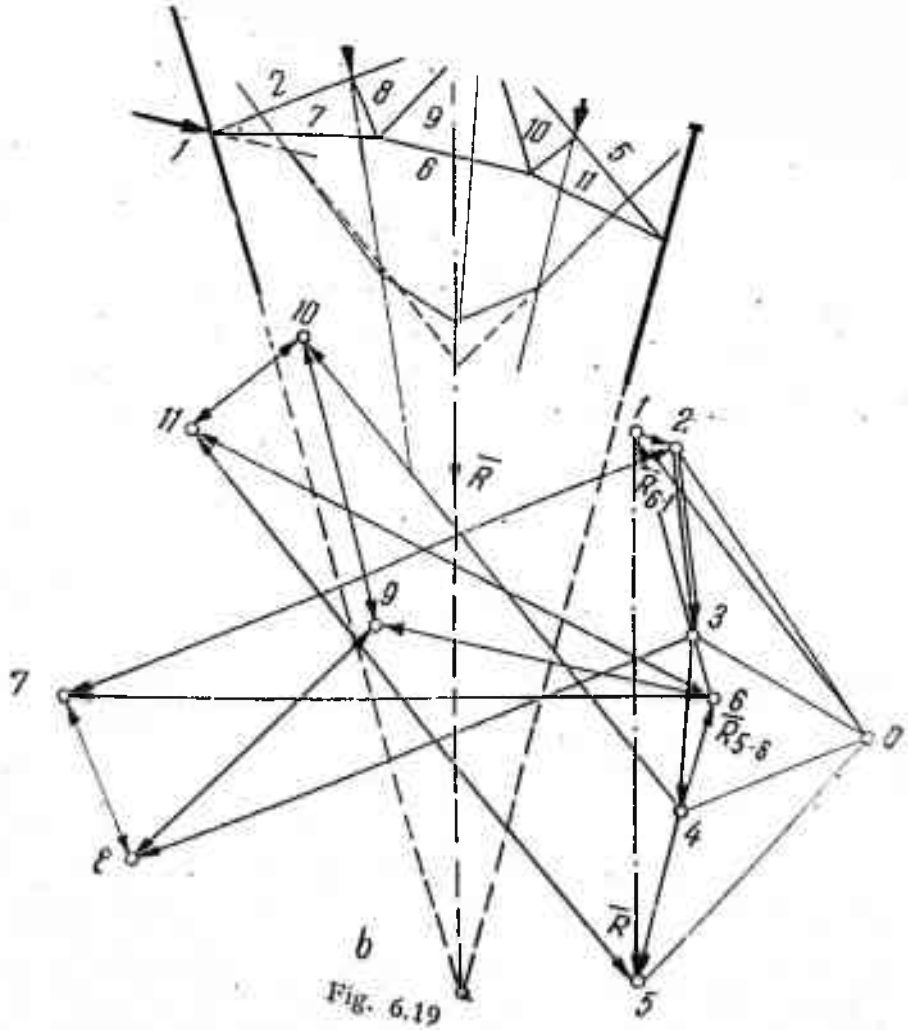
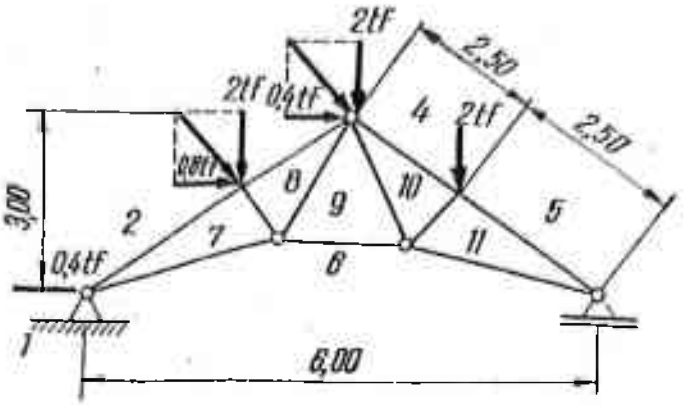
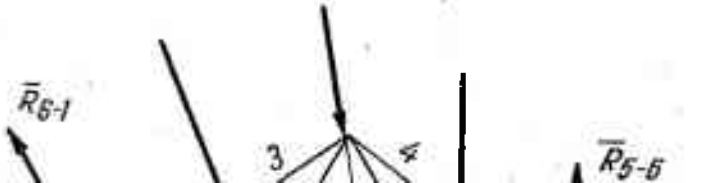

1
2
7
8
9
6
10
5
11
10
11
1
2
$\overline{R}$
$\overline{R}_6$
9
3
7
6
$\overline{R}_{5-6}$
0
4
8
$\overline{R}$
b
5

Fig. 6.19


2tf
2,50
2tf
0,4tf
4
2tf
2,50
0,8tf
8
9
10
5
3,00
2
7
11
0,4tf
6
1
6,00

a


$\overline{R}_{6-1}$
3
4
$\overline{R}_{5-6}$

6.20. Să se determine prin metoda secţiunilor eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 6.20, *a*.

Rezolvare. Pentru determinarea reacţiunilor din punctele *1* şi *5* se scriu ecuaţiile de echilibru pentru întreaga grindă

$$\Sigma Y_i = V_1 + V_5 - 6 = 0$$

$$\Sigma M_{1i} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 2\left(2 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) - 1 \cdot 4 + 4V_5 = 0.$$

Rezultă valorile reacţiunilor

$$V_1 = 3{,}25 \text{ tf}, \quad V_5 = 2{,}75 \text{ tf}.$$

Pentru determinarea eforturilor în barele *2—4*, *2—3* şi *1—3* se scriu ecuaţiile de echilibru ale porţiunii de grindă izolată prin secţiunea *1—1* (fig. 6.20, *b*).

$$\Sigma M_{2i} = -3{,}25 + 1 + I_{13} \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Sigma M_{3i} = -3{,}25 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - S_{24} \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 3{,}25 - 1 - 2 - D_{23}\frac{\sqrt{3}}{2} - S_{24} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Rezultă

$$I_{13} = 1{,}3 \text{ tf}, \quad S_{24} = -2{,}5 \text{ tf}, \quad D_{25} = 1{,}73 \text{ tf}.$$

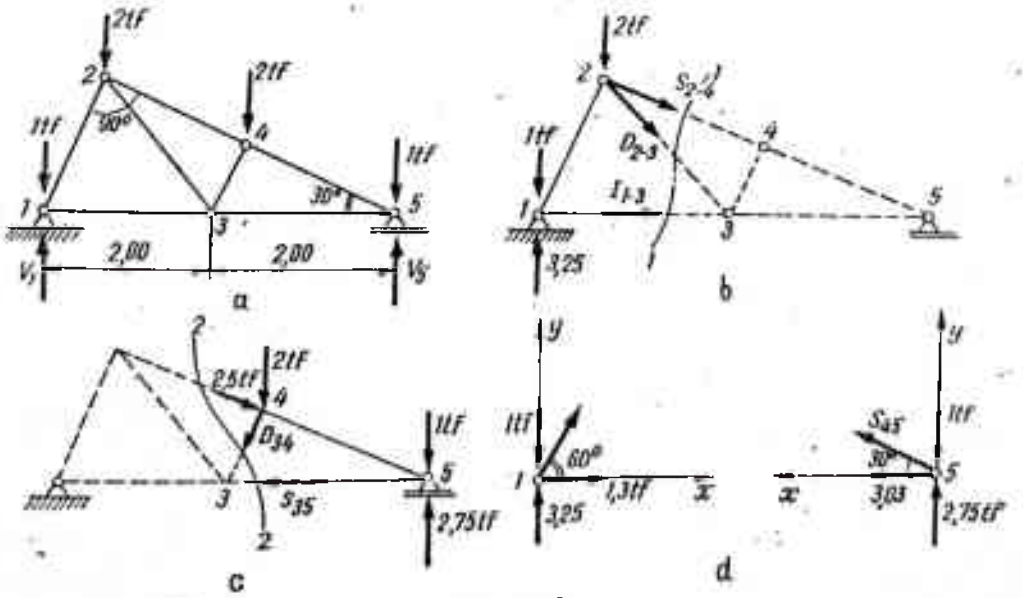


Fig. 6.20

Pentru determinarea eforturilor în barele *3—4*, *3—5* se utilizează ecuațiile de echilibru ale porțiunii din grindă izolate prin secțiunea *2—2* (fig. 6.20, *c*).

$$\Sigma M_{4i} = 1{,}75 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S_{35} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Sigma M_{5i} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + D_{34} \cdot \sqrt{3} = 0.$$

Rezultă

$$S_{35} = +\,3{,}03 \text{ tf}, \quad D_{34} = -\,1{,}73 \text{ tf}.$$

Semnul minus pentru efortul D_{34} arată că în această bară efortul este de compresiune și nu de întindere cum s-a presupus în figură.

Eforturile din barele *1—2* și *4—5* se obțin izolînd nodurile *1* și *5* (fig. 6.20, *d*) și scriind ecuațiile de echilibru corespunzătoare.

În nodurile *1* și *5* cîte o ecuație de proiecție pe axa Ox este suficientă pentru determinarea eforturilor S_{12}, respectiv S_{45}. Cea de-a doua proiecție pe axa Oy este identic satisfăcută în ambele cazuri. Ecuațiile de proiecție sînt în cele două cazuri

$$\Sigma Y_i = 2{,}25 + S_{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Sigma Y_i = 1{,}75 + S_{45} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Rezultă pentru eforturile S_{12} și S_{45} valorile

$$S_{12} = -\,2{,}6 \text{ tf}, \quad S_{45} = -\,3{,}5 \text{ tf}.$$

Cele două eforturi sînt și în acest caz compresiuni și nu întinderi așa cum s-a presupus inițial.

6.21. Să se determine eforturile din barele *6—8*, *6—C*, *5—B* și *3—5* ale grinzii cu zăbrele din figura 6.21, *a*.

Rezolvare. Din echilibrul întregii grinzi rezultă

$$V_1 = V_{13} = 2{,}5\,P.$$

Din echilibrul porțiunii de grindă izolată prin secțiunea $a - b$ (fig. 6.21, *b*) obținem ecuația

$$\Sigma M_{5i} = -\,S_{6\text{-}8} \cdot 2a + P \cdot 1{,}5a - 2{,}5P \cdot 3a = 0,$$

de unde

$$S_{6\text{-}8} = -\,3P.$$

Se face apoi secțiunea $c-d$ (fig 6.21, c) și se exprimă echilibrul porțiunii de grindă izolată

$$\Sigma M_{4i} = -2{,}5P \cdot 1{,}5a + I_{3-5} \cdot 2a = 0$$

$$I_{3-5} = \frac{3{,}75}{2} P = 1{,}875\ P.$$

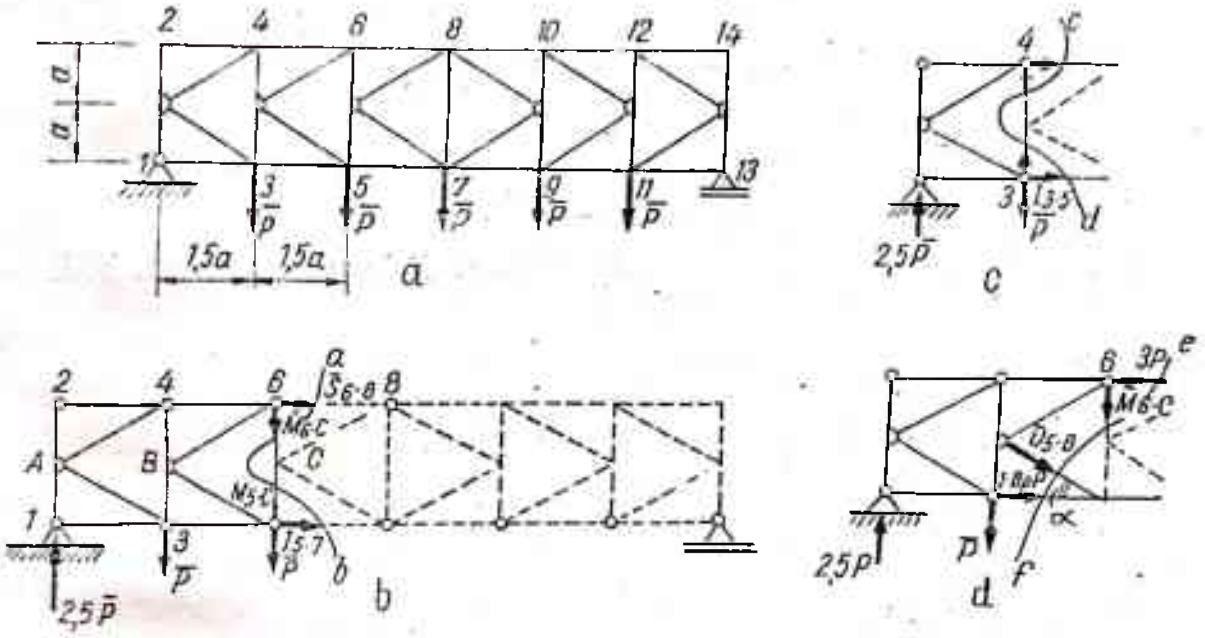


Fig. 6.21

Eforturile din barele $B-5$ și $6-C$ se obțin utilizînd secțiunea $e-f$ (fig. 6.21, d)

$$\Sigma X_i = -3P + 1{,}875P + D_{5-B} \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = -M_{6-C} + 1{,}5P - D_{5-B} \sin \alpha = 0,$$

dar

$$\cos \alpha = \frac{1{,}5a}{a\sqrt{2{,}25+1}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{3{,}25}} = 0{,}83$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3{,}25}} = 0{,}56;$$

rezultă deci

$$D_{5-B} = 1{,}34P \quad \text{și} \quad M_{3-C} = 0{,}75P.$$

6.22. Se dă firul acționat de forțele din fig. 6.22, avînd dimensiunile indicate pe aceeași figură. Să se determine tensiunile din fir și săgeata din punctul C.

Rezolvare. Echilibrul firului, considerat ca un solid, este dat de sistemul de ecuații

$$\Sigma X_i = -T_A \cos\alpha + T_B \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = (T_A + T_B)\sin\alpha - 3P = 0$$

$$\Sigma M_{Ai} = T_B \sin\alpha \cdot 4a - P \cdot 3a - P \cdot 2a - P \cdot a = 0.$$

Dar

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

și din primele ecuații avem

$$T_A = T_B = 3P\sqrt{5}.$$

Pentru a determina tensiunea pe porțiunea BC izolăm punctul B. Ecuațiile de echilibru ale punctului B sînt

$$\Sigma X_i = -T_A \cos\alpha + T_{BC}\cos\beta = 0$$

$$\Sigma Y_i = T_A \sin\alpha - T_{BC}\sin\beta - P = 0,$$

de unde

$$T_{BC} = 2P\sqrt{10}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}.$$

Săgeata din punctul C va fi

$$y_C = y_B + a\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{2} + a \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}a.$$

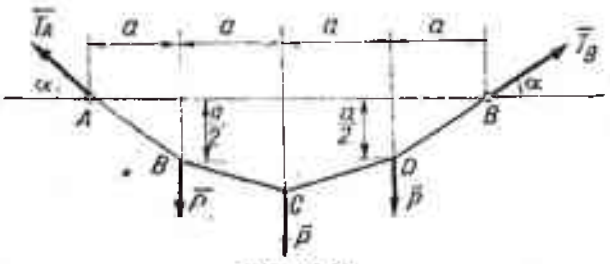


Fig. 6.22

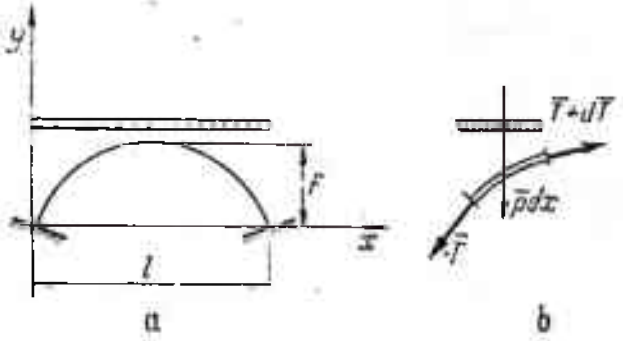


Fig. 6.23

6.23. Să se determine ce formă trebuie să se dea unei bolți pentru ca sub încărcarea cu o sarcină uniform distribuită pe orizontală (pe toată deschiderea bolții), aceasta să nu lucreze decît prin eforturi axiale (fig. 6.23, *a*).

Rezolvare. Un element de boltă este solicitat de forțele din fig. 6.23,*b*. Echilibrul lui se poate exprima prin relația vectorială

$$d\bar{T} + \bar{p}\,dx = 0$$

sau

$$\frac{d\bar{T}}{dx} + \bar{p} = 0.$$

Ecuaţiile scalare corespunzătoare sînt

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - p = 0.$$

Din a doua rezultă $T\frac{dx}{ds} = C$ sau $T = C\frac{ds}{dx}$, deci a treia devine

$$\frac{d}{dx}\left(C\frac{dy}{dx}\right) - p = 0 \text{ sau } C\frac{d^2y}{dx^2} = p.$$

Integrarea ultimei ecuaţii diferenţiale conduce la soluţiile

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{C}x + C_1$$

$$y = \frac{px^2}{2C} + C_1x + C_2.$$

Constantele de integrare C_1, C_2 şi C se determină cu condiţiile la limită

$$\text{a)}\ \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \qquad \text{b)}\ \begin{matrix} x = l \\ y = 0 \end{matrix} \qquad \text{c)}\ \begin{matrix} x = \frac{l}{2} \\ y = f \end{matrix}$$

şi rezultă valorile

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{4f}{l}, \quad C = \frac{-8f}{pl^2}.$$

Bolta va avea ca formă de echilibru o parabolă de ecuaţie

$$y = \frac{4fx}{l^2}(l - x).$$

6.24. Să se determine forma de echilibru a unui sistem de sfere de rază şi masă constantă, care s-ar rezema unele pe altele în formă de boltă, ca în figura 6.24, *a*.

Rezolvare. Bolta avînd sarcina uniform distribuită pe elementul de lungime, un element de arc este solicitat ca în figura 6.24, *b*.

Condiţia de echilibru a elementului ds este

$$\bar{p}\,ds + d\bar{T} = 0$$

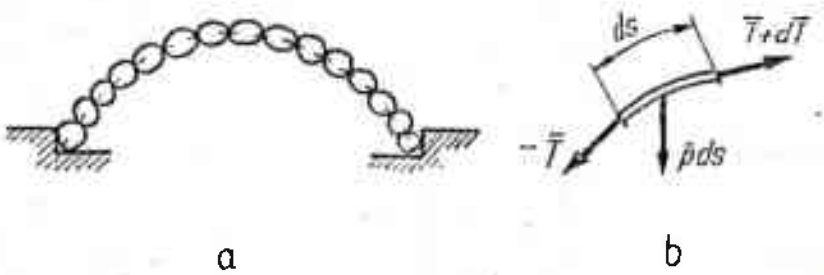


Fig. 6.24

ceea ce revine la ecuațiile scalare,

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - p\,ds = 0$$

(arcul comportîndu-se ca o figură plană).

Prin integrarea sistemului de ecuații, se obține soluția problemei

$$y - y_0 = \frac{C}{p}\,\mathrm{ch}\,\frac{p}{C}(x - x_0) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x - x_0}{a},$$

un lănțișor inversat, x_0, y_0 și C fiind constante de integrare.

6.25. Un fir este suspendat în punctele A și B, astfel încît tensiunea în punctele de suspensie este egală cu greutatea totală a firului (fig. 6.25). Să se determine: a) lungimea firului; b) săgeata f; c) unghiul tangentelor în A și B cu axa Ox.

Rezolvare. Forma de echilibru a firului este lănțișorul

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

Tensiunile în punctele A și B sînt

$$T_A = T_B = py_B = pa\,\mathrm{ch}\,\frac{l}{a} = pL \qquad \text{(a)}$$

și rezultă

$$pa\,\mathrm{ch}\,\frac{l}{a} = pL,$$

unde $L = 2a\,\mathrm{sh}\,\frac{l}{a}$ este lungimea firului.

Relația (a) se poate pune și sub forma

$$pa\,\frac{(e^{l/a} + e^{-l/a})}{2} = p \cdot 2a\left(\frac{e^{l/a} - e^{-l/a}}{2}\right),$$

de unde $e^{2l/a} = 3$.

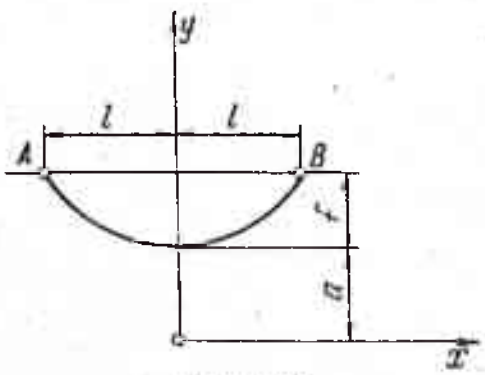


Fig. 6.25

Deci parametrul a al lănţişorului este

$$a = \frac{2l}{\ln 3}.$$

a) Lungimea firului este

$$L = 2a\frac{(e^{l/a} - e^{-l/a})}{2} = \frac{2l}{\ln 3}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4l}{\sqrt{3}\ln 3}.$$

b) Săgeata firului

$$f = y_B - a = a\,\mathrm{ch}\frac{l}{a} - a = \frac{2l}{\ln 3}\left(\frac{e^{l/a} + e^{-l/a}}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{2l}{\ln 3}\left(\frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} - 1\right) = \frac{2l}{\ln 3}\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).$$

c) Înclinarea tangentelor în A şi B cu axa Ox

$$\mathrm{tg}\,\alpha = y' = \mathrm{sh}\frac{l}{a} = \frac{e^{l/a} - e^{-l/a}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}.$$

6.26. Un fir omogen şi greu este suspendat în două puncte A şi B avînd o diferenţă de nivel $2\,h$. Lungimea $2\,L$ a firului, precum şi distanţa pe orizontală între A şi B, $2\,l$ sînt cunoscute (fig. 6.26). Să se determine parametrul lănţişorului a.

Rezolvare. Se observă din figură că avem relaţiile

$$2l = l_1 + l_2$$

$$2h = h_2 - h_1.$$

Lungimea totală a lănţişorului este

$$2L = L_1 + L_2 = a\left(\mathrm{sh}\frac{l_1}{a} + \mathrm{sh}\frac{l_2}{a}\right).$$

De asemenea

$$2h = h_2 - h_1 = a\left(\mathrm{ch}\frac{l_2}{a} - \mathrm{ch}\frac{l_1}{a}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ridicînd la pătrat aceste două relații și scăzînd a doua din prima, obținem

$$L^2 - h^2 = \frac{a^2}{4}\left(\mathrm{sh}^2\frac{l_1}{a} + \mathrm{sh}^2\frac{l_2}{a} + 2\,\mathrm{sh}\frac{l_1}{a}\,\mathrm{sh}\frac{l_2}{a} - \mathrm{ch}^2\frac{l_2}{a} - \mathrm{ch}^2\frac{l_1}{a} + \right.$$

$$\left. + 2\,\mathrm{ch}\frac{l_2}{a}\,\mathrm{ch}\frac{l_1}{a}\right) = \frac{a^2}{4}\left(-2 + 2\,\mathrm{ch}\frac{l_1 + l_2}{a}\right) = a^2\,\mathrm{sh}^2\frac{l}{a},$$

deci

$$a\,\mathrm{sh}\frac{l}{a} = \sqrt{L^2 - h^2},$$

de unde se poate calcula valoarea parametrului a, dezvoltînd în serie funcția $\mathrm{sh}\frac{l}{a}$ și considerînd numai primii doi termeni ai dezvoltării.

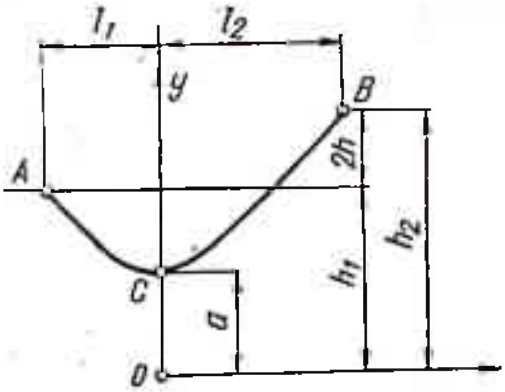


Fig. 6.26

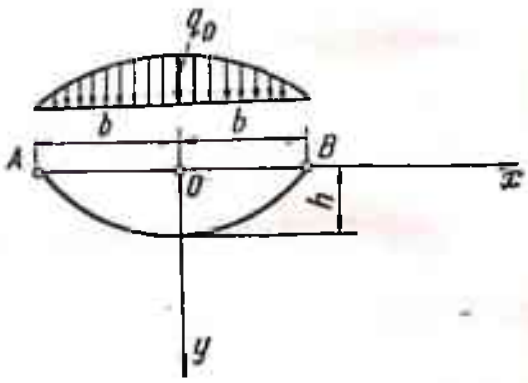


Fig. 6.27

6.27. Un fir este suspendat în punctele A și B situate pe aceeași orizontală (fig. 6.27). Sub acțiunea încărcării repartizate pe orizontală, firul ia o formă de echilibru după ecuația $y = h\cos\frac{\pi x}{2b}$.

Care este legea de variație a încărcării?

Rezolvare. Proiectînd pe axele Ox și Oy ecuațiile diferențiale de echilibru ale unui element de fir ds, obținem sistemul

$$\mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0, \quad \mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) + q\,\mathrm{d}x = 0.$$

Din prima ecuație rezultă

$$T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = C, \quad \text{deci} \quad T = C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

şi introducînd această valoare în a doua, obţinem ecuaţia

$$d\left(C\frac{dy}{dx}\right) + q\,dx = 0.$$

Dar

$$y = h\cos\frac{\pi x}{2b}$$

$$\frac{dy}{dx} = -h\frac{\pi}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b},$$

deci

$$q = hC\frac{\pi^2}{4b^2}\cos\frac{\pi x}{2b}.$$

Cu condiţiile iniţiale: $x = 0$, $q = q_0$, valoarea constantei C devine

$$C = \frac{q_0 4b^2}{h\pi^2}.$$

Legea de variaţie a încărcării va fi

$$q = q_0\cos\frac{\pi x}{2b} = q_0\frac{y}{h}.$$

6.28. Un cablu omogen AC, de lungime l şi greutate p kgf/m, este suspendat în A şi rezemat pe un plan înclinat (fig. 6.28, *a*). Cunoscînd unghiurile α şi β dintre tensiunea în A şi planul orizontal şi dintre planul înclinat şi planul orizontal, să se determine lungimea l_1 a firului rezemat de plan.

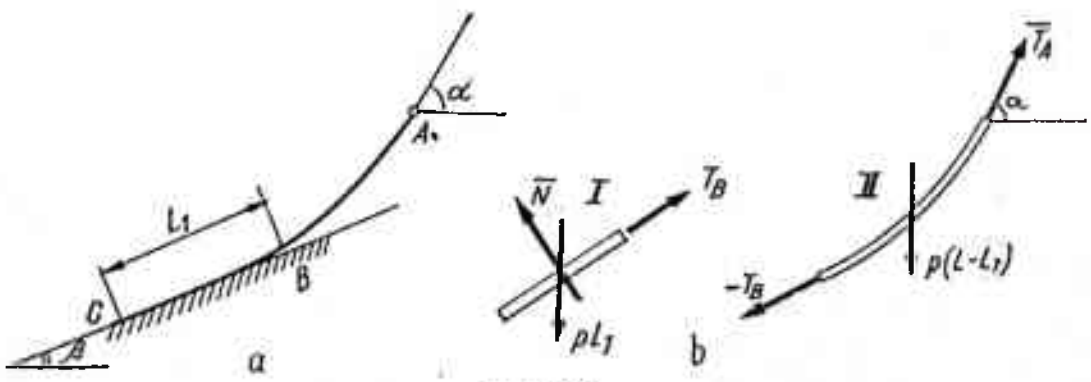


Fig. 6.28

Rezolvare. Considerăm firul format din două porţiuni distincte: o primă porţiune BC rezemată pe planul înclinat şi cea de-a doua porţiune AB care atîrnă din punctul A pînă pe planul înclinat (fig. 6.28,*b*).

Ecuațiile de echilibru pentru cele două porțiuni sînt

I. $T_B - pl_1 \sin\beta = 0$

II. $-T_B \cos\beta + T_A \cos\alpha = 0$

$-T_B \sin\beta - p(l - l_1) + T_A \sin\alpha = 0.$

Din primele două relații rezultă

$$T_B = pl_1 \sin\beta, \quad T_A = T_B \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = pl_1 \frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Introducînd aceste valori în a treia ecuație se obține pentru determinarea lungimii l_1 ecuația

$$-pl_1 \sin^2\beta - p(l - l_1) + pl_1 \sin\beta\cos\beta \operatorname{tg}\alpha = 0,$$

de unde

$$l_1 = \frac{l\cos\alpha}{\cos\beta(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)} = \frac{l\cos\alpha}{\cos\beta\cos(\alpha - \beta)}.$$

6.29. Care trebuie să fie legea de variație a greutății p N/m a unui fir pentru ca forma de echilibru a acestuia să fie un semicerc (fig. 6.29)? În punctul C ordonata încărcării este p_0.

Rezolvare. Ecuația diferențială a echilibrului unui element de fir este

$$\frac{d}{ds}\bar{T} + \bar{p} = 0.$$

Proiecțiile ecuației pe axele Ox și Oy ale sistemului cartezian xOy sînt

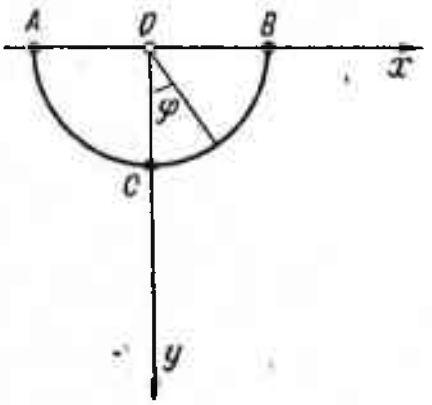


Fig. 6.29

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + p = 0.$$

Din prima ecuație obținem

$$T\frac{dx}{ds} = C,$$

iar a doua devine

$$\frac{d}{ds}\left(C\frac{dy}{dx}\right) + p = 0.$$

Dar

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx,$$

deci

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{Cx}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) + p\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$$

sau

$$\frac{CR^2}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{pR}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

şi

$$p = \frac{CR}{(R^2 - x^2)}.$$

Pentru determinarea constantei C utilizăm condiţiile iniţiale ale problemei

$$x = 0, \quad p = p_0 = \frac{C}{R}, \quad \text{deci} \quad C = p_0 R$$

şi obţinem legea de variaţie a greutăţii

$$p = \frac{p_0 R^2}{(R^2 - x^2)} = \frac{p_0 R^2}{R^2 - R^2 \sin^2 \varphi} = \frac{p_0}{\cos^2 \varphi}.$$

Problema nu admite o soluţie aplicabilă în practică, deoarece în punctele de suspensie A şi B tensiunea şi sarcina iau valori infinite: $\cos \varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $p = \infty$.

6.30. Roata unui troliu de rază R este oprită cu ajutorul frînei cu bandă de frînare din figura 6.30. Cunoscînd lungimea L a barei OA de greutate neglijabilă şi coeficientul de frecare f dintre banda de frînare şi roată, să se determine forţa $\bar{F}$ necesară pentru a menţine roata în echilibru.

Rezolvare. Din echilibrul roţii se obţine ecuaţia

$$\Sigma M_{O_1 z} = T_2 R - T_1 R - Qr = 0$$

la care se adaugă inegalitatea din frecare

$$T_2 \leqslant T_1 e^{f\pi}.$$

Rezultă pentru tensiuni valorile

$$T_1 = \frac{Qr}{R(e^{f\pi} - 1)},$$

$$T_2 = \frac{Qre^{f\pi}}{R(e^{f\pi} - 1)}.$$

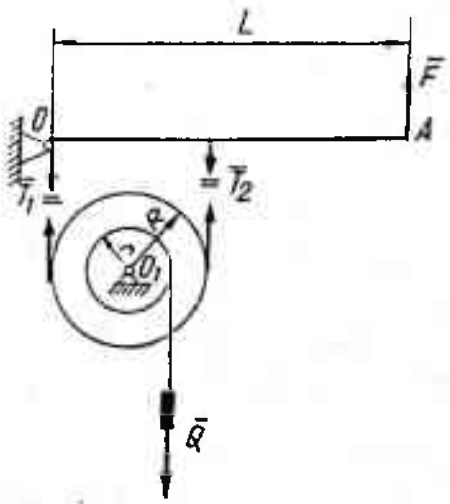


Fig. 6.30

Mărimea forţei $\bar{F}$ se obţine scriind echilibrul barei OA,

$$FL - T_2 \cdot 2R = 0$$

de unde

$$F = \frac{2Qre^{f\pi}}{L(e^{f\pi} - 1)}.$$

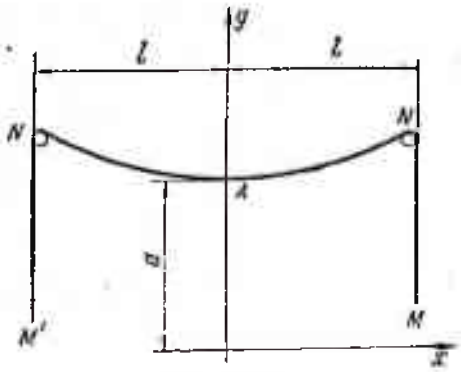


Fig. 6.31

6.31. Un fir omogen $MNN'M'$ de lungime $2L$ și greutate p kgf/m este suspendat în punctele N și N' situate într-un plan orizontal, la distanța $NN' = 2l$, astfel încît porțiunile lui MN și $N'M'$ care atîrnă vertical sînt egale. Neglijîndu-se frecarea pe reazeme, să se determine lungimea $2s$ a arcului NAN' (fig. 6.31).

Rezolvare. Arcul NAN' are forma unui lănțișor de ecuație

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

În punctul N avem:

$$y_N = \frac{a}{2}\left(e^{l/a} + e^{-l/a}\right).$$

Lungimea s a arcului AN este

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^l \operatorname{ch} \frac{x}{a}\,dx = a \operatorname{sh} \frac{l}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{l/a} - e^{-l/a}\right)$$

Pentru ca firul să fie în echilibru, trebuie ca greutatea porțiunii verticale MN să fie egală cu tensiunea din N,

$$py_N = p(L - s),$$

adică

$$\frac{a}{2}\left(e^{l/a} + e^{-l/a}\right) = L - \frac{a}{2}\left(e^{l/a} - e^{-l/a}\right),$$

de unde se obține:

$$ae^{l/a} - L = 0.$$

Din această ecuație rezultă parametrul a al lănțișorului, și prin urmare lungimea sa $2s$. Se observă că primul ei membru devine infinit pentru $a = 0$ și $a = \infty$, iar pentru $a = l$ capătă valoarea minimă $le - L = 0$.

Dacă $L > le$ ecuația are două rădăcini, deci există două poziții de echilibru; pentru $L < le$ nu există nici o poziție de echilibru.

Probleme propuse pentru rezolvare

6.32. Doi cilindri de raze R și r sînt strînși printr-un fir care-i înconjură (fig. 6.32) și care are pe toată lungimea lui o tensiune constantă T. Să se determine reacțiunea N exercitată de fiecare cilindru asupra celuilalt.

R. $N = \frac{4T\sqrt{Rr}}{R + r}$.

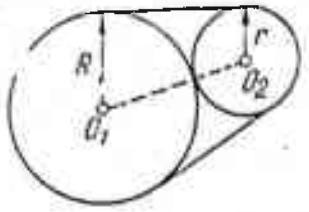


Fig. 6.32

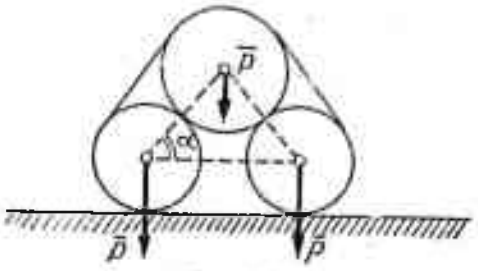


Fig. 6.33

6.33. Trei sfere identice de raze r şi greutate $\bar{P}$ sînt legate cu un fir şi aşezate pe un plan orizontal luciu (fig. 6.33). Cunoscînd unghiul α şi neglijînd frecările să se determine tensiunea din fir.

R. $T = \frac{P}{2} \operatorname{cotg} \alpha$.

6.34. Pe doi semicilindri de raze $2R$ şi R şi greutăţi $2\bar{G}$ şi $\frac{\bar{G}}{2}$, rezemaţi pe un plan orizontal ca în fig. 6.34, se reazemă un cilindru de greutate $\bar{G}$ şi rază R. Ce forţe orizontale $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ trebuie aplicate în planul orizontal pentru ca sistemul să fie în echilibru.

R. $F_1 = F_2 = \frac{7G}{2\sqrt{2}}$.

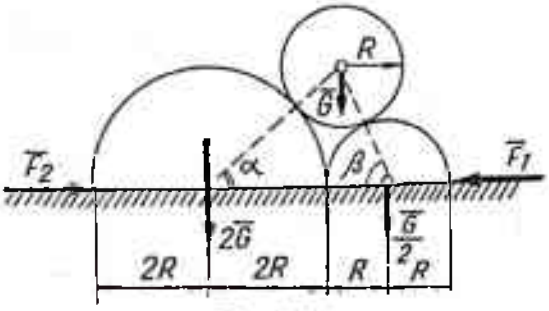


Fig. 6.34

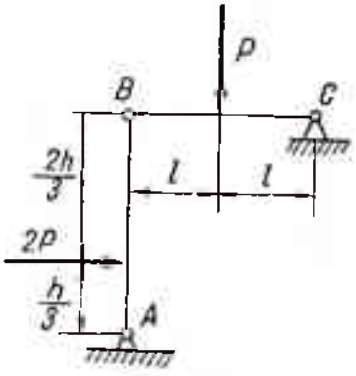


Fig. 6.35

6.35. Să se determine reacţiunile din articulaţiile A, B, C ale cadrului din figura 6.35.

R. $H_A = \frac{4P}{3}$, $V_A = \frac{P}{2}$, $H_B = \frac{2P}{3}$, $V_B = \frac{P}{2}$, $H_C = \frac{2P}{3}$, $V_C = \frac{P}{2}$.

6.36. O scară alcătuită din două bare de greutate $\bar{P}$, şi lungime $2\,l$, articulate între ele, se reazemă cu frecare pe sol (fig. 6.36). Cunoscînd coeficientul de frecare dintre bare şi sol, $f = \operatorname{tg} \varphi$, pentru ce valori ale unghiului α este posibil echilibrul?

R. $\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2 \operatorname{tg} \varphi$.

Scanned with OKEN Scanner

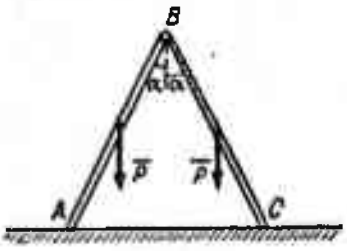


Fig. 6.36

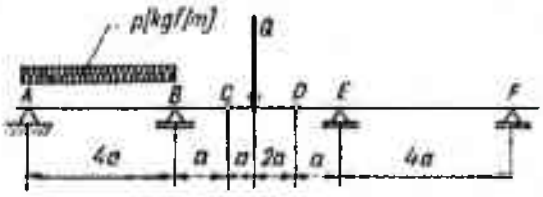


Fig. 6.37

6.37. Să se calculeze reacţiunile grinzii cu console din figura 6.37. Pe deschiderea AB grinda este încărcată cu o sarcină uniform distribuită p kgf/m, iar pe deschiderea CD acţionează o forţă concentrată Q.

R. $V_A = \frac{12pa - Q}{6}$, $V_B = \frac{12pa + 5Q}{6}$, $V_E = \frac{5Q}{12}$, $V_F = -\frac{Q}{12}$.

6.38. O bară omogenă OA, articulată în O, de lungime $2l$ şi greutate $\bar{P}$, se reazemă pe un cilindru de rază r şi greutate $\bar{Q}$ aşezat pe un plan orizontal (fig. 6.38).

Cunoscînd coeficientul de frecare $f = \operatorname{tg} \varphi$ dintre bară şi cilindru şi dintre cilindru şi planul orizontal să se determine unghiul α pentru poziţia de echilibru. Se neglijează efectul frecării de rostogolire.

R. $\alpha \leqslant 2\varphi$.

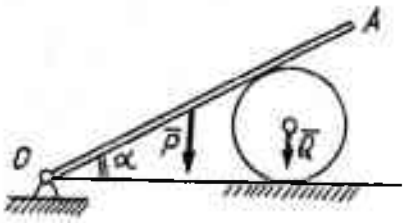


Fig. 6.38

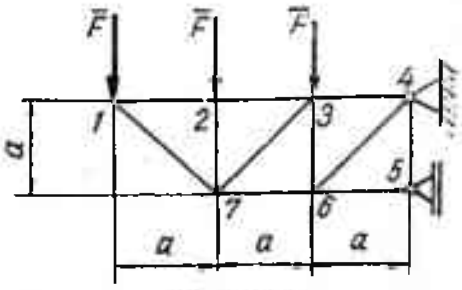


Fig. 6.39

6.39. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 6.39.

R. $S_{12} = F$, $I_{56} = -6F$

$S_{23} = F$, $I_{67} = -3F$

$S_{34} = 3F$, $D_{17} = \frac{2F}{\sqrt{2}}$

$D_{37} = \frac{4F}{\sqrt{2}}$, $D_{46} = \frac{6F}{\sqrt{2}}$

$M_{27} = -F$, $M_{36} = -3F$, $M_{45} = 0$.

6.40. Să se determine prin metoda secţiunilor eforturile în barele *4—5*, *4—9* şi *10—9* ale grinzii cu zăbrele din figura 6.40.

R. $S_{45} = -40$ tf, $D_{49} = -\frac{10}{\sqrt{2}}$ tf, $I_{10-9} = +45$ tf.

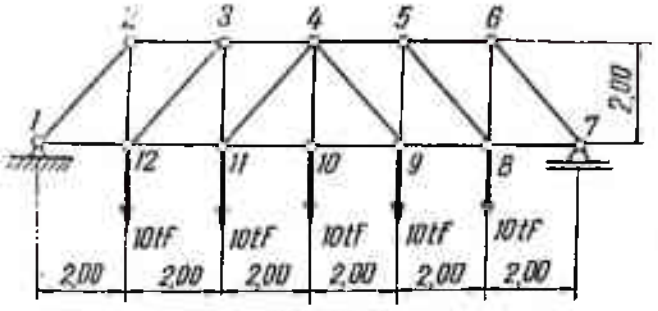


Fig. 6.40

6.41. Un fir omogen şi greu, de lungime l, încărcat cu o sarcină de p kgf/m, este suspendat în punctele A şi B nesituate pe aceeaşi orizontală. Unghiurile tangentelor la fir duse în punctele A şi B cu orizontala sînt α şi β (fig. 6.41).

Să se determine tensiunile din punctele A şi B şi diferenţa de înălţime h dintre aceste două puncte.

R. $T_A = \frac{pl \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $T_B = \frac{pl \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

$$h = \frac{l(\cos \alpha - \cos \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

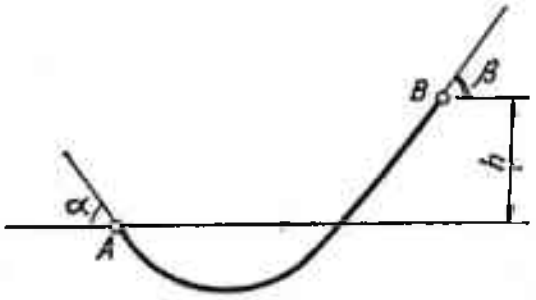


Fig. 6.41

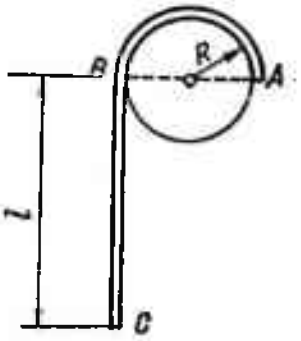


Fig. 6.42

6.42. Un fir de greutate p kgf/m este înfăşurat pe un disc fix de rază R porţiunea BC de lungime l atîrnînd de pe disc (fig. 6.42). Cunoscînd coeficientul de frecare $f = \operatorname{tg} \varphi$ dintre fir şi disc să se determine valoarea maximă a lungimii l pentru care echilibrul este posibil.

R. $l = R \sin 2\varphi \, (e^{f\pi} + 1)$.

Partea a doua

CINEMATICA

Scanned with OKEN Scanner

VII. CINEMATICA PUNCTULUI

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului. Se studiază mişcarea unui punct faţă de un sistem de referinţă fix şi se determină, pentru diferite tipuri de probleme, poziţia, viteza şi acceleraţia punctului în orice moment.

Poziţia punctului la un moment dat se defineşte prin vectorul de poziţie

$$\bar{r} = \bar{r}(t),$$

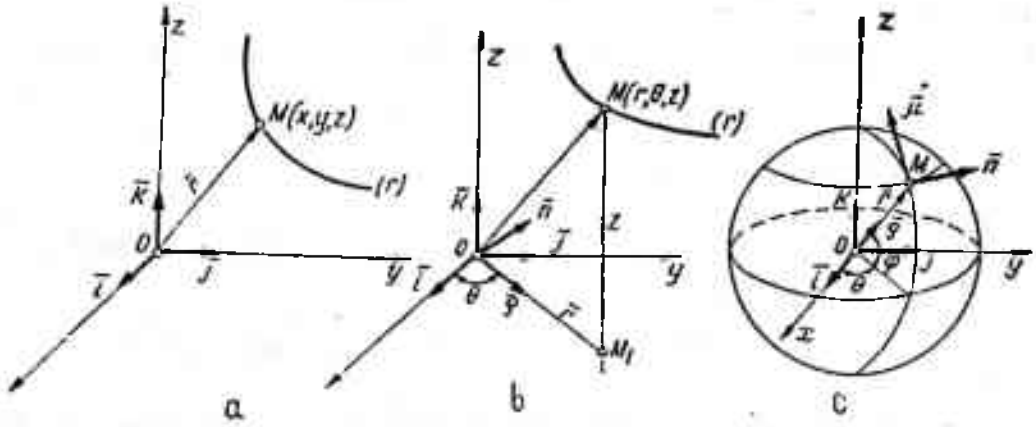


Fig. VII.1

ceea ce este echivalent cu cunoaşterea a trei ecuaţii scalare a căror expresie depinde de sistemul de referinţă în care se lucrează. Cele trei ecuaţii scalare se exprimă uzual sub următoarele forme:

— în sistemul de coordonate carteziene (fig. VII.1, *a*)

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t);$$

— în sistemul de coordonate cilindrice (fig. VII.1, *b*)

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = z(t);$$

— în sistemul de coordonate sferice (fig. VII.1, *c*)

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de punctul de mişcare constituie *traiectoria*.

Viteza punctului la un moment dat se defineşte prin

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$$

şi este un vector tangent la traiectorie, avînd sensul mişcării pe traiectorie.

Vectorul viteză poate fi exprimat în diferite sisteme de coordonate după cum urmează:

— în sistemul de coordonate carteziene

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \quad |\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

unde $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sînt versorii axelor sistemului de referinţă cartezian $Oxyz$, iar $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ sînt proiecţiile vitezei pe aceleaşi axe;

— în sistemul de coordonate cilindrice

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{n} + \dot{z}\bar{k}, \quad |\bar{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2},$$

unde $\bar{\rho}$ este versorul proiecţiei vectorului de poziţie în planul xOy (fig. VII.1,*b*), $\bar{n}$ este versorul direcţiei perpendiculare pe proiecţia vectorului de poziţie în planul xOy, $\bar{k}$ este versorul axei Oz.

În cazul particular al coordonatelor polare ($z = 0$) aceste formule devin

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{n}, \quad |\bar{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2};$$

— în sistemul de coordonate sferice

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\varphi}\bar{\mu} + r\cos\varphi \cdot \dot{\theta}\bar{n}, \quad |\bar{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\varphi},$$

unde $\bar{\rho}$ este versorul razei vectoare, $\bar{\mu}$ este versorul direcţiei tangentei la meridianul ce trece prin punct şi $\bar{n}$ este versorul tangentei la paralelul care trece prin punct (fig. VII.1, *c*);

— într-un sistem de coordonate intrinseci (axele triedrului lui Frenet)

$$\bar{v} = v\bar{\tau} = \dot{s}\bar{\tau},$$

unde $\bar{\tau}$ este versorul tangentei la traiectorie, iar s măsoară arcul de curbă dintr-un punct al curbei considerat ca origine, pînă în punctul în care se calculează viteza (fig. VII. 2).

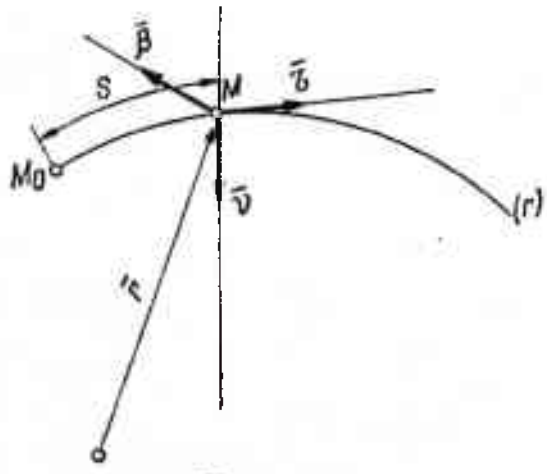


Fig. VII.2

Accelerafia punctului la un moment dat este

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}$$

şi este un vector îndreptat către centrul de curbură al traiectoriei.

Ca și viteza, accelerația poate fi exprimată în diferite sisteme de referință după cum urmează:

— în sistemul de coordonate carteziene

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}, \quad |\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

unde $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ sînt proiecțiile accelerației pe axele sistemului de coordonate carteziene $Oxyz$;

— în sistemul de coordonate cilindrice

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{\rho} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\bar{n} + \ddot{z}\bar{k}, \quad |\bar{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

(cu aceleași notații utilizate în cazul vitezelor). În cazul particular al coordonatelor polare, formulele devin

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{\rho} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\bar{n}, \quad |\bar{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2};$$

— în sistemul de coordonate sferice

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\cos^2\varphi\cdot\dot{\theta}^2)\,\bar{\rho} + (2\dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi - 2r\sin\varphi\cdot\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\cos\varphi\cdot\ddot{\theta})\,\bar{n} +$$
$$+ (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} + r\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\theta}^2)\,\bar{\mu}$$

$$\bar{a} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\cos^2\varphi\cdot\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi - 2r\sin\varphi\cdot\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\cos\varphi\cdot\ddot{\theta})^2 +}$$
$$\overline{+ (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} + r\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\theta}^2)^2};$$

— în sistemul de coordonate intrinseci (axele triedrului lui Frenet)

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{\nu} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{\nu}, \quad |\bar{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2},$$

unde $\bar{\nu}$ este versorul normalei principale la traiectorie dirijată către centrul de curbură, iar ρ este raza de curbură a traiectoriei în punctul respectiv. Din ultimele formule rezultă expresia razei de curbură într-un punct pe o curbă, sub forma

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{|\bar{a}|^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}.$$

Cazuri particulare de mișcări ale punctului. a) *Mișcarea rectilinie uniformă* (fig. VII.4) este singura mișcare în care accelerația este nulă. Ecuația de mișcare (*ecuația orară*) este

$$x = x_0 + v_0 t, \quad v = v_0 = \text{const.},$$

unde x_0 și v_0 sînt constante.

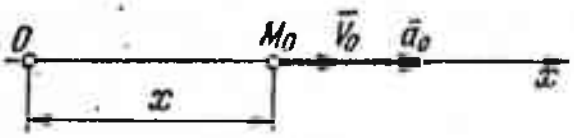


Fig. VII.3

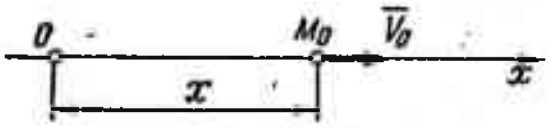


Fig. VII.4

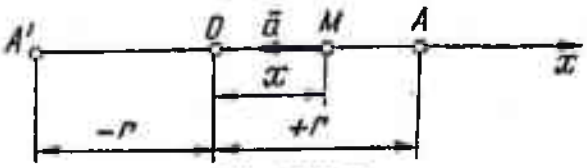


Fig. VII.5

b) *Mişcarea rectilinie uniform variată* (fig. VII. 3) are ecuaţia de mişcare

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 ,$$

unde x_0, v_0 şi a_0 sînt constante

$$v = v_0 + a_0 t, \quad a = a_0 = \text{const.}$$

c) *Mişcarea rectilinie oscilatorie armonică* (fig. VII. 5)

$$x = A \sin (\omega t + \varphi)$$

$$v = \dot{x} = A\omega \cos (\omega t + \varphi)$$

$$a = \ddot{x} = - A\omega^2 \sin (\omega t + \varphi) = - \omega^2 x,$$

unde A, ω şi φ sînt constante.

Probleme rezolvate

7.1. Două mobile se mişcă în linie dreaptă unul către celălalt. Primul pleacă din punctul A, cu o mişcare uniformă cu viteza v_1; al doilea pleacă în acelaşi moment din punctul B spre A şi are o mişcare accelerată cu viteza iniţială v_0 şi acceleraţia a (fig. 7.1, *a*).

Cunoscînd distanţa $AB = d$ să se determine locul de întîlnire şi timpul după care se întîlnesc mobilele.

Rezolvare. Mobilul care pleacă din A se mişcă după legea

$$\dot{x} = v_1, \quad \text{de unde} \quad x = v_1 t + C_1.$$

Condiţiile iniţiale sînt: la $t = 0$, $x = 0$, deci rezultă $C_1 = 0$, iar ecuaţia mişcării devine (fig. 7.1)

$$\dot{x}_A = v_1, \quad x_A = v_1 t.$$

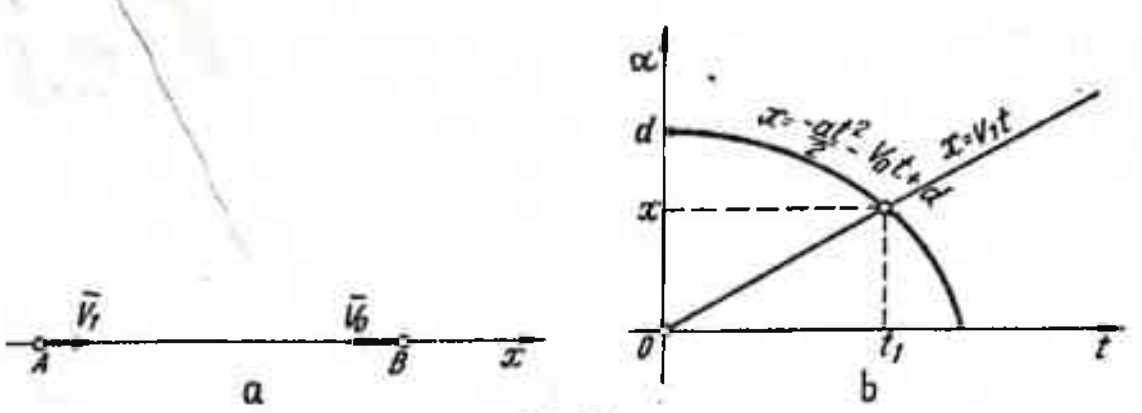


Fig. 7.1

Mobilul care pleacă din B are accelerația a negativă $\ddot{x} = -a$, iar condițiile inițiale sînt: la $t = 0$, $x = d$, $\dot{x} = -v_0$.

Mișcarea mobilului se definește prin ecuația

$$\dot{x} = -at + C_2 \text{ sau } x = -\frac{at^2}{2} + C_2t + C_3.$$

Utilizînd condițiile inițiale date, se obțin pentru constantele C_2 și C_3 valorile

$$C_2 = -v_0, \quad C_3 = d,$$

astfel încît ecuația de mișcare ia forma

$$\dot{x}_B = -at - v_0 \quad \text{sau} \quad x_B = -\frac{at^2}{2} - v_0t + d.$$

Cele două mobile se vor întîlni cînd

$$x_A = x_B,$$

adică

$$v_1t_1 = -\frac{at_1^2}{2} - v_0t_1 + d.$$

Rezultă pentru timpul t_1

$$t_1 = \frac{-(v_0 + v_1) \pm \sqrt{(v_0 + v_1)^2 + 2ad}}{a}.$$

Abscisa punctului de întîlnire este

$$x = v_1t_1$$

(pentru valoarea lui t_1 se va lua în considerare numai expresia radicalului cu semnul plus, timpul trebuind să fie pozitiv).

7.2. Mecanicul unui tren care merge cu viteza de 60 km/h vede trecînd în sens contrar un alt tren timp de 10 s. Să se determine lungimea celuilalt tren, care merge tot cu 60 km/h.

Rezolvare. $L = 2 \cdot 60\,000 \cdot \frac{1}{3\,600} \cdot 10 = 333$ m.

7.3. Se dă o mişcare definită prin ecuaţiile parametrice

$$x = 2e^t - 1, \quad y = 2e^t + 1.$$

Să se determine traiectoria mobilului, viteza şi acceleraţia la un moment dat.

Rezolvare. Eliminînd parametrul t între cele două ecuaţii, obţinem

$$y = x + 2,$$

deci ecuaţia traiectoriei este dreapta

$$x - y + 2 = 0.$$

Componentele vitezei sînt

$$\dot{x} = 2e^t, \quad \dot{y} = 2e^t,$$

iar modulul ei

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2\sqrt{2}e^t.$$

Componentele acceleraţiei sînt

$$\ddot{x} = 2e^t, \quad \ddot{y} = 2e^t,$$

iar modulul ei

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2\sqrt{2}e^t.$$

Punctul descrie o mişcare rectilinie: viteza şi acceleraţia sînt coliniare.

7.4. Un punct descrie o dreaptă după legea $s = 3v^4 - 2$, s fiind spaţiul parcurs cu viteza v. După cît timp viteza mobilului devine dublul vitezei iniţiale?

$$s = 3v^4 - 2 \quad ; \quad \frac{ds}{dt} = 12v^3 \frac{dv}{dt}$$

$$v = 12v^3 \frac{dv}{dt} \quad ; \quad dt = 12v^2\,dv$$

$$t = \frac{12v^3}{3} + C \quad ; \quad 0 = 4v_0^3 + C; \quad C = 4v_0^3$$

$$t = 4v^3 - 4v_0^3; \quad \text{pentru } v = 2v_0, \quad t = 28v_0^3$$

7.5. Un mobil descrie axa Ox după legea $x = 2t - 6t^3$. Să se exprime accelerația mobilului cînd x este maximum.

$$\dot{x} = 2 - 18t^2; \qquad \ddot{x} = -36t$$

Pentru $\dot{x} = 2 - 18t^2 = 0, \quad t = \frac{1}{3}.$

Rezultă $\ddot{x} = -36\frac{1}{3} = -12 \text{ m/s}^2$

7.6. Un mobil este lansat în vid, de jos în sus cu viteza inițială $\bar{v}_0$ (fig. 7.6, *a*). Știind că mobilul este acționat de accelerația gravitației $\bar{g}$, să se studieze mișcarea, să se determine înălțimea maximă h_{max} la care ajunge și viteza cu care atinge pămîntul. Să se reprezinte grafic diagramele mișcării și vitezei.

Rezolvare. Accelerația punctului este egală cu accelerația gravitației, deci

$$\ddot{x} = -g$$

sau

$$\dot{x} = -gt + C_1$$

sau

$$x = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

La $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, deci constantele au valorile: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$.

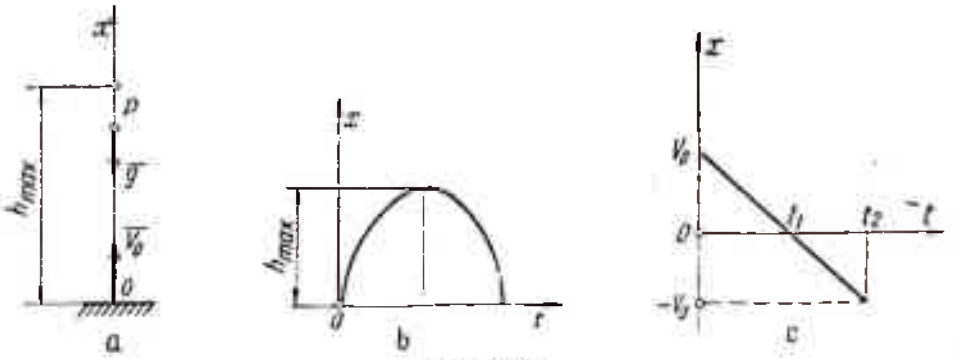


Fig. 7.6

Ecuația mișcării devine

$$\ddot{x} = -g$$

sau

$$\dot{x} = -gt + v_0.$$

sau

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t.$$

Înălțimea maximă h_{max} este atinsă în momentul t_1 cînd viteza punctului se anulează ($\dot{x} = 0$), adică

$$-gt_1 + v_0 = 0, \quad t_1 = \frac{v_0}{g}$$

și

$$h_{max} = -\frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} + v_0\frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

La coborîre ecuația mișcării devine

$$\ddot{x} = -g$$

$$\dot{x} = -gt + C_3$$

$$x = -\frac{gt^2}{2} + C_3t + C_4.$$

Cu condițiile inițiale: $t = t_1, x = h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$, $\dot{x} = 0$, constantele sînt

$$C_3 = gt_1 = g\frac{v_0}{g} = v_0$$

$$C_4 + v_0\frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}; \quad C_4 = 0$$

și ecuația mișcării devine (fig. 7.6, *b*).

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0t.$$

Corpul atinge pămîntul cînd

$$x = 0 = -\frac{gt^2}{2} + v_0t,$$

adică la momentul

$$t_2 = \frac{2v_0}{2} = 2t_1.$$

Se observă că timpul de coborîre $t_2 - t_1$ este egal cu timpul de urcare.

Viteza cu care ajunge corpul pe pămînt este

$$\dot{x} = -gt_2 + v_0 = -v_0,$$

egală în modul cu viteza inițială (fig. 7.6,*c*).

7.7. Se aruncă pe verticală în vid, un mobil M_2 cu viteza inițială v_0; în același timp se dă drumul de la o înălțime H, unui alt mobil M_1, fără viteză inițială (fig. 7.7). Cele două mobile fiind pe aceeași verticală se cere să se stabilească punctul lor de întîlnire și timpul după care se vor întîlni. Să se discute condițiile de compatibilitate ale problemei.

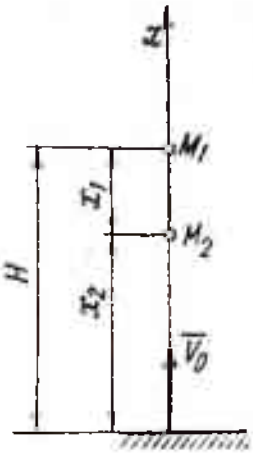


Fig. 7.7

Rezolvare. Spațiul parcurs de mobilul M_1 pînă la întîlnirea cu mobilul M_2 este

$$x_1 = -\frac{gt_1^2}{2}.$$

Pentru mobilul M_2 spațiul parcurs este

$$x_2 = -\frac{gt_1^2}{2} + v_0 t_1.$$

Dar

$$x_1 + x_2 = H,$$

deci

$$\frac{-gt_1^2}{2} + v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = H$$

sau

$$+ gt_1^2 - v_0 t_1 + H = 0.$$

Ecuația aceasta admite ca soluție

$$t_1 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4gH}}{2g},$$

timpul cînd cele două mobile se vor întîlni. Trebuie ca $v_0^2 - 4gH > 0$.

Cotele punctului de întîlnire sînt:

$$x_1 = \frac{-gt_1^2}{2} \text{ și } x_2 = \frac{-gt_1^2}{2} + v_0 t_1.$$

Să se observe că mai pot fi și alte posibilități de întîlnire, în funcție de v_0 și H.

7.8. Să se arate că într-o mișcare rectilinie uniform variată, între drumul parcurs x și viteza v avem o relație de forma $x = Av^2 + B$.

Rezolvare. Mișcarea rectilinie uniform variată este caracterizată prin relațiile

$$\ddot{x} = a$$
$$\dot{x} = v = at + C_1$$
$$x = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

În funcţie de viteză, timpul se exprimă sub forma

$$at = v - C_1 \quad \text{sau} \quad t = \frac{v - C_1}{a}.$$

Pentru drumul parcurs x rezultă expresia

$$x = \frac{a}{2}\frac{(v - C_1)^2}{a^2} + C_1\frac{(v - C_1)}{a} + C_2 = \frac{(v - C_1)}{2a}(v + C_1) + C_2 = \frac{v^2 - C_1^2}{2a} + C_2,$$

deci

$$x = Av^2 + B,$$

în care

$$A = \frac{1}{2a}, \quad B = C_2 - \frac{C_1^2}{2a}.$$

Problema se poate pune şi invers: o relaţie de această formă caracterizează o mişcare rectilinie uniform variată.

7.9. Intensităţile vitezei unui mobil care coboară de la aceeaşi înălţime, pe plane înclinate diferit (fig. 7.9), sînt întotdeauna egale la sosirea pe o aceeaşi orizontală, cînd sînt eliminate toate obstacolele (Galilei).

Pe planul înclinat MA_1 (axa MA_1 considerată axă Ox) mişcarea se studiază cu ecuaţia

$$\ddot{x} = g \sin \alpha_1,$$

care prin integrare duce la relaţiile:

$$\dot{x} = gt \sin \alpha_1 + C_1$$

$$x = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha_1 + C_1 t + C_2;$$

cu condiţiile iniţiale: la $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, deci $C_2 = 0$, $C_1 = 0$.

Ecuaţia mişcării devine după determinarea constantelor

$$\dot{x} = gt \sin \alpha_1, \qquad x = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha_1.$$

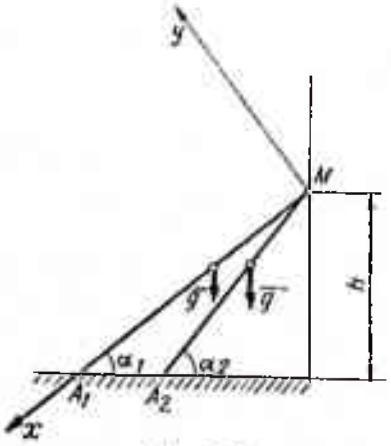


Fig. 7.9

În punctul A_1:

$$x = \frac{h}{\sin \alpha_1} = \frac{gt_1^2}{2} \sin \alpha_1.$$

Timpul t_1 necesar parcurgerii distanţei A_1M este

$$t_1^2 = \frac{2h}{g \sin^2 \alpha_1},$$

iar

$$\dot{x} = v_{A_1} = g \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha_1}} = \sqrt{2gh}.$$

Pe planul înclinat MA_2 (axa MA_2 considerată axă Ox).

$$x = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha_2 \quad \text{și} \quad \dot{x} = gt \sin \alpha_2.$$

În punctul A_2:

$$x = \frac{h}{\sin \alpha_2} \quad \text{și} \quad t_2^2 = \frac{2h}{g \sin^2 \alpha_2},$$

iar

$$\dot{x} = v_{A2} = g \sin \alpha_2 \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha_2}} = \sqrt{2gh}.$$

Vitezele ambelor mobile sînt aceleași, independent de drumul parcurs.

7.10. Un om aleargă pe pămînt și trage cu o frînghie un cărucior care se află pe un teren orizontal (fig. 7.10). Să se afle viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a căruciorului, știind că viteza omului este constantă și egală cu $\bar{u}$, iar diferența de înălțime între extremitatea funiei și cărucior este h.

Rezolvare.

$$x = -|x| = -(l - \sqrt{x_1^2 + h^2}),$$

unde l este lungimea frînghiei, iar $x_1 = ut$.

Derivînd, se obține pentru viteza căruciorului expresia

$$\dot{x} = v = \frac{2x_1 u}{2\sqrt{x_1^2 + h^2}} = u \sin \alpha,$$

deoarece $\sin \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + h^2}}$.

Accelerația căruciorului se obține derivînd încă o dată

$$\ddot{x} = a = \frac{h^2 u^2}{(x_1^2 + h^2)^{3/2}}.$$

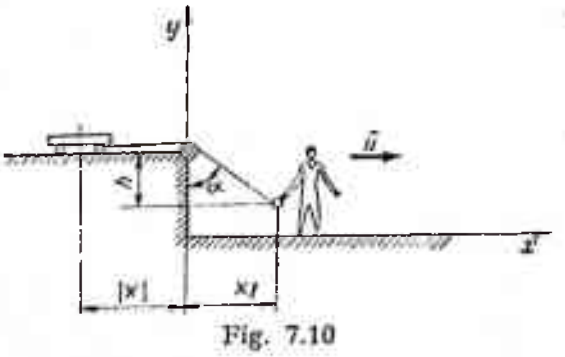


Fig. 7.10

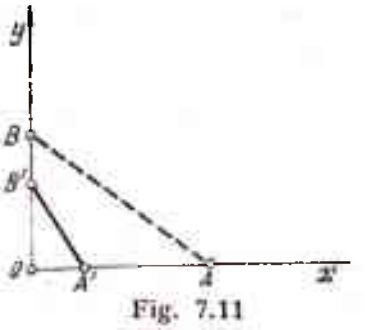


Fig. 7.11

7.11. Două drumuri se întretaie în punctul O sub un unghi drept. În același moment, două automobile pleacă din punctele A și B situate pe aceste drumuri, îndreptîndu-se spre încrucișarea lor. Mișcarea automobilelor fiind uniform accelerată să se determine timpul la care distanța dintre cele două automobile va fi minimă ($OA = x_0$, $OB = y_0$) (fig. 7.11).

Rezolvare. Mişcarea mobilului care pleacă din A are ecuaţia

$$x = x_0 - \frac{1}{2} a_1 t^2,$$

iar aceea a mobilului care pleacă din B

$$y = y_0 - \frac{1}{2} a_2 t^2.$$

Distanţa între punctele A' şi B' este

$$A'B' = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{d^2},$$

unde

$$d^2 = x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2) - (x_0 a_1 + y_0 a_2) t^2 + \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2) t^4,$$

respectiv

$$d = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2) - (x_0 a_1 + y_0 a_2) t^2 + \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2) t^4}.$$

Extremele distanţei d rezultă din anularea derivatei funcţiei d în raport cu timpul

$$\frac{d(d)}{dt} = 0 = \frac{-2t(x_0 a_1 + y_0 a_2) + (a_1^2 + a_2^2) t^3}{2\sqrt{(x_0^2 + y_0^2) - (x_0 a_1 + y_0 a_2) t^2 + \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2) t^4}}.$$

Timpul corespunzător distanţei $A'B'$ minime este dat de:

$$(a_1^2 + a_2^2) t^2 = 2(x_0 a_1 + y_0 a_2),$$

adică

$$t = \sqrt{\frac{2(x_0 a_1 + y_0 a_2)}{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Pentru această valoare a timpului, distanţa d este

$$d = \frac{y_0 a_1 - x_0 a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

7.12. O bară AB de lungime l se deplasează cu capătul A pe axa Ox şi cu capătul B pe axa Oy (fig. 7.12). Să se determine traiectoria unui punct M al barei.

Rezolvare. Coordonatele unui punct M de pe bară situat la distanţa αl de capătul ei A sînt

$$x = (1 - \alpha) l \sin \theta, \quad y = \alpha l \cos \theta.$$

Eliminînd parametrul θ obținem ecuația carteziană a traiectoriei

$$\frac{x^2}{l^2(1-\alpha)^2}+\frac{y^2}{\alpha^2 l^2}=1,$$

care este o elipsă de semiaxe $l(1-\alpha)$ și αl, cu centrul în 0.

Dacă M se găsește la mijlocul barei, deci $\alpha=\frac{1}{2}$, ecuația devine

$$\frac{x^2}{\frac{l^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{l^2}{4}}=1$$

sau

$$x^2+y^2=\frac{l^2}{4},$$

ecuația unui cerc de rază $\frac{l}{2}$.

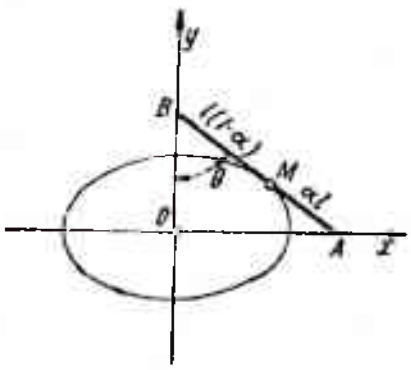


Fig. 7.12

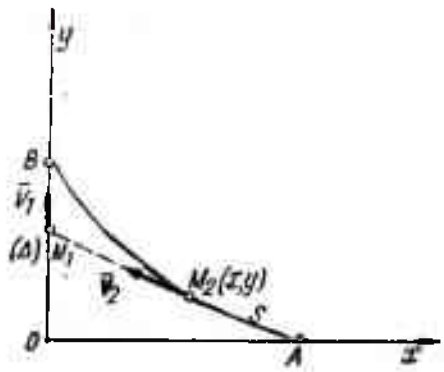


Fig. 7.13

7.13. Un mobil M_1 parcurge într-un plan orizontal un drum rectiliniu (Δ) cu viteza constantă v_1. Un al doilea mobil M_2 se află în momentul inițial în același plan și la o distanță $OA=a$ de mobilul M_1 (direcția OA este perpendiculară pe direcția Δ) (fig. 7.13). Mobilul M_2 se deplasează tot timpul în direcția mobilului M_1, cu viteza constantă v_2. Să se determine traiectoria descrisă de mobilul M_2 și să se discute posibilitățile de înscriere a mobilului M_2 în traiectoria primului mobil.

Rezolvare. La un moment dat t primul mobil se va găsi în M_1, iar al doilea în M_2

$$OM_1=v_1t,\quad AM_2=s.$$

Știind că direcția vitezei v_2 trebuie să treacă tot timpul prin poziția mobilului M_1 de la momentul respectiv, se poate scrie

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-OM_1}{x}$$

sau

$$x\frac{dy}{dx} = y - v_1 t.$$

Dar

$$v_2^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

de unde

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v_2}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Derivînd în raport cu x relația a doua rezultă

$$\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - v_1\frac{dt}{dx}.$$

Ținînd seama și de relațiile precedente se obține ecuația diferențială a mișcării

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v_1}{v_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Notînd $\frac{v_1}{v_2} = \lambda$ și $\frac{dy}{dx} = z$, variabilele se separă și ecuația mișcării devine

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \lambda\frac{dx}{x}.$$

Integrînd și observînd că pentru $x = a$, $z = 0$ se obține ecuația

$$\ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) = \ln\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda.$$

Din această ecuație se deduc relațiile

$$z + \sqrt{1+z^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^\lambda$$

$$z - \sqrt{1+z^2} = -\left(\frac{a}{x}\right)^\lambda.$$

Adunînd aceste relații obținem pentru z expresia

$$z = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda - \left(\frac{a}{x}\right)^\lambda\right].$$

Presupunînd $\lambda \neq 1$ și integrînd, rezultă

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)\,a^\lambda} + \frac{a^\lambda}{(\lambda-1)\,x^{\lambda-1}}\right] - \frac{a\lambda}{\lambda^2-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Dacă $\lambda > 1$ curba are asimptotă axa Oy (pentru $x = 0$, $y = \infty$). Deci mobilul M_2 nu va putea ajunge niciodată mobilul M_1.
b) Dacă $\lambda < 1$, y este finit pentru $x = 0$.
c) Dacă $\lambda = 1$, ecuația de mișcare devine

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2a} - \frac{a}{2x},$$

care are ca soluție

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2 - a^2}{a} + \frac{a}{2}\ln\frac{a}{x}\right).$$

Se vede că atunci cînd $x = 0$, y devine infinit, deci și în acest caz curba care reprezintă traiectoria mobilului M_2 are ca asimptotă axa Oy. Deci mobilul M_2 nu va putea întîlni niciodată mobilul M_1.

7.14. Un mobil se mișcă pe o dreaptă într-un mediu rezistent. Rezistența mediului este direct proporțională cu viteza mobilului. Știind că accelerația mobilului este

$$\bar{a} = -k\bar{v} \qquad (k > 0)$$

să se studieze mișcarea (La timpul $t = 0$, viteza mobilului este v_0).

Rezolvare. Relația dintre accelerație și viteză în mișcarea rectilinie a punctului este

$$\ddot{x} = -k\dot{x}$$

ecuația de mișcare are forma

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0$$

și soluția

$$x = C_1 + C_2e^{-kt}$$

$$\dot{x} = -kC_2e^{-kt}.$$

Condițiile inițiale: la $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, deci constantele de integrare au valorile

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Ecuația mișcării are forma (fig. 7.14,*a*)

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}),$$

iar viteza (fig. 7.14,*b*) este

$$\dot{x} = \frac{v_0}{k}ke^{-kt} = v_0e^{-kt}.$$

Se observă că viteza mobilului scade, însă nu se anulează pentru nici o valoare finită a timpului t

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x = \frac{v_0}{k}.$$

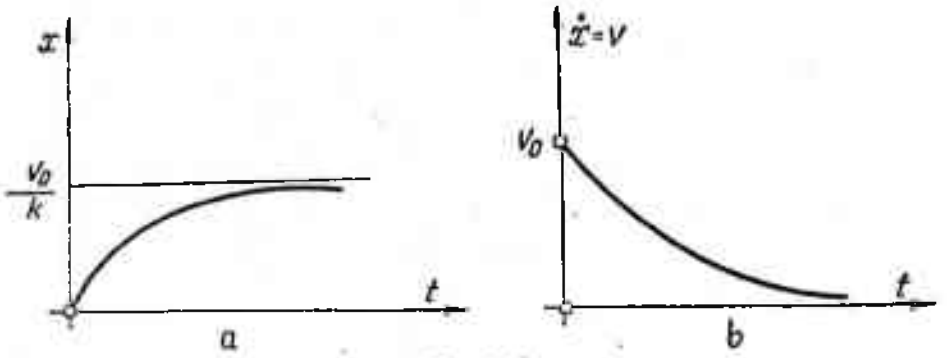


Fig. 7.14

7.15. Un mobil execută o oscilație armonică după legea

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Pentru $x = x_1$ și $x = x_2$ viteza mobilului este respectiv egală cu v_1 și v_2. Să se afle amplitudinea A și perioada T a acestei oscilații și să se studieze mișcarea mobilului.

Rezolvare. Condițiile din enunț conduc la relațiile

$$x_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} t_1$$

$$x_2 = A \sin \frac{2\pi}{T} t_2,$$

care prin derivare în raport cu timpul devin

$$\dot{x}_1 = v_1 = A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t_1$$

$$\dot{x}_2 = v_2 = A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t_2.$$

Eliminînd t_1 și t_2 obținem sistemul

$$x_1^2 + \frac{T^2}{4\pi^2} v_1^2 = A^2$$

$$x_2^2 + \frac{T^2}{4\pi^2} v_2^2 = A^2,$$

ale cărei soluții sînt:

$$A = \sqrt{\frac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}} \quad \text{și} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}.$$

7.16. Să se determine curba din planul vertical pe care, un punct în cădere se deplasează cu viteză constantă (fig. 7.16).

Rezolvare. Se notează cu h ordonata punctului de plecare a mobilului și cu φ_0 unghiul tangentei la curbă cu verticala în punctul O. Avem, în general:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g(h + y);$$

iar în O se poate scrie:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gh} \cdot \cos \varphi_0.$$

Prin integrarea ultimei ecuații rezultă

$$y = \sqrt{2gh} \cdot t \cdot \cos \varphi_0,$$

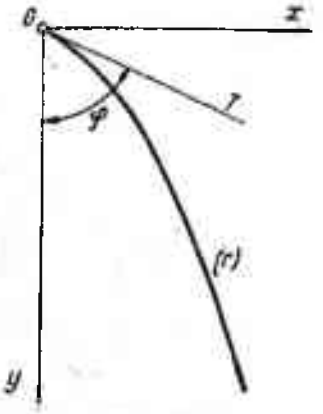


Fig. 7.16

luînd ca origine a timpului momentul $t_0 = 0$, cînd mobilul trece prin 0.

Se elimină y și dy/dt și rezultă:

$$dx^2 = 2g(h \sin^2 \varphi_0 + \sqrt{2gh}\, t \cos \varphi_0)\, dt^2.$$

Prin integrare și determinarea constantei astfel încît să se respecte condiția de a trece curba prin originea O, rezultă:

$$3\sqrt{h} \cos \varphi_0 \left(x + \frac{2h \sin^2 \varphi_0}{3 \cos \varphi_0} \right) = 2(h \sin^2 \varphi_0 + \sqrt{2gh}\, t \cos \varphi_0)^{3/2}.$$

Ecuația traiectoriei punctului, astfel încît viteza în cădere să fie constantă este:

$$3\sqrt{h} \cos \varphi_0 \left(x + \frac{2h \sin^2 \varphi_0}{3 \cos \varphi_0} \right) = 2(y + h \sin^2 \varphi_0)^{3/2}$$

(parabola semicubică).

(Problema a fost propusă de Leibnitz în 1687; de ea s-au mai ocupat ulterior Huygens, Jacques Bernoulli și Jean Bernoulli).

7.17. Să se studieze mișcarea circulară variată definită prin ecuațiile $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, în care $\theta = f(t)$, (fig. 7.17).

Rezolvare. Coordonatele punctului într-o poziție oarecare fiind

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta,$$

vectorul de poziție $\bar{r}$ are forma

$$\bar{r} = R\cos\theta \cdot \bar{i} + R\sin\theta \cdot \bar{j} = x\bar{i} + y\bar{j}.$$

Proiecțiile vitezei $\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}$ pe axe sînt

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta = -\dot{\theta}y$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta = \dot{\theta}x,$$

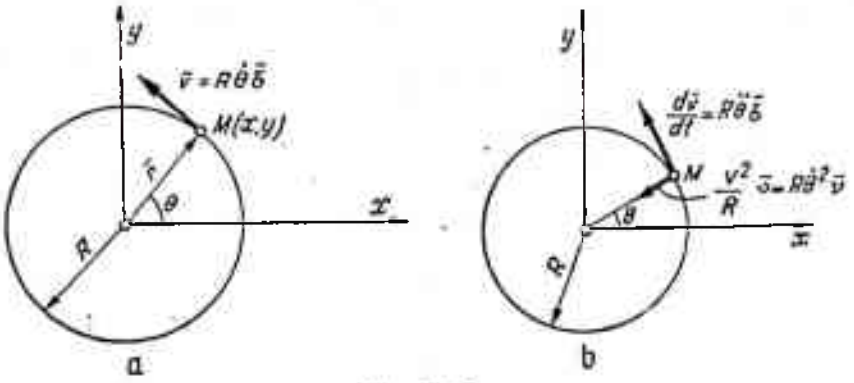


Fig. 7.17

iar modulul vitezei

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{\theta}\sqrt{x^2 + y^2} = \dot{\theta}R \quad \text{(fig. 7.17,}a\text{)}.$$

Accelerația $\bar{a} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j}$ are proiecțiile pe axe

$$\ddot{x} = -y\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 x$$

$$\ddot{y} = \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2 y$$

și modulul

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4}.$$

Pe axele triedrului lui Frenet componentele accelerației sînt

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta}$$

$$a_\nu = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{\theta}^2 R^2}{R} = R\dot{\theta}^2 \quad \text{(fig. 7.17,}b\text{)}$$

În cazul mișcării circulare uniforme

$$\theta = \omega t + \alpha$$

în care ω și α sînt constante, deci $\dot{\theta} = \omega$ și $\ddot{\theta} = 0$.

Ecuațiile parametrice au în acest caz forma

$$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = R\sin\theta = R\sin(\omega t + \alpha).$$

Proiecțiile vitezei pe axele de coordonate sînt

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta = -R\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta = R\omega\cos(\omega t + \alpha),$$

respectiv modulul este

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\omega.$$

Componentele accelerației sînt

$$\ddot{x} = -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta = -R\omega^2\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{y} = R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta = -R\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$$

și modulul

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = R\omega^2.$$

Lucrînd în sistemul de coordonate format de triedrul lui Frenet, componentele accelerației devin

$$\bar{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} = 0$$

$$\bar{a}_\nu = \frac{v^2}{R}\bar{\nu} = \frac{R^2\omega^2}{R}\bar{\nu} = R\omega^2\bar{\nu}.$$

Deci într-o mișcare circulară uniformă, accelerația punctului este îndreptată după direcția razei și are mărimea $R\omega^2$.

7.18. Pe scripetele O de rază $r = 15$ cm se desfășoară un fir inextensibil în direcția AP, după legea $s = 4t^2$, antrenînd și scripetele într-o mișcare de rotație (fig. 7.18). Să se determine viteza unghiulară a scripetelui, viteza și accelerația unui punct de pe periferia scripetelui la 1 s de la începutul mișcării.

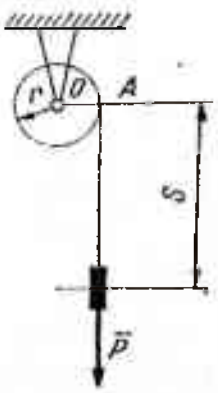


Fig. 7.18

Rezolvare. Deplasarea capătului P al firului ascultă de legea

$$s = 4t^2$$

$$v = \dot{s} = 8t.$$

Viteza unghiulară a scripetelui ω este

$$\omega = \frac{8}{r} t = \frac{8}{0,15} t.$$

Componentele accelerației sînt

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 8$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{64 t^2}{0,15},$$

iar modulul accelerației punctului

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{64 + \left(\frac{64 t^2}{0,15}\right)^2}.$$

La o secundă de la începerea mișcării, mărimile cerute sînt:

$$s = 4 \text{ m}, \quad v = 8 \text{ m/s}, \quad \omega = 53,4 \text{ rad/s}$$

$$a_\tau = 8 \text{ m/s}^2, \quad a_n = 427 \text{ m/s}^2, \quad a = 429 \text{ m/s}^2.$$

7.19. Un balon pleacă de pe pămînt cu viteza v_0, urcîndu-se vertical cu accelerația $a = c - bx$, x fiind înălțimea la un moment dat deasupra solului. Se cere: *a)* înălțimea maximă pînă la care se urcă balonul; *b)* viteza maximă în timpul ascensiunii.

Rezolvare.

$$v = \frac{dx}{dt}; \quad a = \frac{dv}{dt} = c - bx;$$

integrînd și ținînd seama că pentru $x = 0$ $v = v_0$, avem:

$$\frac{bx^2}{2} - cx + \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = 0.$$

a) Pentru $v = 0$;

$$H_{max} = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^2 + v_0^2 \cdot b}}{b},$$

b) Pentru $a = 0$:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{bv_0^2 + c^2}{b}}.$$

7.20. Să se demonstreze că într-o mișcare curbilinie, accelerația unui punct este egală cu cîtul dintre pătratul vitezei acestui punct și jumătatea corzii interceptate de cercul osculator pe direcția accelerației lui (fig. 7.20).

Rezolvare. Punctul M mobil pe curba (C) are accelerația $\bar{a}_M = \overline{Mm}$, care face unghiul φ cu normala principală MN.

Se construiește cercul osculator de rază $\rho = OM$. Componenta normală a lui $\bar{a}_M$ este $\bar{a}_n = \overline{MM'}$, avînd valoarea

$$a_n = a_M \cos \varphi = \frac{v_M^2}{\rho}.$$

Rezultă

$$a_M = \frac{v_M^2}{\rho \cos \varphi} = \frac{v_M^2}{\frac{1}{2} MA}.$$

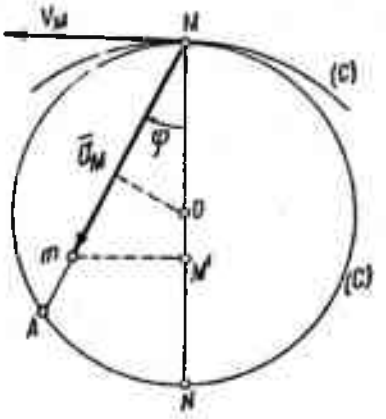


Fig. 7.20

7.21. Un mobil are o mișcare circulară astfel că accelerația sa este mereu normală pe viteză și egală cu o treime din aceasta. Cîte ture face pe minut acest mobil?

Rezolvare. Dacă accelerația mobilului este mereu normală pe viteză, deci după direcția razei,

$$\bar{a}_\tau = 0$$

$$|\bar{a}_n| = R\omega^2 = \frac{1}{3} R\omega,$$

de unde

$$\omega = \frac{1}{3} \text{ rad/s}$$

și

$$n = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \text{ rot/min.}$$

7.22. Să se stabilească viteza în km/h a unui avion care, zburînd de-a lungul unei paralele date, la o înălțime constantă dată, trece deasupra fiecărui punct al paralelei la ora 12 (nu se va ține seama de variația densității atmosferei în raport cu înălțimea).

Rezolvare. Avionul fiind deasupra unui punct de pe paralelă în același timp cu Soarele va trebui să aibă o mișcare circulară uniformă de la est către vest, cu o viteză unghiulară egală cu acea a rotației Pămîntului. Dacă notăm cu v viteza căutată, cu R raza Pămîntului, λ latitudinea, h înălțimea de la sol a avionului și cu r raza cercului descris de avion, avem

$$v = r\omega = (R + h)\,\omega \cos \lambda = 0{,}2618(6\,370 + h) \cos \lambda$$

$$\omega = \frac{2\pi}{24} = 0{,}2618 \text{ rad/h}$$

$$R = 6\,370 \text{ km}.$$

Deoarece valoarea lui h este mică în raport cu R

$$v \approx 0{,}2618 \cdot 6\,370 \cos \lambda \approx 1\,667 \cos \lambda \text{ [km/h]}.$$

La ecuator ($\lambda = 0$)

$$v = 1\,667 \text{ km/h}.$$

Pentru $\lambda = 45°$ (aproximativ paralela Bucureștiului)

$$v = 1\,178 \text{ km/h}.$$

7.23. Două puncte P_1 și P_2 se mișcă pe un cerc de rază R (fig. 7.23). Ele pornesc în același moment $t = 0$ din punctul A, cu viteze inițiale $\bar{v}_0$ egale și de sensuri contrare. Primul punct are o mișcare uniformă, iar cel de-al doilea o mișcare uniform întîrziată.

Știind că punctele P_1 și P_2 se întîlnesc pentru prima dată în punctul B, în care se anulează viteza punctului P_2, să se determine poziția punctului B și timpul după care are loc întîlnirea.

Rezolvare. Pentru punctul P_1

$$a_{\tau_1} = \ddot{s}_1 = 0;$$

prin integrare

$$\dot{s}_1 = C_1$$

$$s_1 = C_1 t + C_2.$$

Condițiile inițiale sînt: la $t = 0$, $s = 0$, $v = v_0$, ceea ce conduce pentru constantele de integrare la valorile $C_2 = 0$, $C_1 = v_0$.

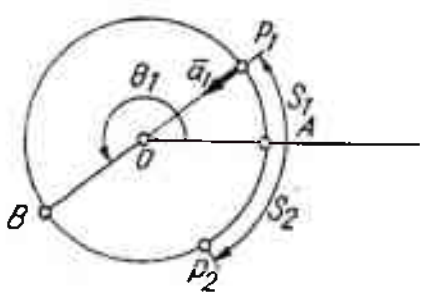


Fig. 7.23

Ecuația de mișcare a punctului P_1 este

$$s_1 = v_0 t.$$

Pentru punctul P_2

$$a_{\tau_2} = \ddot{s}_2 = C$$

și

$$\dot{s}_2 = Ct + C_3$$

$$s_2 = \frac{Ct^2}{2} + C_3 t + C_2.$$

Condițiile inițiale sînt: la $t = 0$, $s_2 = 0$, $\dot{s}_2 = v_0$ și constantele de integrare au valorile $C_4 = 0$, $c_3 = v_0$. Ecuația de mișcare a lui P_2 este

$$s_2 = \frac{Ct^2}{2} + v_0 t.$$

Mobilele se întîlnesc în B cînd

$$s_1 + s_2 = 2\pi R \quad \text{și} \quad v_2 = 0,$$

adică atunci cînd

$$v_0 t + \frac{Ct^2}{2} + v_0 t = 2\pi R$$

$$Ct + v_0 = 0.$$

De aici rezultă $C = -\frac{3v_0^2}{4\pi R}$, $t = \frac{4\pi R}{3v_0}$,

iar

$$s_1 = \frac{4}{3}\pi R \text{ și } s_2 = \frac{2}{3}\pi R.$$

7.24. Un punct P descrie curba ABC formată din arcele de cerc AB și BC, avînd razele r_1 și r_2 și unghiurile la centru θ_1 și θ_2 (fig. 7.24, *a*).

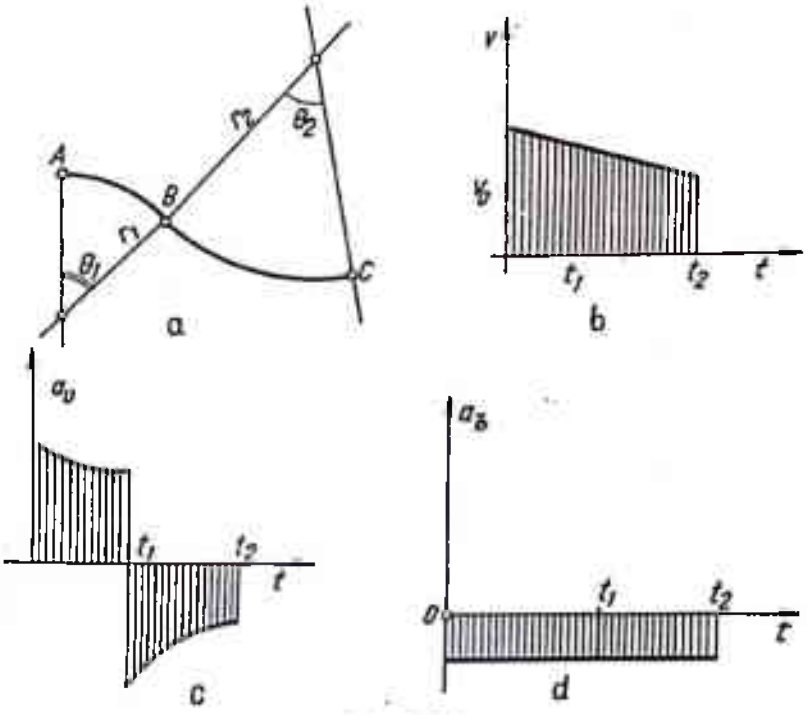


Fig. 7.24

Punctul execută o mișcare uniform întîrziată, pornind cu viteza inițială v_0 din A și ajungînd în C cu viteza v_2. Să se determine viteza și accelerația punctului.

Rezolvare. În mișcarea punctului pe curbă, accelerația tangențială este

$$a_\tau = \ddot{s} = -C.$$

Prin integrări succesive se obține expresia vitezei și a arcului de curbă

$$v = \dot{s} = -Ct + C_1$$

$$s = -\frac{Ct^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Condițiile inițiale ale problemei fiind: la $t = 0$, $v = v_0$, $s = 0$, rezultă pentru constantele de integrare valorile $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$ și deci

$$s = -\frac{Ct^2}{2} + v_0 t$$

$$v = \dot{s} = -Ct + v_0.$$

În punctul C pentru $t = t_2$ avem

$$v_C = -Ct_2 + v_0 \text{ și } s = -\frac{Ct_2^2}{2} + v_0 t_2, \tag{a}$$

respectiv

$$r_1\theta_1 + r_2\theta_2 = -\frac{Ct_2^2}{2} + v_0 t_2$$

de unde

$$t_2 = \frac{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)}{v_0 + v_2}$$

$$C = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (a) obținem (fig. 7.24, *b*)

$$s = -\frac{v_0^2 - v_2^2}{4(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} t^2 + v_0 t, \quad v = -\frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} t + v_0$$

$$a_\tau = -\frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} \text{ (fig. 7.24, } d)$$

Expresia componentei normale a accelerației este, conform formule cunoscute, $a_\nu = \frac{v^2}{\rho}$.

Pe porțiunea AB

$$a_\nu = \frac{\left[-\frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} t + v_0\right]^2}{r_1} \text{ (fig. 7.24, } c).$$

Pe porțiunea BC

$$a_\nu = \frac{\left[-\frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} t + v_0\right]^2}{r_2}.$$

7.25. Fie x și y coordonatele unui punct M în raport cu două axe rectangulare Ox și Oy. Știind că la fiecare moment t avem $x = x_0 e^{\omega t}$ și $y = y_0 e^{-\omega t}$ să se studieze mișcarea punctului M (fig. 7.25).

Rezolvare. Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sînt

$$x = x_0 e^{\omega t}, \quad y = y_0 e^{-\omega t}.$$

Prin eliminarea parametrului t obținem ecuația traiectoriei

$$xy = x_0 y_0.$$

Prin derivarea ecuațiilor parametrice obținem componentele vitezei pe axe

$$\dot{x} = \omega x$$

și

$$\dot{y} = -\omega y$$

$$v = \omega\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Accelerația punctului M va fi

$$\ddot{x} = \omega^2 x$$

$$\ddot{y} = \omega^2 y$$

$$a = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = \omega v.$$

Componentele accelarației după axele triedrului lui Frenet sînt

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \omega^2\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad a_\nu = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2\frac{2x_0y_0}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

în care raza de curbură a traiectoriei

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}} = \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{\sqrt{\omega^4(x^2 + y^2) - \omega^4\frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}}} = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{2x_0y_0}.$$

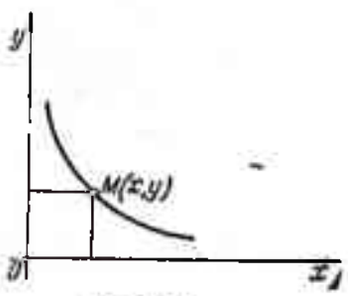


Fig. 7.25

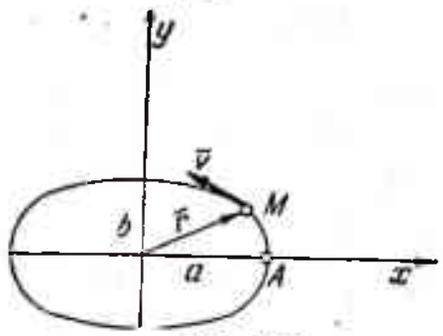


Fig. 7.26

7.26. Să se studieze mișcarea unui punct, determinîndu-se traiectoria, viteza și accelerația dacă legea de mișcare a punctului este

$$\bar{r} = a\cos\omega t \cdot \bar{i} + b\sin\omega t \cdot \bar{j},$$

în care a, b și ω sînt constante pozitive.

Rezolvare. Pentru determinarea traiectoriei mobilului eliminăm parametrul t între cele două ecuații care reprezintă proiecțiile vectorului de poziție $\bar{r}$ pe axele de coordonate

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t;$$

rezultă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

adică traiectoria este o elipsă, de semiaxe a și b (fig. 7.26).

Viteza punctului-tangentă la traiectorie este

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = -\omega a \sin \omega t \cdot \bar{i} + b\omega \cos \omega t \cdot \bar{j}$$

şi are modulul

$$|\bar{v}| = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}.$$

Acceleraţia punctului este

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = -\omega^2 a \cos \omega t \cdot \bar{i} - \omega^2 b \sin \omega t \cdot \bar{j},$$

şi are modulul

$$|\bar{a}| = \omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}.$$

Acceleraţia se mai poate pune sub forma

$$\bar{a} = -\omega^2 \bar{r}.$$

Vectorul acceleraţiei are acelaşi suport cu vectorul de poziţie $\bar{r}$, însă este dirijat spre centrul O.

7.27. Un punct M descrie parabola $y = \frac{x^2}{2p}$ cu acceleraţia constantă pozitivă $\bar{g}$, dirijată după direcţia axei Oy (fig. 7.27). La momentul iniţial $t = 0$, mobilul se găsea în O avînd viteza $\bar{v}_0$ dirijată după direcţia axei Ox. Se cer:

a) componentele vitezei şi viteza rezultantă într-o poziţie oarecare a mobilului;

b) raza de curbură a traiectoriei în punctul corespunzător.

Rezolvare. a) Pentru studiul mişcării se integrează expresia acceleraţiei

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{g}.$$

Se obţin pentru viteza $\bar{v}$ şi vectorul de poziţie $\bar{r}$ expresiile

$$\dot{\bar{r}} = \bar{g}t + \bar{C}_1$$

$$\bar{r} = \frac{\bar{g}t^2}{2} + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2.$$

Ţinînd seama de condiţiile iniţiale: la $t = 0$, $\bar{r} = 0$, $\dot{\bar{r}} = \bar{v}_0$, rezultă valorile constantelor de integrare $\bar{C}_2 = 0$, $\bar{C}_1 = \bar{v}_0$.

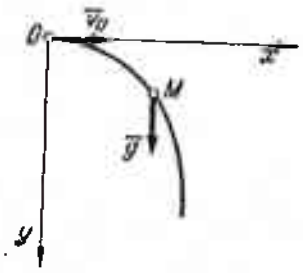


Fig. 7.27

Sistemul devine

$$\bar{r} = \bar{g}\frac{t^2}{2} + \bar{v}_0 t = \frac{gt^2}{2}\bar{j} + v_0 t\bar{i}$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \bar{g}t + \bar{v}_0 = gt\bar{j} + v_0\bar{i}$$

modulul vitezei este:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sînt

$$x = v_0 t$$

$$y = g\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.$$

Dar

$$y = \frac{x^2}{2p} = \frac{gx^2}{2v_0^2}, \quad \dot{y} = \frac{x}{p} = \frac{gx}{v_0^2}$$

cu

$$p = \frac{v_0^2}{g}.$$

b) Expresia razei de curbură fiind

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}},$$

obținem

$$\rho = \frac{v_0^2 + g^2t^2}{\sqrt{g^2 - \left(\frac{2g^2t}{2\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}\right)^2}} = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{3/2}}{v_0 g}.$$

7.28. Să se studieze mișcarea unui punct M pe cardioida de ecuație $r = 2c(1 + \cos\theta)$, astfel încît raza vectoare OM să se rotească cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 7.28).

Rezolvare. Coordonatele punctului M sînt

$$x = 2c\cos\theta(1 + \cos\theta)$$
$$y = 2c\sin\theta(1 + \cos\theta).$$

Componentele vitezei punctului M sînt:

$$v_x = -2c(\sin\theta + \sin 2\theta)\dot{\theta}$$
$$v_y = 2c(\cos\theta + \cos 2\theta)\dot{\theta}$$

iar

$$v = 2c\omega\sqrt{2(1 + \cos\theta)},$$

unde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ este viteza unghiulară a razei vectoare OM.

Dacă se notează $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ rezultă $v = 4c\omega\cos\frac{\theta}{2}$.

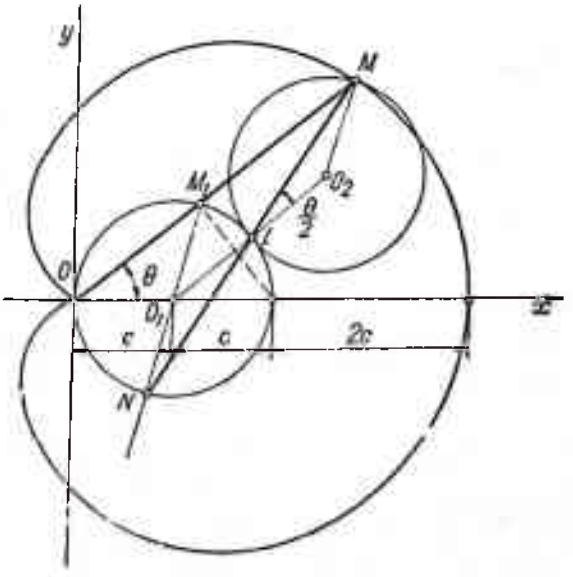


Fig. 7.28

Din figură se vede că $2c \cos \frac{\theta}{2} = IM$ şi $IM = IN$; deci $v = NM\ \omega$.

Componentele acceleraţiei punctului M sînt

$$a_x = -2c\,(\cos\theta + 2\cos 2\theta)\,\omega^2$$

$$a_y = -2c\,(\sin\theta + 2\sin 2\theta)\,\omega^2$$

şi acceleraţia va fi $a = 2c\omega^2 \sqrt{5 + 4\cos\theta}$.

În coordonate intrinseci vor fi

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -2c \sin\frac{\theta}{2}\,\omega^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{16\,c^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\,\omega^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{8}{3}\,c \cos\frac{\theta}{2} \text{ (raza de curbură).}$$

7.29. Un punct $M(x, y)$ se mişcă cu viteza constantă v pe lănţişorul de ecuaţie $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) = c\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{c}$. Să se determine acceleraţia şi raza de curbură a lănţişorului într-un punct M.

Rezolvare. Lungimea arcului AM considerat de la vîrful $A(O, c)$ al lănţişorului este

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{c}}\,dx = \int_0^x \mathrm{ch}\,\frac{x}{c}\cdot dx = c\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{c}.$$

Viteza punctului M este

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(c\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{c}\right) = \mathrm{ch}\,\frac{x}{c}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{y}{c}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Rezultă

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{c}{y}\,v = v\cos\alpha,$$

notînd cu α unghiul pe care-l face $\bar{v}$ cu axa Ox.

Proiecţia vitezei pe axa Oy este

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \mathrm{sh}\,\frac{x}{c}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{s}{y}\,v = v\sin\alpha.$$

Scriind

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{y}\,v$$

rezultă

$$y = \sqrt{c^2 + s^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{s}{c}.$$

Proiecţiile acceleraţiei punctului M sînt

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{vc}{y^2} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{v^2 \cdot c \cdot s}{y^3}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v\left[\frac{1}{y} \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{s}{y^2} \cdot \frac{dy}{dt}\right] = \frac{v^2}{y^3}(y^2 - s^2) = \frac{v^2c^2}{y^3}.$$

Acceleraţia punctului M are mărimea

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = c\frac{v^2}{y^3}\sqrt{c^2 + s^2} = \frac{c \cdot v^2}{y^2}$$

Vectorul $\bar{a}_M$ face cu axa Ox unghiul φ dat de

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{c}{s}.$$

Deoarece

$$\frac{s}{c} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ rezultă } \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{cotg} \alpha,$$

adică acceleraţia $\bar{a}$ a punctului M este îndreptată către centrul de curbură.

Aceasta se putea deduce de la început, deoarece s-a considerat $v =$ $=$ constant, deci $a_t = 0$ şi $a_n = a$.

Scriind $a = \frac{c \cdot v^2}{y^2} = \frac{v^2}{\rho}$, rezultă $\rho = \frac{y^2}{c}$,

care este expresia razei de curbură a lănţişorului.

7.30. Un punct se mişcă pe parabola $y^2 = 2px$, astfel încît hodograful mişcării în raport cu originea este parabola însăşi.

Să se determine legile mişcării, viteza şi acceleraţia, cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $x = \frac{p}{2}$, $y = p$ (Papelier).

Rezolvare. Ecuaţia traiectoriei $y^2 - 2px = 0$ va fi verificată de componentele vitezei

$$\dot{y}^2 - 2p\dot{x} = 0.$$

Derivînd ecuaţia traiectoriei în raport cu timpul

$$y\dot{y} - p\dot{x} = 0.$$

Rezolvînd sistemul rezultat se obţine

$$\dot{y}(\dot{y} - 2y) = 0$$

care admite ca soluţii

$$\dot{y} = 0, \text{ adică } y = \text{const} \text{ — soluţie necorespunzătoare}$$

$$\dot{y} = 2y \text{ respectiv } y = e^{2t+C} = p\,e^{2t} \text{ cu } x = \frac{y^2}{2p} = \frac{p^2 e^{4t}}{2p} = \frac{p}{2} e^{4t}.$$

Componentele vitezei sînt

$$\dot{x} = 2p\,e^{4t}$$

$$\dot{y} = 2p\,e^{2t}, \text{ deci } |\bar{v}| = 2p\,e^{2t}\sqrt{1 + e^{4t}}$$

Componentele accelerației sînt

$$\ddot{x} = 8p\,e^{4t}$$

$$\ddot{y} = 4p\,e^{2t}, \quad \text{deci } |\bar{a}| = 4p\,e^{2t}\sqrt{1 + 4\,e^{4t}}.$$

7.31. Să se studieze mişcarea unui mobil pe hiperbola echilateră $xy = k^2$ ştiind că are viteza constantă c tot timpul mişcării.

Rezolvare. Există prin enunţ relaţia

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c^2,$$

iar din ecuaţia hiperbolei se obţine

$$\dot{x}y + x\dot{y} = 0.$$

Rezolvînd sistemul, rezultă componentele vitezei după cele două axe

$$\dot{x} = -\frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \dot{y} = \frac{cy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Componentele accelerației au valoarea

$$\ddot{x} = \frac{2c^2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \ddot{y} = \frac{2c^2x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

iar accelerația punctului este

$$a = \sqrt{\frac{4c^4x^2 \cdot (y^2 + x^2)}{(x^2 + y^2)^4}} = \frac{2c^2k^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Raza de curbură a traiectoriei rezultă

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_\nu = \frac{v^2}{\rho}$$

de unde $\frac{c^2}{\rho} = \frac{2c^2k^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ şi $\rho = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{2k^2}$.

7.32. O roată de rază r se rostogolește fără să alunece pe o dreaptă (fig. 7.32). Să se determine traiectoria, viteza și accelerația unui punct oarecare de pe roată, precum și raza de curbură a traiectoriei într-o poziție oarecare a punctului, cunoscînd viteza constantă $\bar{v}_0$ a centrului O_1.

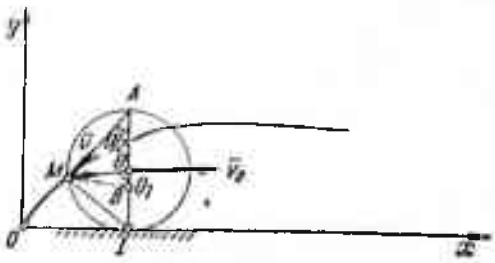


Fig. 7.32

Rezolvare. Cu notațiile din figură, coordonatele unui punct curent de pe roată sînt

$$x = OI - MB = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$

$$y = O_1I - O_1B = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta).$$

Acestea sînt ecuațiile parametrice ale cicloidei.

Viteza punctului M are proiecțiile pe axe

$$\dot{x} = r(\dot{\theta} - \cos\theta \cdot \dot{\theta}) = r\dot{\theta}(1 - \cos\theta)$$

$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta.$$

Se observă că există relațiile

$$v_0 t = r\theta,\ \dot{\theta} = \frac{v_0}{r},\ \ddot{\theta} = 0$$

deci

$$\bar{v} = r\dot{\theta}(1 - \cos\theta)\,\bar{i} + r\dot{\theta}\sin\theta\,\bar{j} = v_0(1 - \cos\theta)\,\bar{i} + v_0\sin\theta\,\bar{j}$$

și are modulul

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2r\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2} = 2v_0\sin\frac{\theta}{2}.$$

Se observă că

$$v = \dot{\theta}\cdot(MI) = \frac{v_0}{r}\cdot MI.$$

Viteza este dirijată în permanență pe direcția $\overline{MA}$.

Componentele accelerației sînt

$$\begin{cases} \ddot{x} = r\dot{\theta}^2\sin\theta = \dfrac{v_0^2}{r}\sin\theta \\ \ddot{y} = r\dot{\theta}^2\cos\theta = \dfrac{v_0^2}{r}\cos\theta \end{cases}$$

deci

$$\bar{a} = \frac{v_0^2}{r}(\sin\theta\,\bar{i} + \cos\theta\,\bar{j}),\ |\bar{a}| = \frac{v_0^2}{r};$$

accelerația este dirijată în permanență pe direcția $\overline{MO_1}$.

Accelerația se poate exprima și prin componentele sale tangențială și normală (în triedrul lui Frenet).

Componenta tangențială este

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r\dot{\theta}^2 \cos\frac{\theta}{2}.$$

Componenta normală a accelerației este

$$a_\nu = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4r^2\dot{\theta}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}{\rho},$$

iar mărimea accelerației este dată de

$$a^2 = \left(r\dot{\theta}^2 \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{\left(4r^2\dot{\theta}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}{\rho^2}$$

sau

$$\rho^2\left[a^2 - \left(r\dot{\theta}^2 \cos\frac{\theta}{2}\right)^2\right] = \left(4r^2\dot{\theta}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2.$$

Rezultă pentru raza de curbură formula

$$\rho = \frac{4r^2\dot{\theta}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r^2\dot{\theta}^4 - r^2\dot{\theta}^4 \cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{4r^2\dot{\theta}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}{r\dot{\theta}^2 \sin\frac{\theta}{2}},$$

respectiv

$$\rho = 4r \sin\frac{\theta}{2} = 2\,(MI).$$

Raza de curbură nu depinde decît de elementele geometrice ale curbei nu și de caracteristicile cinematice ale mișcării.

7.33. Un punct descrie spirala logaritmică de ecuație polară $r = k\ e^{a\varphi}$. În momentul inițial al mișcării $r = r_0$, $\varphi = 0$ și $v = v_0$. Să se determine viteza și accelerația punctului la un moment dat, știind că raza vectoare r se rotește cu viteză unghiulară constantă.

Rezolvare. Ecuația spiralei este

$$r = k e^{a\varphi}.$$

Derivatele sale succesive sînt

$$\dot{r} = ka\, e^{a\varphi} \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{r} = ka^2 e^{a\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 + kae^{a\varphi}\ddot{\varphi}.$$

Din condițiile inițiale: la $t = 0$, $r = r_0$, $v = v_0$, $\varphi = 0$,

rezultă

$$k = r_0 \text{ și } v_0^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = r_0^2 a^2 \dot{\varphi}^2 + r_0^2 \dot{\varphi}^2$$

de unde

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{v_0^2}{r_0^2(1 + a^2)}.$$

Viteza punctului M este

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = (r_0 a\, e^{a\varphi})^2 \cdot \frac{v_0^2}{r_0^2(1 + a^2)} + (r_0\, e^{a\varphi})^2 \cdot \frac{v_0^2}{r_0^2(1 + a^2)} =$$

$$= \frac{v_0^2}{r_0^2(1 + a^2)} \cdot r_0^2\, e^{2a\varphi}\,(1 + a^2) = v_0^2\, e^{2a\varphi},$$

respectiv

$$v = v_0\, e^{a\varphi} = \frac{v_0 r}{r_0}.$$

Accelerația punctului are două componente:

— componenta radială

$$a_p = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = r_0 a^2 e^{a\varphi} \cdot \frac{v_0^2}{r_0^2(1 + a^2)} - r_0\, e^{a\varphi} \times$$

$$\times \frac{v_0^2}{r_0^2(1 + a^2)} = \frac{v_0^2\, e^{a\varphi}(a^2 - 1)}{r_0(1 + a^2)};$$

— componenta transversală

$$a_n = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2r_0 a\, e^{a\varphi} \cdot \frac{v_0^2}{r_0^2(1 + a^2)} = \frac{2av_0^2\, e^{a\varphi}}{r_0(1 + a^2)}.$$

Accelerația totală este

$$a^2 = a_p^2 + a_n^2 = \frac{v_0^4 e^{2a\varphi}(a^2 - 1)^2 + 4a^2 v_0^4\, e^{2a\varphi}}{r_0^2(1 + a^2)^2} =$$

$$= \frac{v_0^4\, e^{2a\varphi}[a^4 + 1 - 2a^2 + 4a^2]}{r_0^2(1 + a^2)^2} = \frac{v_0^4\, e^{2a\varphi}}{r_0^2}$$

sau

$$a = \frac{v_0^2\, e^{a\varphi}}{r_0} = \frac{v_0^2}{r_0} \cdot \frac{r}{r_0} = \frac{r v_0^2}{r_0^2}.$$

7.34. Un punct descrie spirala logaritmică $r = ce^{k\varphi}$ cu viteza unghiulară $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ (fig. 7.34). Fie P proiecția lui M pe axa Ox. Să se arate că între $OP = x$, viteza $\dot{x}$ și accelerația $\ddot{x}$ există o relație liniară (Wittenbauer).

Rezolvare. Din ecuația spiralei logaritmice

$$r = c\, e^{k\varphi}$$

rezultă expresia proiecției vectorului de poziție pe axa Ox

$$x = r \cos \varphi = c\, e^{k\varphi} \cos \varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd se obţine:

$$\dot{x} = c e^{k\varphi} \omega (k \cos \varphi - \sin \varphi) \tag{a}$$

$$\ddot{x} = c\omega^2 e^{k\varphi} [(k^2 - 1) \cos \varphi - 2k \sin \varphi]. \tag{b}$$

Deoarece

$$c\, e^{k\varphi} = \frac{x}{\cos \varphi},$$

expresiile (a) şi (b) devin:

$$\dot{x} = \frac{x\omega}{\cos \varphi} (k \cos \varphi - \sin \varphi) = x\omega(k - \operatorname{tg} \varphi) \tag{c}$$

$$\ddot{x} = \frac{x\omega^2}{\cos \varphi} [(k^2 - 1) \cos \varphi - 2k \sin \varphi] = \omega^2 x\, [k^2 - 1 - 2k \operatorname{tg} \varphi]. \tag{d}$$

Din (c) rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega k\, x - \dot{x}}{\omega x}. \tag{e}$$

Înlocuind în expresia lui $\ddot{x}$ valoarea lui tg φ din (e), obţinem relaţia liniară

$$\ddot{x} - 2k\omega\dot{x} + \omega^2 x(1 + k^2) = 0$$

între x, $\dot{x}$ şi $\ddot{x}$.

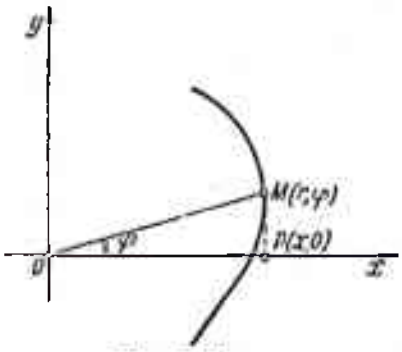


Fig. 7.34

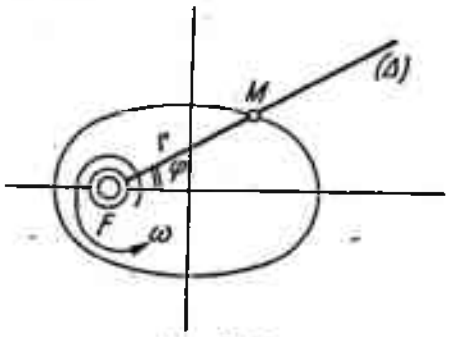


Fig. 7.35

7.35. O dreaptă (Δ) se roteşte în jurul punctului F cu o viteză unghiulară constantă ω şi intersectează o elipsă de semiaxe a şi b, care are unul dintre focare în F (fig. 7.35). Cu ce viteză se deplasează punctul M pe elipsă?

Rezolvare. În coordonate polare, elipsa are ecuaţia

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

Viteza punctului M este

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2;$$

dar

$$\dot{r} = \frac{-p\, e\, \omega \sin \varphi}{(1 - e \cos \varphi)^2} = -\frac{r^2\, e\, \omega \sin \varphi}{p}, \quad (\omega = \dot{\varphi}).$$

deci

$$v^2 = \frac{r^4 e^2 \omega^2 \sin^2 \varphi}{p^2} + r^2\omega^2.$$

Înlocuind valorile

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \sin^2 \varphi = 1 - \frac{(r-p)^2}{r^2 e^2}$$

rezultă pentru v^2 expresia

$$v^2 = r^4\omega^2 \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}}{\frac{b^4}{a^2}} \left[1 - \frac{\left(r - \frac{b^2}{a}\right)^2}{r^2 \frac{(a^2-b^2)}{a^2}}\right] + r^2\omega^2$$

respectiv

$$v = \frac{r\omega}{b} \sqrt{r(2a - r)}.$$

7.36. Un punct se mişcă în jurul unui centru fix O astfel încît accelerația sa $\bar{a}$ este perpendiculară pe raza vectoare $\bar{r}$ (fig. 7.36). Raza vectoare se rotește cu o viteză unghiulară constantă ω. Care sînt ecuațiile mişcării şi expresia accelerației $\bar{a}$? Condiții inițiale: $r = r_0$, $\varphi = 0$, şi $\bar{v}_0 \perp \bar{r}_0$. (Wittenbauer).

Rezolvare. Accelerația punctului este tot timpul mişcării perpendiculară pe raza vectoare, deci $a_\rho = 0$.

Avem relația

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (\dot{\varphi} = \omega),$$

care prin integrare dă ecuația mişcării

$$r = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}.$$

Constantele se determină cu condițiile inițiale: la $t = 0$, $r = r_0$, $\dot{r} = 0$; rezultă sistemul

$$C_1 + C_2 = r_0$$
$$C_1 - C_2 = 0$$

ale cărui soluții sînt

$$C_1 = C_2 = \frac{r_0}{2}.$$

Ecuațiile mişcării vor fi

$$r = \frac{r_0}{2}\left[e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right]; \quad \varphi = \omega t.$$

Accelerația punctului M este

$$a = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2\omega \frac{r_0}{2} \omega \left[e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right] = \omega^2 r_0 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

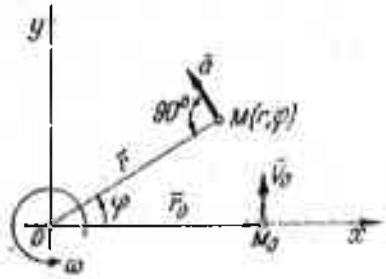


Fig. 7.36

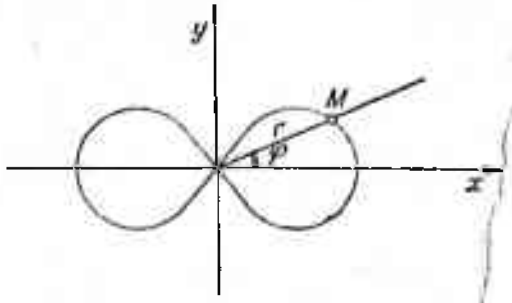


Fig. 7.37

7.37. Un punct descrie o lemniscată de ecuație polară $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (fig. 7.37). Viteza areolară este $\frac{C}{2}$. Care este viteza punctului la un moment dat și în ce timp T punctul parcurge întreaga curbă?

Rezolvare. Ecuația lemniscatei este

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Expresia vitezei areolare este dată de

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{C}{2}.$$

Viteza unui punct de pe curbă se exprimă în coordonate polare prin formula

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

Derivînd ecuația lemniscatei obținem

$$2r\dot{r} = -a^2 \cdot 2 \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

respectiv pentru $\dot{r}$ valoarea

$$\dot{r} = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{r} \cdot \frac{C}{r^2} = -\frac{a^2 C}{r^3}\sqrt{1 - \frac{r^4}{a^4}} = -\frac{C\sqrt{a^4 - r^4}}{r^3}.$$

Viteza punctului devine

$$v^2 = \frac{C^2(a^4 - r^4)}{r^6} + r^2 \cdot \frac{C^2}{r^4} = \frac{C^2a^4 - C^2r^4 + r^4C^2}{r^6} = \frac{C^2a^4}{r^6}$$

respectiv

$$v = \frac{Ca^2}{r^3}.$$

Perioada mișcării T este

$$T = \frac{2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot a^2 \cos 2\varphi \cdot d\varphi}{\frac{C}{2}} = \frac{2a^2}{C}.$$

7.38. Un punct M se mişcă uniform cu viteza v_0 pe o elice circulară (fig. 7.38, *a*). Cunoscînd raza r a cilindrului şi panta α a elicei, să se studieze mişcarea punctului în coordonate carteziene, cilindrice şi intrinseci.

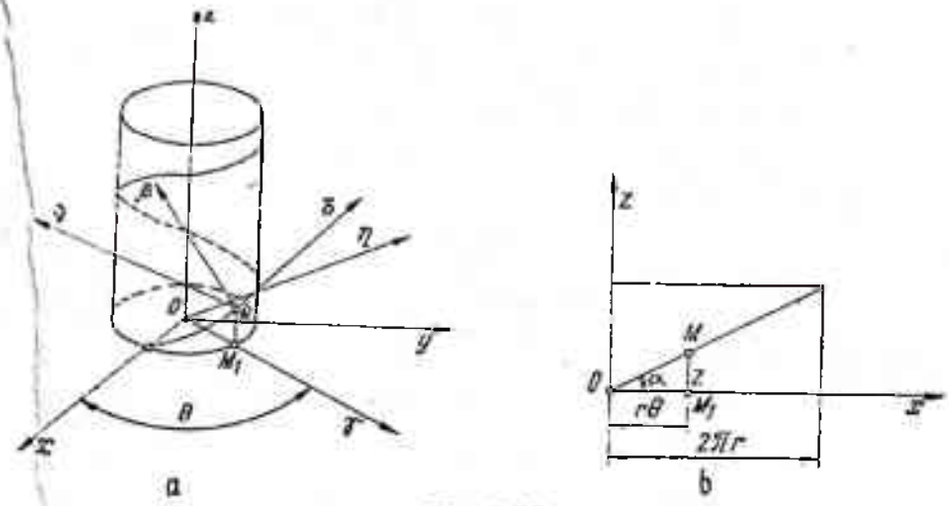


Fig. 7.38

Rezolvare. Considerînd sistemul de coordonate carteziene $Oxyz$ ecuaţiile parametrice ale elicei sînt

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = r\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

iar componentele vitezei

$$\dot{x} = -r\sin\theta\cdot\dot{\theta},\ \dot{y} = r\cos\theta\cdot\dot{\theta},\ \dot{z} = r\dot{\theta}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

deci

$$|\bar{v}| = v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{r\dot{\theta}}{\cos\alpha}$$

şi

$$\dot{\theta} = \frac{v_0\cos\alpha}{r} = \text{const.}$$

Integrînd această ecuaţie şi ştiind că pentru $t = 0$, $\theta = 0$, obţinem legea de variaţie a lui θ în timp

$$\theta = \frac{v_0 t\cos\alpha}{r}.$$

Componentele acceleraţiei punctului sînt

$$\ddot{x} = -r\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = -x\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y} = -r\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = -y\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{z} = 0,$$

deci vectorul accelerație se găsește în planul xOy și este coliniar cu vectorul $\overline{OM_1}$

$$\bar{a} = -\dot{\theta}^2\overline{OM_1}.$$

Mărimea accelerației este

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = r\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{r}.$$

— În coordonate intrinseci

$$v = \dot{s} = v_0$$

$$s = v_0 t + C$$

cu condițiile inițiale $t = 0$, $s = 0$, ceea ce conduce la $C = 0$. Ecuația de mișcare este în acest caz

$$s = v_0 t.$$

Componentele accelerației în triedrul lui Frenet sînt

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_\nu = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v_0^2}{\rho}, \quad \bar{a} = \frac{v_0^2}{\rho}\bar{\nu}.$$

Putem determina raza de curbură a elicei căci expresia accelerației este cunoscută, deci

$$|\bar{a}| = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{r} = \frac{v_0^2}{\rho}$$

de unde

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}.$$

— În coordonate cilindrice r, θ și z (triedrul $Orxz$),

$$r = \text{const}, \quad z = r\theta \operatorname{tg} \alpha.$$

Componentele vitezei sînt

$$v_\rho = \dot{r} = 0$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_z = \dot{z} = v_0 \sin \alpha$$

de unde

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 \cos \alpha}{r}.$$

Componentele accelerației sînt

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{r}$$

$$a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$a_z = \ddot{z} = 0$$

deci

$$\bar{a} = -\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{r} \bar{\rho}.$$

7.39. Un punct se mișcă pe suprafața unei sfere de rază R, cu viteza constantă $\bar{v}$. Viteza face cu meridianul un unghi α constant (fig. 7.39). Să se determine traiectoria punctului.

Rezolvare. Viteza $\bar{v}$ are două componente $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$, dirijate respectiv după meridian și paralelul din punctul respectiv

$$v_1 = R\dot{\theta}$$

$$v_2 = R \cos \theta \cdot \dot{\varphi}.$$

Dar

$$v_1 = v \cos \alpha$$

$$v_2 = v \sin \alpha,$$

deci

$$R\dot{\theta} = v \cos \alpha$$

$$R \cos \theta \dot{\varphi} = v \sin \alpha.$$

Împărțind cele două relații se obține

$$\frac{d\theta}{\cos \theta} = \operatorname{cotg} \alpha \, d\varphi.$$

Notînd $\operatorname{cotg} \alpha = K$ și integrînd obținem

$$\int \frac{d\theta}{\cos \theta} = K\varphi + C$$

respectiv

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = K\varphi + C.$$

Ținînd seama de condițiile inițiale $\varphi = 0$, $\theta = 0$, rezultă $C = 0$, deci

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = e^{K\varphi}.$$

Traiectoria este o curbă denumită loxodromie.

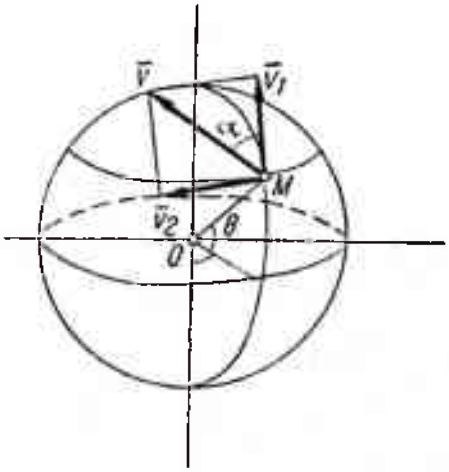


Fig. 7.39

Probleme propuse pentru rezolvare

7.40. Un om de înălțime h trece cu viteza constantă $\bar{v}_0$ sub un felinar care se află la înălțimea H deasupra pămîntului. Să se afle viteza v cu care se mișcă pe pămînt extremitatea M a umbrei omului (fig. 7.40).

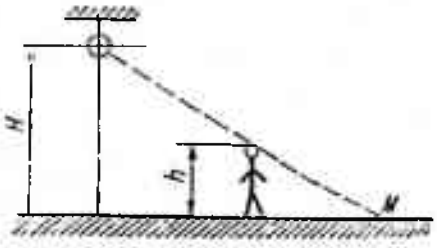


Fig. 7.40

R. $v = \dfrac{H}{H-h} v_0$.

7.41. Două corpuri A și B sînt aruncate pe verticală din același punct O, primul cu viteza $\bar{v}_0$, al doilea după un interval de timp t_1 cu viteza $\bar{v}_1$. Să se determine momentul și locul de întîlnire al corpurilor.

R. $t_A = \dfrac{\dfrac{gt_1^2}{2} + v_1 t_1}{gt_1 + v_1 - v_0}$

$$x_A = -\frac{gt_A^2}{2} + v_0 t_A$$

cu condiția

$$gt_1 + v_1 - v_0 > 0 \text{ și } v_0 > \frac{gt_1}{2}$$

sau

$$gt_1 + v_1 - v_0 < 0 \text{ și } v_0 \leqslant \frac{gt_1}{2}.$$

7.42. Arătătoarele unui ceasornic sînt perfect suprapuse la ora 12. La ce oră vor face, pentru prima dată, între ele, un unghi egal cu un radian? (Examen de admitere la Politehnica din București, 1945.)

R. $t = 12\text{h}\,10'25''07$.

7.43. Să se calculeze produsul vectorial $\bar{v} \times \bar{a}$.

R. $\bar{v} \times \bar{a} = \dfrac{v^3}{\rho} \bar{\tau} \times \bar{\nu}$.

7.44. Zborul unei rachete R este urmărit cu aparatul A, folosind o rază luminoasă AR. Cunoscînd că viteza rachetei este uniformă și are valoarea v_0, după verticala Oy, se cere să se stabilească viteza unghiulară a razei AR (fig. 7.44). Distanța AO este cunoscută, b.

R. $\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{b^2 + v_0^2 t^2}}$.

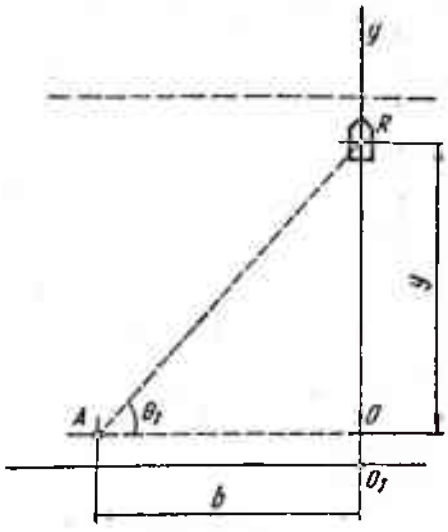


Fig. 7.44

7.45. Elicea unui avion are turația inițială $n_0 = 1\,200$ t/min și are o accelerație unghiulară $\varepsilon = 2\pi \frac{\text{rad}}{s^2}$. Să se determine turația elicei după $t = 5$ s.

R. $\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60}$; $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$; $n = \frac{60\omega}{2\pi}$.

7.46. — În „Le Château de la Terreur" a lui Edgar Wallace *(trad.* L. Remond; *ed.* Moorthamers Frères, Bruxelles) se găsește următorul pasaj privind aflarea adîncimii unui puț, despre care este vorba în cursul acțiunii:

„Reeder se apropie de marginea puțului...

— Hm! făcu dînsul, lăsînd să cadă o piesă de argint de 2 shillingi în puț.

Apoi, timp de cîteva momente, care păreră secole, el ascultă. În fine, un sunet argintiu înăbușit se auzi.

— Nouă secunde...

El privi pe Olga și zise:

— Spune-mi, te rog, bazîndu-te pe legile de cădere ale obiectelor, care este adîncimea acestui puț.....

Lăsăm pe cititor să calculeze, pentru a verifica dacă rezultatul este posibil.

7.47. Un mobil este lansat cu viteza inițială $\vec{v}_0$ înclinată cu unghiul α față de orizontală (fig. 7.47). Să se determine traiectoria mobilului, înălțimea maximă la care se va ridica și distanța față de origine (bătaia) la care mobilul revine pe pămînt. Să se calculeze pentru ce unghi α, aceasta din urmă este maximă. Se va neglija rezistența aerului.

R. Traiectoria este parabola

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha.$$

Înălțimea maximă este

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Bătaia $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ e maximă pentru $\alpha = 45^0$.

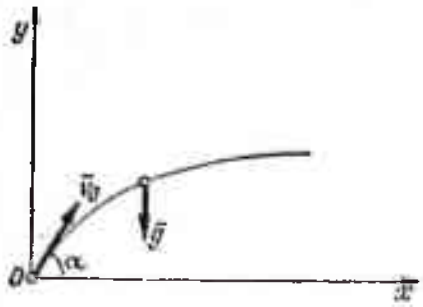


Fig. 7.47

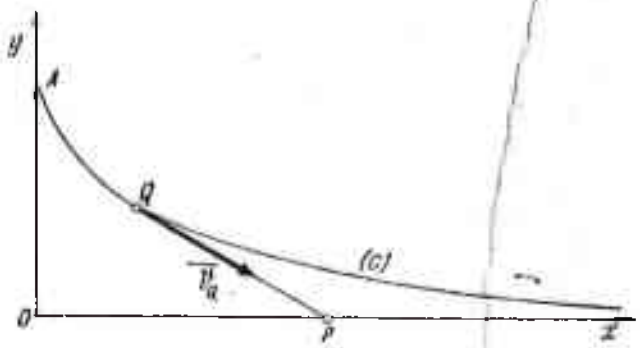


Fig. 7.48

7.48. Un punct P parcurge axa Ox cu viteza constantă v_0, iar un alt punct Q se mișcă în planul xOy pe o curbă (C), astfel încît segmentul de dreaptă QP rămîne constant, viteza v_Q a punctului Q fiind dirijată după dreapta QP (fig. 7.48).

Să se determine:

a) traiectoria (C) a punctului Q;
b) viteza și accelerația punctului Q;
c) raza de curbură a curbei (C).

R. Curba (C) este tractricea

$$dx = \frac{dy}{y}\sqrt{a^2 - y^2};$$

$$v_Q = \frac{v_0}{a}\sqrt{a^2 - y^2};$$

$$a_Q = \frac{v_0^2}{a^2}\, y;$$

$$\rho = \frac{a}{y}\sqrt{a^2 - y^2}.$$

7.49. — Știind că viteza pe care o capătă un mobil căzînd în vid de la înălțimea h, este de forma: $v = \varphi(h, g)$, să se deducă prin considerații de omogenitate, că $v = k\sqrt{gh}$, unde $k = const.$

R. $v = \varphi(hg)$; $\quad \frac{\lambda}{\tau} v = \varphi\left(\lambda h, \frac{\lambda}{\tau^2} g\right)$: $\quad \lambda h = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{h} \\ \tau = \sqrt{\lambda g} \end{array} \right.$

$$\frac{\lambda}{\tau} v = \varphi(1, 1) = k \frac{\lambda}{\tau^2} g = 1$$

$$v = k\sqrt{gh}$$

7.50. Dacă pe un plan înclinat și pe o verticală, coboară un același mobil, care pleacă din repaus — punctele de lansare avînd aceeași ordonată — duratele de cădere vor fi în același raport ca lungimea planului înclinat și lungimea verticalei (fig. 7.50).

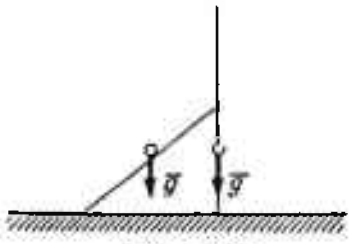


Fig. 7.50

7.51. Se dă mișcarea definită prin ecuațiile parametrice

$$x = 15\,t^2$$

$$y = 4 - 20\,t^2.$$

Să se determine traiectoria, viteza și accelerația mobilului, la un moment dat.

R. Traiectoria: $4x + 3y - 12 = 0$.
Viteza: $v = 50\ t$.
Accelerația: $a = 50$.

7.52. Un mobil execută o mișcare rectilinie dată de ecuația

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Să se arate că mișcarea este oscilatorie și să se determine amplitudinea, perioada, frecvența, faza, precum și expresiile vitezei și accelerației.

R. Amplitudinea: $a = \sqrt{A^2 + B^2}$

Faza: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$.

Frecvența: $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

Perioada: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Viteza: $v = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Accelerația: $a = -\sqrt{A^2 + B^2}\, \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$.

7.53. O dreaptă (d) se rotește cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul punctului O și intersectează în punctul M un cerc de rază $OO_1 = r$ (fig. 7.53). Să se determine viteza și accelerația mișcării punctului M pe cerc și pe dreaptă.

Scanned with OKEN Scanner

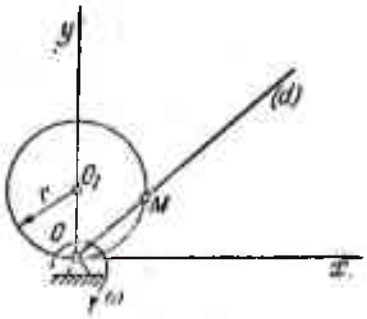


Fig. 7.53

R. Pe cerc: $v = 2r\omega$, $a = 4\omega^2 r$.

Pe dreaptă: $v = -\omega\sqrt{4r^2 - u^2}$, $a = -\omega^2 u$.

7.54. Să se determine mişcarea pe o elipsă, caracterizată prin ecuaţiile

$$x = m\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = p\cos(\omega t + \beta)$$

în care m, p, β, α, ω sînt constante.

R. Viteza: $v = \omega\sqrt{m^2\sin^2(\omega t + \alpha) + p^2\sin^2(\omega t + \beta)}$.

Acceleraţia: $a = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r$, proporţională cu distanţa la centrul elipsei şi dirijată spre centru.

7.55. Un punct descrie parabola $y^2 = 2px$, astfel că acceleraţia este constantă şi paralelă cu dreapta $y = mx$. La momentul $t = 0$ avem $x = 0$ şi $v = v_0$. Să se studieze mişcarea.

R. $\bar{v} = \dfrac{v_0 y}{p - my}\bar{i} + \dfrac{v_0 p}{p - my}\bar{j}$

$\bar{a} = \dfrac{p^2 v_0^2}{(p - my)^3}\bar{i} + \dfrac{mp^2 v_0^2}{(p - my)^3}\bar{j}$.

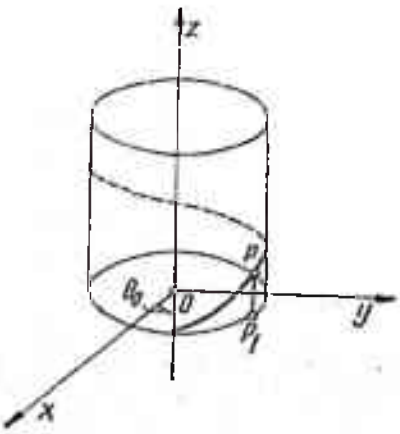


Fig. 7.56

7.56. Un punct P se mişcă pe un cilindru drept eliptic de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, descriind o elice cu unghiul de înclinare α. Să se determine viteza punctului P cunoscînd viteza areolară $\Omega = \dfrac{1}{2}ab\omega$ a proiecţiei sale P_1 în planul xOy (fig. 7.56).

R. $v = \dfrac{\omega}{\cos\alpha}\sqrt{a^2\sin^2(\omega t + \theta_0) + b^2\cos^2(\omega t + \theta_0)}$.

VIII. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este determinarea expresiilor generale ale vectorului de poziţie, vitezei şi acceleraţiei unui punct oarecare al unui rigid, în mişcare faţă de un sistem de referinţă, admis în mod convenţional, fix. Între vectorul de poziţie $\bar{r}_1$ al unui punct din solid, definit faţă de sistemul fix, vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului faţă de un sistem mobil legat invariabil de solid şi vectorul de poziţie $\bar{r}_0$ al originii sistemului mobil legat de solid faţă de sistemul fix există relaţiile

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}.$$

Distribuţia vitezelor în solid este

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad \text{(a)}$$

unde $\bar{v}_0$ este viteza originii triedrului mobil faţă de cel fix, iar $\bar{\omega}$ este vectorul viteză unghiulară de rotaţie în mişcarea sistemului legat de rigid (fig. VIII.1).

Distribuţia de acceleraţii în solid are expresia

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} \qquad \text{(b)}$$

unde $\bar{a}_0$ este acceleraţia originii triedrului mobil faţă de cel fix, iar $\dot{\bar{\omega}}$ vectorul acceleraţie unghiulară a mişcării solidului.

Cazuri particulare de mişcări. a) *Mişcarea de translaţie:* o dreaptă oarecare a rigidului rămîne în tot timpul mişcării paralelă cu ea însăşi $\bar{\omega} = 0$. Vectorii viteză şi acceleraţie sînt vectori liberi şi au expresiile

$$\bar{v} = \bar{v}_0, \ \bar{a} = \bar{a}_0.$$

b) *Mişcarea de rotaţie cu axă fixă:* două puncte aparţinînd rigidului rămîn fixe în spaţiu (vectorii $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$ sînt coliniari, fig. VIII.2).

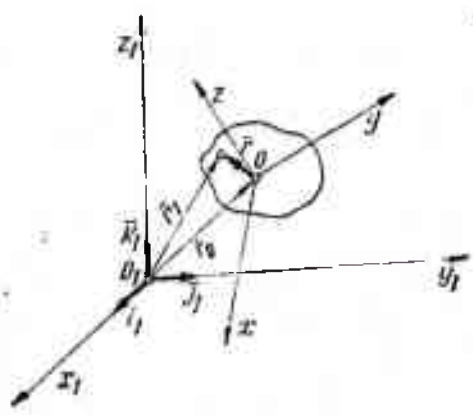


Fig. VIII.1

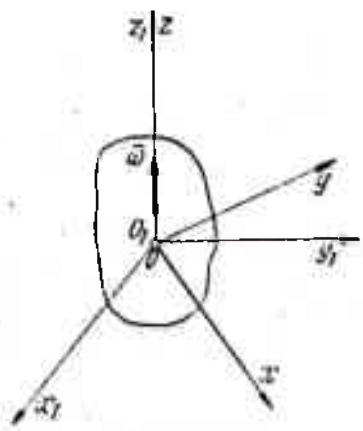


Fig. VIII.2

Distribuţia de viteze este în acest caz

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

iar distribuţia de acceleraţii

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}.$$

Traiectoriile punctelor solidului sînt cercuri în plane perpendiculare pe axa de rotaţie.

c) *Mişcarea de rototranslaţie*: două puncte aparţinînd rigidului rămîn tot timpul mişcării pe o dreaptă fixă din spaţiu — axa mişcării de rototranslaţie ($\bar{v}_0 \| \bar{\omega}$). Legea de distribuţie a vitezelor şi acceleraţiilor este dată de formule de forma (a) şi (b) (fig. VIII. 3).

d) *Mişcarea plan-paralelă*: trei puncte necoliniare ale solidului sînt conţinute în tot timpul mişcării într-un plan fix din spaţiu ($\bar{v}_0 \perp \bar{\omega}$), (fig. VIII. 4).

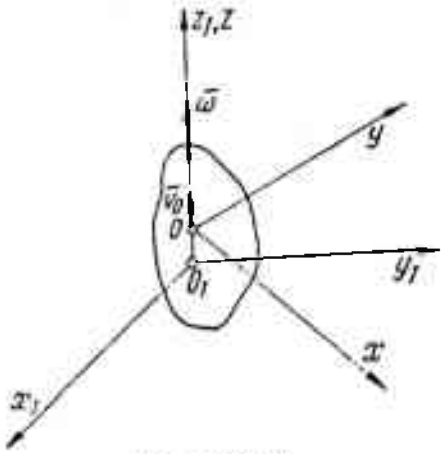


Fig. VIII.3

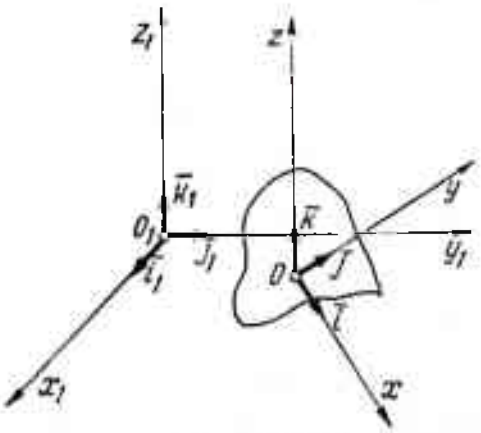


Fig. VIII.4

Distribuţia de viteze este identică cu cea de la mişcarea de rotaţie, ca şi cînd solidul s-ar roti în jurul unei axe instantanee de rotaţie ale cărei ecuaţii în sistemul mobil, legat de solid, sînt

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}, \quad \eta = \frac{v_{0x}}{\omega}, \quad \varsigma \text{ — arbitrar.}$$

Locul geometric al centrului instantaneu faţă de sistemul de referinţă mobil se numeşte *rostogolitoare* (centroida mobilă). Locul geometric al centrului instantaneu faţă de sistemul de referinţă fix poartă numele de *bază* (centroida fixă) şi are ecuaţiile parametrice

$$\xi_1 = x_0 + \xi \cos\theta - \eta \sin\theta, \; \xi_1 = y_0 + \xi \sin\theta + \eta \cos\theta.$$

Distribuţia acceleraţiilor în mişcarea plană este identică cu cea dintr-o mişcare de rotaţie, ca şi cînd corpul s-ar roti în jurul axei normale pe planul fix, care trece prin centrul acceleraţiilor, de coordonate.

$$\xi' = \frac{\omega^2 a_{0x} - \dot{\omega} a_{0y}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2}, \quad \eta' = \frac{\omega^2 a_{0y} + \dot{\omega}\, a_{0x}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2}.$$

e) *Mişcarea solidului cu punct fix* ($\bar{v}_0 = 0$, $\bar{a}_0 = 0$). Distribuţia de viteze este identică cu cea din cazul mişcării de rotaţie, ca şi cum rigidul s-ar roti în jurul axei care coincide cu vectorul $\bar{\omega}$ — axa instantanee de rotaţie (fig. VIII. 5).

Distribuţia acceleraţiilor are un caracter specific, nefiind reductibilă la aceea din cazul mişcării de rotaţie decît pentru cazul particular $\bar{\omega} \times \dot{\bar{\omega}} = 0$. Expresia acceleraţiei unui punct este

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}.$$

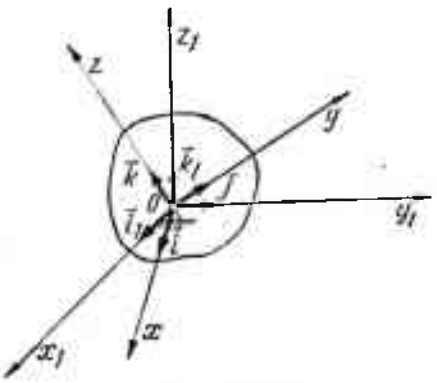


Fig. VIII.5

f) *Mişcarea generală a rigidului* are o distribuţie de viteze ca şi cînd rigidul ar avea o mişcare de rototranslaţie în jurul unei axe definite prin ecuaţia

$$\frac{v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}.$$

Axa definită de ecuaţiile acestea poartă numele de *axă instantanee a mişcării de rototranslaţie.*

Distribuţia acceleraţiilor în mişcarea cea mai generală a rigidului este identică cu aceea a unui rigid cu un punct fix, ca şi cînd rigidul ar avea ca punct fix polul acceleraţiilor.

Probleme rezolvate

8.1. O pană triunghiulară (secţiune triunghi isoscel) se găseşte între două prisme A şi B, care se deplasează prin translaţie pe o suprafaţă orizontală, cu vitezele date $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ (fig. 8.1). Să se determine viteza mişcării penei.

Rezolvare. Datorită deplasării prismelor A şi B, pana are o deplasare definită prin componentele

$$dx = dx_1 - dx_2$$

$$dy = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \, (dx_1 + dx_2).$$

Derivînd componentele deplasării în raport cu timpul se obţin componentele vitezei penei pe axe

$$\dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = v_1 - v_2$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha (v_1 + v_2),$$

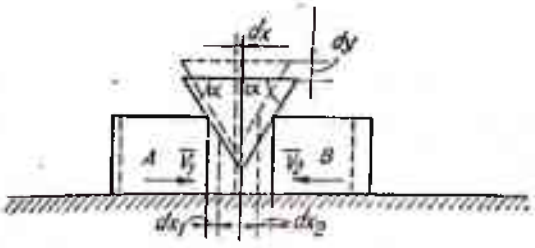


Fig. 8.1

respectiv vectorul viteză, în mărime și direcție,

$$\bar{v} = (v_1 - v_2)\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha(v_1 + v_2)\,\vec{j}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha(v_1 + v_2)^2}$$

8.2. Să se studieze mișcarea de translație curbilinie a unei pedale de bicicletă, știind că bicicleta merge cu 12 km/h, iar roata acționată direct de pedală face o rotație, în timp ce roata bicicletei (de 60 cm diametru) face 3 rotații (fig. 8.2, *a*).

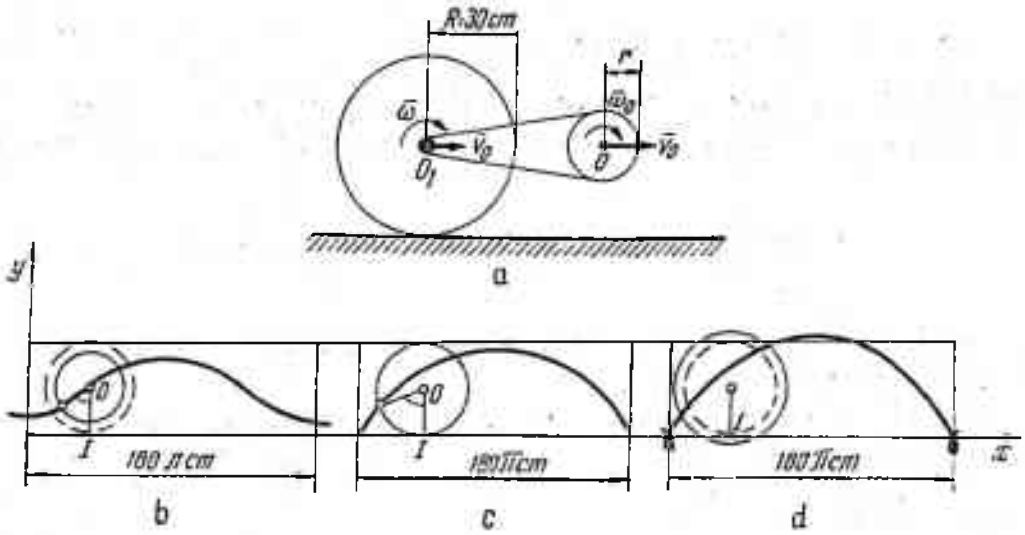


Fig. 8.2

Rezolvare. Viteza bicicletei este

$$v_0 = 12\ \mathrm{km/h} = \frac{10}{3}\ \mathrm{m/s}.$$

Roata bicicletei, de rază $R = 30$ cm are o mișcare de rostogolire pură, deci

$$R\omega = v_0$$

de unde rezultă

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{100}{9}\ \mathrm{rad/s}.$$

Viteza unghiulară ω_0 a pedalei rezultă din enunț

$$\omega_0 = \frac{\omega}{3} = \frac{100}{27}\ \mathrm{rad/s}.$$

Avînd viteza unghiulară ω_0 a pedalei, precum și viteza v_0 a articulației pedalei O, se calculează distanța ρ de la punctul O la centrul instantaneu de rotație al pedalei

$$|OI| = \rho = \frac{v_0}{\omega_0} = 3R = 0{,}90\ \mathrm{m}.$$

Spaţiul parcurs de bicicletă pentru o rotaţie completă a pedalei este

$$s = 3.2\pi R = 180\ \pi.$$

Ecuaţiile parametrice ale mişcării pedalei vor fi

$$x = \rho\theta - r\sin\theta$$

$$y = \rho - r\cos\theta.$$

Componentele vitezei pedalei sînt

$$\dot{x} = \dot{\theta}(\rho - r\cos\theta)$$

$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta,$$

iar componentele acceleraţiei

$$\ddot{x} = \ddot{\theta}(\rho - r\cos\theta) + \dot{\theta}^2 r\sin\theta$$

$$\ddot{y} = r(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta).$$

Traiectoria pedalei este:

— o cicloidă alungită, pentru $r < \rho$ (fig. 8.2, *b*);
— o cicloidă, pentru $r = \rho$ (fig. 82, *c*);
— o cicloidă scurtată, pentru $r > \rho$ (fig. 8.2, *d*).

8.3. Un solid se roteşte cu 50 rot/s în jurul dreptei $x_1 = y_1 = z_1$ (fig. 8.3). Să se determine viteza unui punct oarecare al solidului, $M(x, y, z)$.

Rezolvare. Cosinuşii directori ai dreptei după care acţionează vectorul ω sînt

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

iar mărimea vectorului $\bar{\omega}$ este

$$\omega = 2\pi \cdot 50 = 100\ \pi\ \text{rad/s}.$$

Componentele vectorului viteză unghiulară pe axele fixe $O_1x_1y_1z_1$ sînt egale între ele şi au valoarea constantă

$$\omega_{x_1} = \omega_{y_1} = \omega_{z_1} = \frac{100\ \pi}{\sqrt{3}}.$$

Viteza unui punct de coordonate x_1, y_1, z_1 se scrie sub forma

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \frac{100\ \pi}{\sqrt{3}}\left[(z_1 - y_1)\,\bar{i}_1 + (x_1 - z_1)\,\bar{j}_1 + (y_1 - x_1)\,\bar{k}_1\right].$$

Față de un sistem mobil invariabil legat de solid, viteza unui punct M are expresia

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \bar{i} + \omega x \bar{j}.$$

Trecerea de la un sistem de referință la celălalt se face ținînd seama de relațiile evidente

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x_1\bar{i}_1 + y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1$$

de unde rezultă

$$\bar{k} = \alpha_1\bar{i}_1 + \beta_1\bar{j}_1 + \gamma_1\bar{k}_1$$

$$\bar{j} = \alpha_2\bar{i}_1 + \beta_2\bar{j}_1 + \gamma_2\bar{k}_1$$

$$\bar{i} = \alpha_3\bar{i}_1 + \beta_3\bar{j}_1 + \gamma_3\bar{k}_1,$$

în care coeficienții α, β, γ sînt cosinușii directori ai axelor triedrului mobil, față de cel fix.

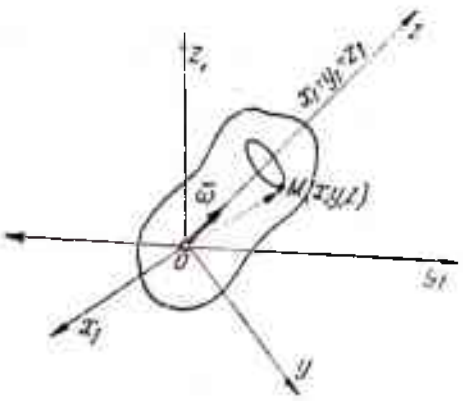


Fig. 8.3

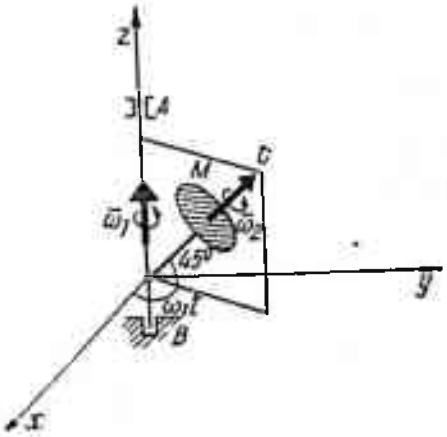


Fig. 8.4

8.4. Un cadru pătrat se rotește în jurul axei AB efectuînd $\omega_1 = 2$ rot/min. În jurul axei BC, care coincide cu diagonala cadrului, se rotește un disc M efectuînd $\omega_2 = 2$ rot/min (fig. 8.4).

Să se determine viteza unghiulară absolută a discului.

Rezolvare. Vitezele unghiulare ale celor două mișcări sînt

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2\pi \cdot 2}{60} = \frac{\pi}{15} \text{ rad/s}.$$

Discul M este antrenat într-o mişcare de rotaţie avînd viteza unghiulară

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \frac{\pi}{15}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{i}\cos\omega_1 t + \bar{j}\sin\omega_1 t + \bar{k}) + \bar{k}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{15}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{i}\cos\omega_1 t + \bar{j}\sin\omega_1 t) + \bar{k}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\right]$$

$$|\bar{\omega}| = \frac{\pi}{15}\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2} = \frac{\pi}{15}\sqrt{2{,}5 + \sqrt{2}} = 0{,}414 \text{ rad/s}.$$

8.5. Să se studieze mişcarea unui rulment într-un lagăr vertical în care se reazemă un arbore, ce se roteşte în jurul unui ax vertical cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$ (fig. 8.5). Se cunosc unghiurile α şi β.

Rezolvare. Presupunînd că nu se produc alunecări între pivot şi rulment şi nici între rulment şi lagăr, mişcarea absolută a rulmentului este o rostogolire faţă de lagăr, axa instantanee de rotaţie fiind BC. Mişcarea rulmentului poate fi considerată ca rezultînd din mişcarea relativă faţă de pivot, care este o rostogolire avînd ca axă instantanee de rotaţie dreapta AO şi dintr-o mişcare de transport, rotaţia pivotului în jurul axei OO_1. Din figura 8.5 rezultă

$$\omega_a = \frac{\omega \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad \omega_r = \frac{\omega \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

şi $\bar{\omega}_a = \bar{\omega} + \bar{\omega}_r$.

Axa instantanee de rotaţie a mişcării absolute a rulmentului, trecînd prin punctul fix O, rezultă că rulmentul poate fi considerat ca un solid cu punct fix.

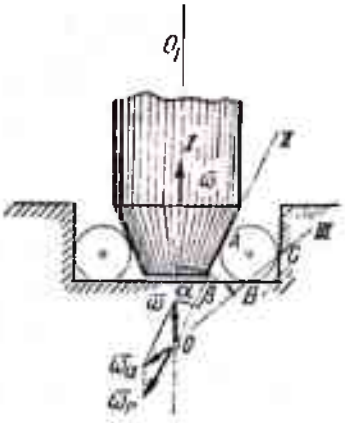


Fig. 8.5

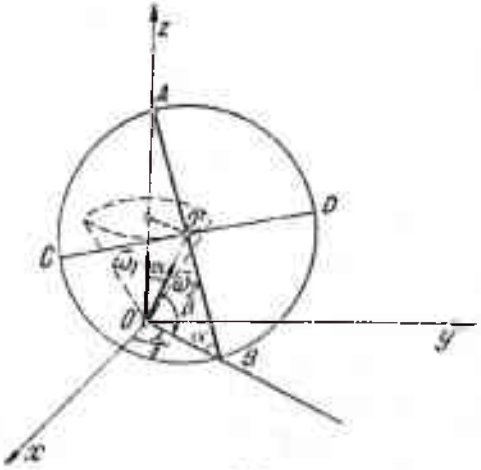


Fig. 8.6

8.6. Caruselul reprezentat printr-o suprafaţă circulară $ABCD$ se roteşte în jurul axei sale OO', care trece prin centrul său O', efectuînd 60 rot/min, iar axa OO' se roteşte în acelaşi sens în jurul verticalei Oz cu 6 rot/min (fig. 8.6). Diametrul discului AB fiind 10 m, $\alpha = 30°$ iar $\beta = 60°$, să se deter-

mine viteza punctului B în momentul cînd acesta are poziția cea mai de jos.

Rezolvare. Vitezele unghiulare ale celor două mișcări de rotație au mărimile

$$\omega_1 = \frac{2\pi N_1}{60} = \frac{2\pi \cdot 6}{60} = 0{,}2\,\pi \text{ rot/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi N_2}{60} = \frac{2\pi \cdot 60}{60} = 2\pi \text{ rot/s}.$$

Vectorii viteză unghiulară respectivi sînt

$$\bar{\omega}_1 = 0{,}2\,\pi\bar{k}$$

$$\bar{\omega}_2 = 2\pi\,[\sin\alpha\,(\cos\gamma\bar{i} + \sin\gamma\bar{j}) + \cos\alpha\bar{k}] = \pi\,[(\cos\gamma\bar{i} + \sin\gamma\bar{j}) + \sqrt{3}\bar{k}].$$

Vectorul viteză unghiulară care caracterizează mișcarea caruselului are expresia

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \pi[(\cos\gamma\bar{i} + \sin\gamma\bar{j}) + (\sqrt{3} + 0{,}2)\,\bar{k}].$$

Vectorul de poziție al punctului B este

$$\overline{OB} = 5\sqrt{3}(\cos\gamma\bar{i} + \sin\gamma\bar{j}),$$

iar viteza punctului B va fi

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \overline{OB} = 5\sqrt{3}\pi \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\gamma & \sin\gamma & \sqrt{3} + 0{,}2 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix} = 5\sqrt{3}\pi(\sqrt{3} + 0{,}2)\,(\bar{j}\cos\gamma - \bar{i}\sin\gamma).$$

Mărimea vitezei punctului B este

$$|\bar{v}_B| = 5\sqrt{3}\pi(\sqrt{3} + 0{,}2)\text{ m/s}.$$

8.7. Un disc de rază R se rotește cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}_1$ în jurul axei orizontale O_1O_2, care la rîndul său se rotește cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}_2$, în jurul unei axe verticale (fig. 8.7, *a*). Să se calculeze viteza și accelerația punctelor A și B situate la extremitățile diametrului vertical al discului.

Rezolvare. Mișcarea de rotație a discului se efectuează cu viteza unghiulară de rotație $\bar{\omega}$ dată de

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,\ |\bar{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Vitezele punctelor A și B sînt însă independente de rotația în jurul axei verticale întrucît aceste puncte se găsesc chiar pe axa de rotație corespunzătoare lui $\bar{\omega}_2$.

Cele două viteze sînt egale în valoare absolută

$$v_A = v_B = R\omega_1$$

şi se exprimă sub forma

$$\bar{v}_{a(A)} = \bar{v}_{1(A)} + \bar{v}_{2(A)} = \bar{v}_{1(A)} = R\omega_1\bar{u}_1, \quad \bar{v}_{a(B)} = -R\omega_1\bar{u}_1.$$

Accelerațiile punctelor A şi B sînt egale şi de semne contrare (fig. 8.7, *b*)

$$\bar{a}_{a(A)} = -\bar{a}_{a(B)} = \bar{a}_{r(A)} + \bar{a}_{c(A)} = R\omega_1^2\,\bar{v}_1 + 2\omega_2\bar{v}_{1(A)} = R\omega_1^2\bar{v}_1 + 2\omega_2 R\omega_1\bar{u}_2$$

şi au mărimea

$$a_A = a_B = R\sqrt{\omega_1^4 + 4\omega_2^2\omega_1^2} = R\omega_1\sqrt{\omega_1^2 + 4\omega_2^2}.$$

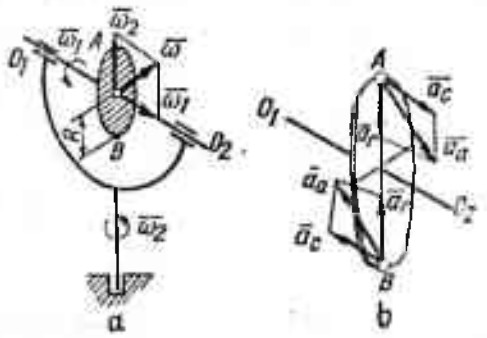


Fig. 8.7

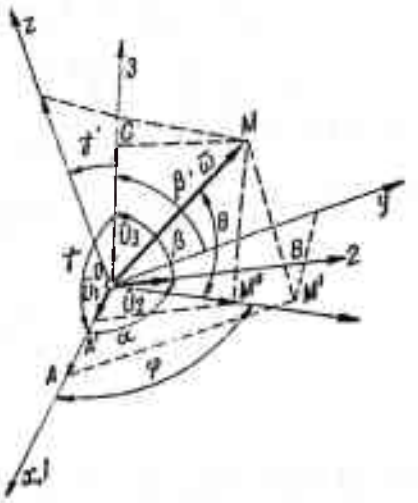


Fig. 8.8

8.8. Să se descompună vectorul viteză unghiulară de rotație $\bar{\omega}$, care acționează în punctul O, în trei vectori viteză unghiulară de rotație $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ paraleli cu axele concurente oarecare OA, OB, OC (fig. 8.8). (Unghiurile α, β, γ sînt date.)

Rezolvare. Fie $Oxyz$ un triedru cartezian față de care vectorul $\bar{\omega}$ are componentele ω_x, ω_y, ω_z determinate cu ajutorul unghiurilor θ şi φ formate de raza vectoare $\overline{OM}$ cu planul xOy, respectiv de proiecția razei vectoare pe acest plan cu axa Ox a sistemului considerat. Fie *0123* un sistem de axe oarecare față de care vectorul $\bar{\omega}$ are componentele ω_1, ω_2, ω_3. Vectorul $\bar{\omega}$ se poate scrie sub forma

$$\overline{OM} = \bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k} = \omega_1\bar{u}_1 + \omega_2\bar{u}_2 + \omega_3\bar{u}_3$$

unde am notat cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, versorii sistemului de referință $Oxyz$ şi cu $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ versorii sistemului *0123*. Între acești versori există relațiile

$$\bar{u}_1 = \bar{i}$$

$$\bar{u}_2 = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}$$

$$\bar{u}_3 = \cos\gamma \cdot \bar{i} + \cos\beta' \cdot \bar{j} + \cos\gamma' \cdot \bar{k}.$$

Vectorul $\bar{\omega}$ se poate scrie sub forma

$$\overline{OM} = \bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} = \omega(\cos\theta\cos\varphi \cdot \bar{i} + \cos\theta\sin\varphi \cdot \bar{j} +$$
$$+ \sin\theta \cdot \bar{k}) = \omega_1 \bar{i} + \omega_2(\cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}) + \omega_3(\cos\gamma \cdot \bar{i} + \cos\beta' \cdot \bar{j} +$$
$$+ \cos\gamma' \cdot \bar{k}) = \bar{i}(\omega_1 + \omega_2\cos\alpha + \omega_3\cos\gamma) + \bar{j}(\omega_2\sin\alpha + \omega_3\cos\beta') +$$
$$+ \omega_3\cos\gamma' \cdot \bar{k}.$$

Prin identificarea coeficienților versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ rezultă

$$\omega_x = \omega\cos\theta\cos\varphi = \omega_1 + \omega_2\cos\alpha + \omega_3\cos\gamma$$
$$\omega_y = \omega\cos\theta\sin\varphi = \omega_2\sin\alpha + \omega_3\cos\beta'$$
$$\omega_z = \omega\sin\theta = \omega_3\cos\gamma'$$

sau, rezolvînd acest sistem în raport cu ω_1, ω_2, ω_3, obținem valorile

$$\omega_1 = \omega_x - \omega_y \operatorname{cotg}\alpha + \omega_z \frac{\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta' - \cos\gamma}{\cos\gamma'}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_y}{\sin\alpha} - \omega_z \frac{\cos\beta'}{\sin\alpha \cdot \cos\gamma'} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\omega_y - \omega_z \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}\right)$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_z}{\cos\gamma'}.$$

Mărimi necunoscute în problema noastră sînt unghiurile β' și γ'. Determinarea lor se face ținînd seama de relațiile geometrice.

$$\cos\beta = \bar{u}_2\bar{u}_3 = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta'$$
$$\cos^2\beta' + \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' = 1.$$

Rezultă pentru $\cos\beta'$ valoarea

$$\cos\beta' = \frac{\cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha}$$

și pentru $\cos\gamma'$ valoarea

$$\cos\gamma' = \sqrt{1 - \cos^2\gamma - \cos^2\beta'} =$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Cu aceste valori determinate se vor putea exprima componentele ω_1, ω_2, ω_3 numai în funcție de elementele cunoscute ale problemei, adică de ω, de unghiurile α, β, γ și de θ, φ.

8.9. Un con circular drept de înălțime $h = 4$ cm și raza bazei $r = 3$ cm se rostogolește fără să alunece pe un plan, vîrful său fiind fixat în punctul O

(fig. 8.9). Să se calculeze viteza și accelerația unghiulară a conului, cînd viteza centrului cercului de bază este de 48 cm/s = ct.

Rezolvare. Rostogolirea conului pe planul orizontal se poate considera că se datorează unei rotații cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$ în jurul axei Oz, și unei rotații cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul axei conului. Vectorul viteză unghiulară rezultant (suma celor doi vectori viteză unghiulară) este

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 = \omega_0\bar{k} - \omega_1[\cos\alpha(\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}) - \sin\alpha\bar{k}] = -\omega_1\cos\alpha(\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}) + (\omega_0 - \omega_1\sin\alpha)\bar{k}.$$

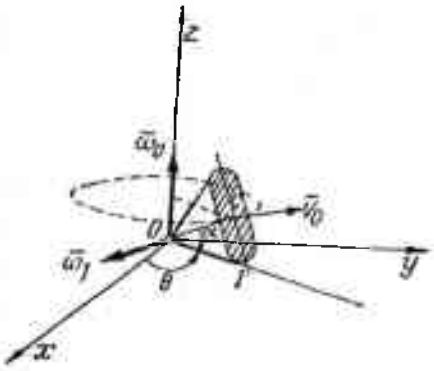


Fig. 8.9

Viteza centrului C al bazei conului este

$$\omega_0\bar{k}\times\overline{OC} = \bar{v}_0 \qquad \text{(a)}$$

unde

$$\overline{OC} = h\cos\alpha(\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}) + h\sin\alpha\,\bar{k}.$$

Formula (a) devine în acest caz

$$+h\omega_0\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & 1\\ \cos\alpha\cos\theta & \cos\alpha\sin\theta & \sin\alpha\end{vmatrix} = h\omega_0\cos\alpha(\bar{j}\cos\theta - \bar{i}\sin\theta) = \bar{v}_0.$$

De aici se calculează mărimea vitezei $\bar{v}_0$

$$v_0 = h\omega_0\cos\alpha,$$

respectiv viteza unghiulară ω_0 în funcție de v_0

$$\omega_0 = \frac{v_0}{h\cos\alpha}.$$

Conul, efectuînd o rostogolire fără alunecare pe planul orizontal, rezultă că axa OI este o axă instantanee de rotație și deci punctul I are viteza absolută față de sistemul de referință $Oxyz$ egală cu zero, adică

$$\bar{v}_I = \bar{\omega}\times\overline{OI} = d\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ \cos\theta & \sin\theta & 0\end{vmatrix} = d[\cos\theta(\bar{j}\omega_z - \bar{k}\omega_y) - \sin\theta(\bar{i}\omega_z - \bar{k}\omega_x)] =$$

$$= d[-\bar{i}\omega_z\sin\theta + \bar{j}\omega_z\cos\theta + \bar{k}(-\omega_y\cos\theta + \omega_x\sin\theta)] = 0.$$

Ecuația aceasta este satisfăcută dacă există relațiile

$$-\omega_z\sin\theta = 0$$

$$\omega_z\cos\theta = 0$$

$$-\omega_y\cos\theta + \sin\theta\cdot\omega_x = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$\omega_z = 0$$

$$\omega_y = \omega_x \operatorname{tg} \theta.$$

— Condiția $\omega_y = \omega_x \operatorname{tg} \theta$ arată că OI este axă instantanee de rotație.

— Condiția $\omega_z = 0$ stabilește relația care trebuie să existe între vitezele unghiulare ω_0 și ω_1 pentru a se produce rostogolirea

$$\omega_z = 0 = \omega_0 - \omega_1 \sin \alpha$$

sau

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sin \alpha} = \frac{v_0}{h \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{v_0}{h \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cdot \dfrac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}} = v_0 \frac{r^2 + h^2}{h^2 r}.$$

Vectorul viteză unghiulară este deci

$$\bar{\omega} = -\frac{v_0 \sqrt{r^2 + h^2}}{hr} (\cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j})$$

și are mărimea

$$\omega = \frac{v_0}{hr} \sqrt{r^2 + h^2} = 20 \text{ rad/s}.$$

Vectorul accelerație unghiulară se obține prin derivarea vectorului $\bar{\omega}$ (unde se ține seama că $\dot{\theta} = \omega_0$). Avem astfel

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = -\omega_1 \cos \alpha (-\sin \theta \cdot \dot{\theta} \bar{i} + \cos \theta \cdot \dot{\theta} \bar{j}) = \omega_1 \omega_0 \cos \alpha (\mp \sin \theta \bar{i} \mp \cos \theta \bar{j}),$$

respectiv

$$|\bar{\varepsilon}| = \omega_1 \omega_0 \cos \alpha = \omega_0^2 \operatorname{cotg} \alpha = 300 \text{ rad/s}^2.$$

8.10. Pe axa AB se găsesc roțile III și IV de centre O_3 și O_4 și cadrul $O_3O_1O_2O_4$, articulat în O_3 și O_4 de axa AB. În punctele O_1 și O_2 sînt fixate două roți I și II $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4} = l$, tangente respectiv cu roțile III și IV (fig. 8.10). Cunoscînd viteza unghiulară Ω a cadrului, să se determine vitezele unghiulare ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 ale roților în următoarele ipoteze:

a) roțile III și IV sînt fixe, iar roțile I și II sînt legate rigid între ele;

b) roțile I și II sînt legate rigid între ele; de asemenea și roțile III și IV.

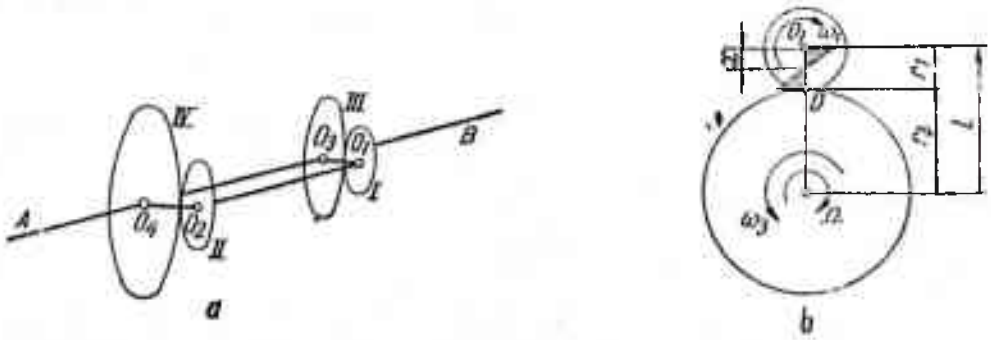


Fig. 8.10

Rezolvare. a) Roțile *III* și *IV* fiind fixe $\omega_3 = \omega_4 = 0$, iar roțile *I* și *II* legate rigid între ele; $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Vitezele punctelor O_1 și O_2 sînt

$$l\Omega = v_{O_1} = v_{O_2}$$

sau

$$l\Omega = r_1\omega = r_2\omega.$$

Rezultă o condiție de compatibilitate

$$r_1 = r_2,$$

iar

$$\omega = \frac{l}{r_1}\Omega = \frac{l}{r_2}\Omega.$$

b) Roțile *I* și *II* sînt legate rigid între ele ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$); la fel roțile *III*, *IV* ($\omega_3 = \omega_4$).

Fie $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, vitezele centrelor O_1 și O_2 sînt

$$v_{O_1} = v_{O_2} = l\Omega,$$

respectiv vitezele punctelor de contact ale roților

$$v_D = \pm r_3\omega_3, \; v_C = \pm r_4\omega_4.$$

Distribuția de viteze pe roata *I* respectiv *II* se poate urmări în fig. 8.10, *a*. Există relația

$$\frac{x}{r_1 - x} = \frac{v_{O_1}}{v_D}$$

sau

$$x = \frac{v_{O_1} \cdot r_1}{\pm v_D + v_{O_1}} = \frac{r_1 l\Omega}{l\Omega \pm r_3\omega_3}.$$

Cu ajutorul acestei ecuații se determină viteza unghiulară ω_1 a roții *I*

$$\omega_1 = \frac{v_{O_1}}{x} = \frac{v_{O_1} \pm v_D}{r_1} = \frac{l\Omega \pm r_3\omega_3}{r_1}.$$

Pentru $x = l$, rezultă $\omega_1 = \omega_3 = \Omega$, adică cele două roți se deplasează ca și cînd ar fi rigid legate cu cadrul.

Dacă $v_{O_1} - v_D = 0$, $\omega_1 = 0$ sau $x \to \infty$, adică roata *I* are față de roata *III* o mișcare de translație curbilinie.

Analog pentru roțile *II* și *IV* se obține

$$\omega_2 = \frac{l\Omega \pm r_4\omega_4}{r_2},$$

formulă care comportă aceeași discuție. În plus, avem condiția $\omega_1 = \omega_2$, de unde rezultă

$$\frac{l\Omega \pm r_3\omega_3}{r_1} = \frac{l\Omega \pm r_4\omega_4}{r_2},$$

respectiv

$$\Omega = \frac{\pm r_1 r_4 \omega_4 \pm r_2 r_3 \omega_3}{(r_2 - r_1)l}.$$

8.11. Corpul A se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_1 în jurul axei Oz, care coincide cu o latură a cubului, de lungimea a. Corpul B are o mișcare de șurub ($\bar{\omega}, \| \bar{v}$) a cărei axă coincide cu altă latură a cubului (fig. 8.11). Să se determine mișcarea corpului B față de corpul A.

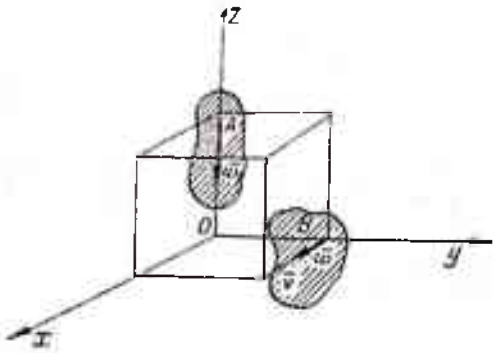


Fig. 8.11

Rezolvare. Se dă întregului sistem o rotație $-\bar{\omega}_1$, astfel încît corpul A să rămînă în repaus. Mișcarea rezultantă va fi mișcarea relativă a corpului B, față de corpul A.

Viteza unghiulară a mișcării de rotație efectuată de corpul B este ω_2, dată de expresiile

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega} - \bar{\omega}_1 = \omega\bar{i} + \omega_1\bar{k}, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2}.$$

Viteza unui punct de pe axa corpului B va fi

$$\bar{v} = v_0\bar{i} + a\bar{j} \times \bar{\omega}_2 = v_0\bar{i} + a\bar{j} \times (\omega\bar{i} + \omega_1\bar{k}) = (v_0 + a\omega_1)\,\bar{i} - a\omega\bar{k}.$$

Axa mișcării de rototranslație, definită în cazul general de ecuațiile

$$\frac{v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z},$$

are în acest caz forma

$$\frac{(v_0 + a\omega_1) - y\omega_1}{\omega} = \frac{0 - z\omega + x\omega_1}{0} = \frac{-a\omega + y\omega}{\omega_1}$$

sau

$$-x\omega_1 + z\omega = 0$$

$$\omega_1(v_0 + a\omega_1 - y\omega_1) = \omega(-a\omega + y\omega).$$

Rezultă că axa mișcării de rototranslație se găsește într-un plan paralel cu planul xOz și are ecuațiile

$$y = \frac{a(\omega^2 + \omega_1^2) + v_0\omega_1}{\omega_1^2 + \omega^2}$$

$$-x\omega_1 + z\omega = 0.$$

Observație. Pentru $\omega = \omega_1$ și $v_0 = a\omega$, rezultă

$$x - z = 0, \quad y = \frac{3}{2}a.$$

8.12. Să se determine mişcarea rezultată din trei mişcări de rotaţii simultane, două dintre ele avînd viteze unghiulare egale paralele şi de sensuri opuse $\bar{\omega}_1$, suporţii lor fiind depărtaţi cu distanţa a între ei, iar cea de a treia mişcare avînd viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$, dirijată pe un suport ce taie celelalte două suporturi sub un unghi φ arbitrar (fig. 8.12).

Rezolvare. Mişcarea cea mai generală a unui solid provine dintr-o rotaţie şi o translaţie. În cazul de faţă, vectorul viteză unghiulară de rotaţie are expresia

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 = \omega_2 (\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}),$$

iar vectorul viteză de translaţie

$$\bar{v}_0 = a\omega_1 \bar{k}.$$

Deoarece $\bar{\omega} \cdot \bar{v}_0 = 0$, vectorii $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_0$ sînt perpendiculari deci mişcarea rezultantă este o rotaţie instantanee. Ecuaţiile axei de rotaţie instantanee sînt

$$\frac{0 - y0 + z\omega_2 \sin \varphi}{\omega_2 \cos \varphi} = \frac{0 - z\omega_2 \cos \varphi + x \cdot 0}{\omega_2 \sin \varphi} = \frac{a\omega_1 - x\omega_2 \sin \varphi + y\omega_2 \cos \varphi}{0},$$

respectiv

$$z\omega_2^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 0$$

$$a\omega_1 - x\omega_2 \sin \varphi + y\omega_2 \cos \varphi = 0.$$

Axa instantanee de rotaţie se găseşte în planul xOy, ($z = 0$) şi are ecuaţiile

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - a\frac{\omega_1}{\omega_2 \cos \varphi}$$

$$z = 0.$$

O b s e r v a ţ i e. Pentru $\varphi = 90°$ sau $\omega_2 = 0$, rezultă $y = \infty$, deci mişcarea rezultantă este o translaţie în planul xOz.

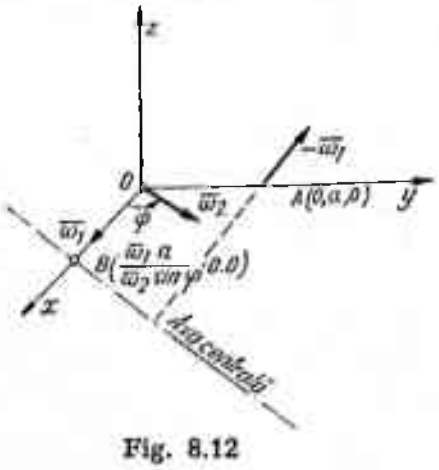


Fig. 8.12

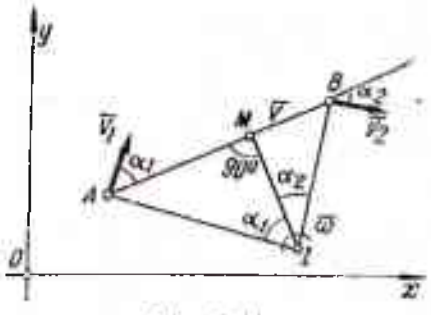


Fig. 8.13

8.13. Pe un segment de dreaptă AB, care se mişcă într-un plan fix xOy, se consideră un punct M, a cărui viteză $\bar{v}$ este orientată de-a lungul segmentului (fig. 8.13). Să se determine mărimea acestei viteze şi viteza

unghiulară instantanee ω a segmentului AB. Se cunosc mărimile $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ ale vitezelor extremităţilor segmentului, unghiurile α_1 şi α_2 dintre aceste viteze şi segmente, precum şi lungimea l a segmentului, $|AB| = l$.

Rezolvare. Centrul instantaneu I al mişcării barei AB se găseşte la intersecţia normalelor duse pe vitezele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ în punctele A şi B.

În triunghiul IAB există relaţiile geometrice

$$|\overline{IA}| \cos \alpha_1 = |\overline{IB}| \cos \alpha_2 = h$$

$$|\overline{IA}| \sin \alpha_1 + |\overline{IB}| \sin \alpha_2 = l.$$

Rezultă pentru distanţele $|\overline{IA}|$ şi $|\overline{IB}|$ mărimile

$$|\overline{IB}| = \frac{l}{\cos \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1 + \sin \alpha_2} = \frac{l \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$|\overline{IA}| = \frac{l \cos \alpha_2}{(\cos \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + \sin \alpha_2) \cos \alpha_1} = \frac{l \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Distanţa de la centrul instantaneu la bară este dată de

$$h = l \frac{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Viteza unghiulară instantanee a barei este

$$\omega = \frac{v_1}{|\overline{IA}|} = \frac{v_2}{|\overline{IB}|} = v_1 \frac{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}{l \cos \alpha_2} = v_2 \frac{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}{l \cos \alpha_1} = \frac{v}{l} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2).$$

Cunoscînd valoarea lui ω, se poate calcula mărimea vitezei v

$$v = h\omega = h \frac{v_1}{|\overline{IA}|} = v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2.$$

Rezultatul obţinut corespunde unei binecunoscute teoreme din mişcarea generală a solidului rigid care stabileşte că proiecţiile vitezelor a două puncte ale rigidului pe dreapta care uneşte aceste două puncte, sînt egale între ele şi egale cu viteza punctului de viteză minimă de pe dreapta respectivă.

8.14. Două glisiere paralele se deplasează cu viteze constante $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Între glisiere se găseşte un disc de rază R, care se rostogoleşte fără alunecare (fig. 8.15). Să se determine baza şi rostogolitoarea discului.

Rezolvare. Mişcarea plană a discului trebuie studiată în funcţie de vitezele glisierelor.

Presupunînd $\bar{v}_1 \bar{v}_2 < 0$ (fig. 8.14), centrul instantaneu de rotaţie se găseşte la intersecţia normalei comune pe cele două viteze (diametrul AB al discului) cu dreapta care uneşte vîrfurile lor. Din asemănarea triunghiurilor IAA' şi IBB' rezultă

$$\frac{v_1}{|\overline{IA}|} = \frac{v_2}{|\overline{IB}|} = \frac{v_2}{2R - |\overline{IA}|}, \quad |\overline{IA}| = \frac{2Rv_1}{v_1 + v_2}, \quad |\overline{IB}| = \frac{2Rv_2}{v_1 + v_2},$$

$$|\overline{IO}| = \frac{R(v_2 - v_1)}{v_1 + v_2}.$$

Distanțele $|\overline{IA}|$ și $|\overline{IB}|$ fiind constante, rezultă că locul geometric al centrului instantaneu I față de elementele fixe ale mișcării (glisierele) este o dreaptă paralelă cu acestea și trecînd prin I. Distanța IO fiind constantă — poziția centrului instantaneu față de centrul discului mobil — locul geometric al centrului instantaneu față de disc este un cerc de rază OI. Viteza unghiulară de rotație în jurul centrului instantaneu se calculează considerînd vitezele v_1 și v_2 provenite dintr-o rotație în jurul centrului instantaneu.

$$\omega \cdot |\overline{IB}| = v_2, \text{ respectiv } \omega = \frac{v_2}{|\overline{IB}|} = \frac{v_1 + v_2}{2R}.$$

Viteza centrului cercului:

$$v_0 = |\overline{IO}| \cdot \omega = \frac{v_2 - v_1}{2}.$$

O b s e r v a ț i i. a) Dacă $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ au același sens, în relațiile precedente se schimbă semnul lui v_2.

b) Dacă $v_1 = v_2$ discul are o mișcare de translație cu viteza $v_1 = v_2$. Centrul instantaneu se găsește la infinit.

c) Dacă $v_1 = -v_2$ discul se rotește în jurul centrului său O, cu viteza unghiulară ω

$$\omega = \frac{v_1}{R} = \frac{v_2}{R},$$

deci centrul instantaneu de rotație devine un centru de rotație fix.

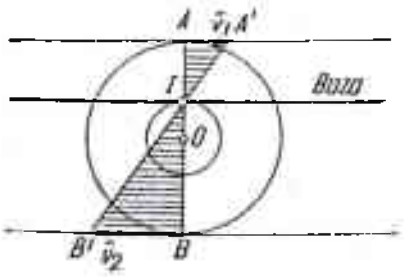


Fig. 8.14

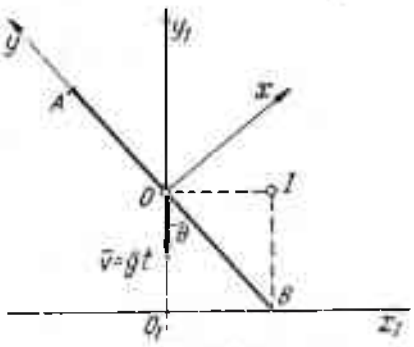


Fig. 8.15

8.15. O bară $|\overline{AB}| = 2l$ cade din poziția verticală, lunecînd fără frecare pe un planșeu orizontal, centrul său de greutate deplasîndu-se pe verticală cu viteza $v = gt$ (fig. 8.15).

Să se determine centrul instantaneu de rotație, baza și rostogolitoarea mișcării, precum și polul accelerațiilor și distribuția accelerațiilor pe bară.

R e z o l v a r e. Se alege ca sistem mobil, un sistem avînd originea în O, iar axa Oy în coincidență cu bara. Rezultă

$$v_{Ox} = -gt \sin\theta, \; v_{Oy} = -gt \cos\theta, \; \omega = \dot{\theta}.$$

Expresia vitezei unghiulare ω se deduce din observaţia că

$$\dot{\overline{O_1O}} = -v\vec{j}_1, \text{ sau } \frac{d}{dt}(l\cos\theta) = -gt, \; -l\sin\theta\cdot\dot{\theta} = -gt$$

de unde

$$\dot{\theta} = \frac{gt}{l\sin\theta}, \quad \ddot{\theta} = \frac{gl\sin\theta - gtl\cos\theta\cdot\dot{\theta}}{(l\sin\theta)^2} = g\frac{l\sin^2\theta - gt^2\cos\theta}{l^2\sin^3\theta}.$$

Coordonatele centrului instantaneu în raport cu sistemul mobil vor fi

$$\xi = -\frac{v_{oy}}{\omega} = \frac{gt\cos\theta}{\dfrac{gt}{l\sin\theta}} = l\sin\theta\cos\theta = \frac{l}{2}\sin 2\theta$$

$$\eta = \frac{v_{ox}}{\omega} = -\frac{gt\sin\theta}{\dfrac{gt}{l\sin\theta}} = -l\sin^2\theta = \frac{l}{2}(\cos 2\theta - 1).$$

Eliminînd parametrul θ se găseşte rostogolitoarea

$$\xi^2 + \left(\eta + \frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$\left(\text{un cerc cu centrul în mijlocul distanţei } OB \text{ şi raza } \frac{l}{2}\right)$.

Coordonatele centrului instantaneu I în raport cu sistemul fix vor fi

$$\xi_1 = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta = l\sin\theta$$

$$\eta_1 = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta = l\cos\theta.$$

Eliminînd parametrul θ între aceste două ecuaţii obţinem baza

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = l^2$$

(un cerc cu centrul în O_1 şi raza l).

Polul acceleraţiilor are coordonatele în sistemul mobil

$$\xi' = \frac{\omega^2 a_{ox} - \dot{\omega}a_{oy}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2} = \frac{-\dfrac{g^2t^2}{l^2\sin^2\theta}g\sin\theta + \dfrac{g}{l^2}\cdot\dfrac{l\sin^2\theta - gt^2\cos\theta}{\sin^3\theta}\cdot g\cos\theta}{\dfrac{g^4t^4}{l^4\sin^4\theta} + \dfrac{g^2}{l^4}\cdot\dfrac{l^2\sin^4\theta - 2glt^2\sin^2\theta\cos\theta + g^2t^4\cos^2\theta}{\sin^6\theta}} =$$

$$= \frac{(-gt^2 + l\sin^3\theta\cdot\cos\theta)\,l^2\sin^3\theta}{g^2t^4 - 2glt^2\sin^2\theta\cos\theta + l^2\sin^4\theta}$$

$$\eta' = \frac{\omega^2 a_{oy} + \dot{\omega}a_{ox}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2} = \frac{-\dfrac{g^2t^2}{l^2\sin^2\theta}g\cos\theta - \dfrac{g}{l^2}\cdot\dfrac{l\sin^2\theta - gt^2\cos\theta}{\sin^3\theta}\cdot g\sin\theta}{\dfrac{g^4t^4}{l^4\sin^4\theta} + \dfrac{g^2}{l^4}\,\dfrac{l^2\sin^4\theta - 2glt^2\sin^2\theta\cos\theta + g^2t^4\cos^2\theta}{\sin^6\theta}} =$$

$$= \frac{-l^3\sin^6\theta}{g^2t^4 + l^2\sin^4\theta - 2glt^2\cos\theta\sin^2\theta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că dacă viteza centrului barei ar fi constantă, polul accelerațiilor coincide cu centrul instantaneu de rotație

$$\xi' = l \sin \theta \cos \theta$$

$$\eta' = - l \sin^2 \theta.$$

Distribuția accelerațiilor pe bară se face ca și cînd am avea de-a face cu o rotație în jurul polului accelerațiilor.

8.16. Se dau manivelele $\overline{OA}$ și $\overline{O'A'}$ care se pot mișca în jurul axelor fixe O și O' legate fiind cu o bielă $\overline{AA'}$. Manivela OA are o mișcare de rotație în jurul capătului său O cu viteza unghiulară ω (fig. 8.16). Se cere: a) mișcarea manivelei $\overline{O'A'}$; b) viteza unui punct M de pe bielă; c) ce se întîmplă cînd $r = r'$ și care sînt în acest din urmă caz traiectoriile, vitezele și accelerațiile diferitelor puncte de pe biela $\overline{AA'}$?

Rezolvare. a) Manivela $\overline{O'A'}$ are o mișcare de rotație în jurul axului O' cu viteza unghiulară ω'. Bara AA' are o mișcare plană. Viteza punctului A, participînd atît la mișcarea de rotație a barei OA cît și la mișcarea plană a barei AA' este

$$v_A = \omega r = \omega_1 \cdot |\overline{IA}|.$$

Rezultă pentru viteza unghiulară de rotație în jurul lui I

$$\omega_1 = \frac{\omega r}{|\overline{IA}|}.$$

Viteza punctului A' este deci

$$v'_A = \omega_1 |\overline{IA'}| = r\omega \frac{|\overline{IA'}|}{|\overline{IA}|} = \omega' r',$$

de unde rezultă viteza unghiulară ω'

$$\omega' = \frac{r}{r'} \frac{|\overline{IA'}|}{|\overline{IA}|} \omega.$$

b) Viteza unui punct de pe bara AA' este

$$v_M = |\overline{IM}| \, \omega_1 = \frac{|\overline{IM}|}{|\overline{IA}|} r\omega.$$

c) În cazul barelor $|\overline{OA}| = |\overline{O'A'}|$ centrul instantaneu se găsește la infinit. Bara AA' are o mișcare de translație curbilinie, vitezele tuturor punctelor fiind egale cu ωr și accelerațiile cu $\omega^2 r$ (toate punctele barei AA' se mișcă la fel cu punctul A a cărui mișcare s-a studiat la punctul a).

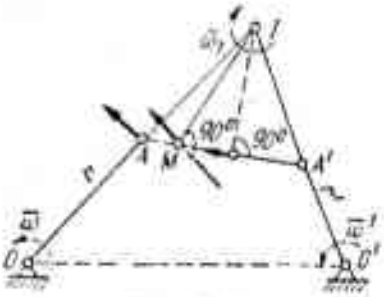


Fig. 8.16

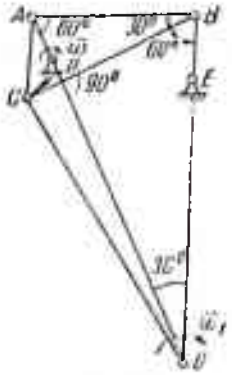


Fig. 8.17

8.17. Se dă sistemul de bare articulate (fig. 8.17), unde D și E sînt articulații fixe. Bara $\overline{AD}$ are o rotație uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul punctului D. Se cere direcția și valoarea vitezei punctului C pentru poziția din figură.

Rezolvare. $|\overline{AC}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}| = b$, $|\overline{AD}| = d$.

Centrul instantaneu pentru mișcarea plană a triunghiului ABC se găsește la intersecția barelor AD și BE dat fiind că vitezele în aceste puncte sînt perpendiculare pe bare. (Punctele A și B aparțin și barelor AD și BE care efectuează mișcări de rotație respectiv în jurul articulațiilor fixe D și E.) Pentru poziția din figură există următoarele relații geometrice

$$|\overline{OA}| = \frac{|\overline{AB}|}{\cos 60^\circ} = 2|\overline{AB}| = |\overline{BC}|\sqrt{3} = 2b\sqrt{3}$$

$$|\overline{OC}| = \sqrt{|\overline{OA}|^2 + |\overline{AC}|^2 + 2|\overline{OA}||\overline{AC}|\cos 30^\circ} =$$

$$= \sqrt{3|\overline{BC}|^2 + \frac{1}{4}|\overline{BC}|^2 + 3|\overline{BC}|^2\frac{3}{2}} = b\sqrt{19}.$$

Viteza punctului A este

$$v_A = |\overline{AD}|\,\omega = |\overline{OA}|\,\omega_1$$

de unde se deduce viteza unghiulară instantanee

$$\omega_1 = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{OA}|}\,\omega = \frac{d\omega}{2b\sqrt{3}}.$$

Viteza punctului C, perpendiculară pe dreapta OC, are valoarea

$$v_C = |\overline{OC}|\,\omega_1 = b\sqrt{19}\,\frac{d\omega}{2b\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{3}}\,d\omega.$$

8.18. Se dă mecanismul patrulater articulat (fig. 8.18) la care barele $O_1A = O_1O_2 = a$, $AB = O_2B = b$ şi se cere:

a) Să se studieze mişcarea.

b) Să se determine baza şi rostogolitoarea în mişcarea plană a bielei AB.

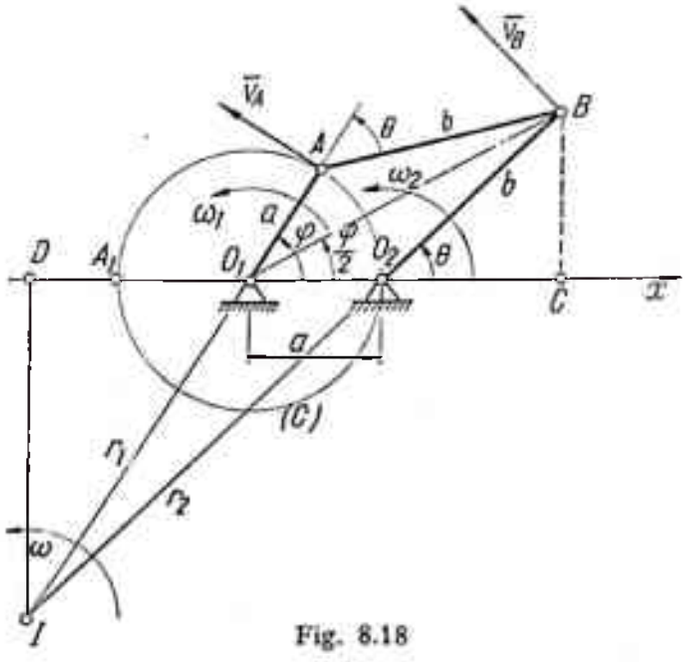


Fig. 8.18

Rezolvare. a) Butonul A al manivelei O_1A se mişcă pe cercul (C_A), iar piciorul B al bielei AB se mişcă pe cercul (C_B).

Se notează cu φ unghiul pe care-l face manivela O_1A cu linia centrelor şi cu θ unghiul format de manivela O_2B cu O_1O_2. Între aceste unghiuri există relaţia

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta},$$

din care rezultă:

— pentru $\varphi = 0$, $\theta = 0$; toate elementele mobile se suprapun peste axa O_1x;

— pentru $\varphi = 180°$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \infty$ şi deci $\cos\theta = -\frac{a}{b}$; pentru ca butonul de manivelă A să treacă prin punctul A_1 trebuie ca $a < b$ şi $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$;

— pentru $\varphi = 360°$, rezultă $\sin\theta = 0$; deci $\theta = 180°$.

În consecinţă, în timp ce manivela O_1A face o rotaţie completă, manivela O_2B se roteşte cu 180°; rezultă că manivela O_1A va trebui să facă două rotaţii complete pentru ca manivela O_2B să facă o singură rotaţie completă.

În mişcarea plană a bielei AB centrul instantaneu de rotaţie I se găseşte la intersecţia direcţiilor manivelelor O_1A şi O_2B. Considerînd una dintre aceste

manivele ca element conducător al mecanismului, spre exemplu manivela O_1A avînd viteza unghiulară $\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}$ cunoscută, viteza punctului A este

$$v_A = \omega_1 \cdot a.$$

Scriind $v_A = \omega_I \cdot IA$, rezultă $\omega_1 = \frac{a}{IA} \cdot \omega_1$.

Viteza punctului B va fi

$$v_B = \omega_I IB = \frac{IB}{IA} a\omega_1 = \frac{IB}{IA} v_A.$$

Scriind acum $v_B = \omega_2 \cdot b$, rezultă:

$$\omega_2 = \frac{v_B}{b} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{a}{b} \cdot \omega_1,$$

care este viteza unghiulară $\omega_2 = \dot{\theta}$ cu care manivela O_2B se rotește la momentul considerat.

b) Din figură se vede că

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ID}{DO_1} = \frac{r_2 \sin \theta}{r_2 \cos \theta - a}.$$

Deoarece

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

și folosind expresiile precedente, rezultă:

$$r_2 = \frac{2ab}{b^2 - a^2} (a + b \cos \theta) \text{ (baza)}.$$

Notînd:

$$\frac{2ab}{b^2 - a^2} = k = \text{const.}$$

ecuația bazei capătă forma

$$r_2 = k(a + b \cos \theta) \text{ sau } r_2 = a_1 + b_1 \cos \theta$$

care este ecuația *conhoidei unui cerc.*

Pentru determinarea ecuației rostogolitoarei, din triunghiul IAB rezultă

$$(r_2 + b)^2 = r_1^2 + b^2 - 2br_1 \cos \theta,$$

de unde

$$r_2^2 + 2br_2 = r_1^2 - 2br_1 \cos \theta$$

sau

$$r_1^2 - 2\, b\, r_1 \cos \theta - (r_2^2 + 2br_2) = 0$$

care dă

$$r_1 = b\cos\theta + \sqrt{b^2\cos^2\theta + r_2(r_2 + 2b)}.$$

În această expresie, înaintea radicalului s-a luat semnul + deoarece $r_1 > b\cos\theta$.

Dacă se introduce valoarea lui r_2 în r_1, rezultă

$$r_1 = \frac{2ab}{b^2 - a^2}(b + a\cos\theta),$$

care este *ecuația rostogolitoarei.*

Folosind notația anterioară $\frac{2ab}{b^2 - a^2} = k$,

expresia devine:

$$r_1 = k(b + a\cos\theta) = b_1 + a_1\cos\theta,$$

adică rostogolitoarea este *conhoida unui cerc.*

8.19. Un vinclu rectangular ABC (fig. 8.19) avînd latura BC de lungime $2a$ și latura AB suficient de lungă, se mișcă astfel încît capătul C alunecă pe dreapta $O'C$, iar latura AB trece în permanență prin punctul fix D situat pe perpendiculara DO la CO', astfel ca $DO' = 2a$. Se cere: a) locul geometric al punctului M, mijlocul lui BC; b) să se studieze mișcarea plană a vinclului ABC.

Rezolvare. a) se notează cu l lungimea variabilă DB. Coordonatele punctului M sînt:

$$x = a(1 - \sin\varphi)$$

$$y = a\cos\varphi - l\sin\varphi$$

care sînt ecuațiile parametrice ale curbei (CO) pe care o trasează punctul M cînd variază φ. Din figură se observă că $|\overline{DC}|^2 = |\overline{DB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{CO'}|^2 + |\overline{DO'}|^2$,

$$l^2 + 4a^2 = (y + a\cos\varphi)^2 + 4a^2, \text{ de unde } l = y + a\cos\varphi = |\overline{CO'}|.$$

Din prima ecuație se obține

$$\sin\varphi = \frac{a - x}{a} \text{ și } \cos\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{x(2a - x)}.$$

Rezultă $y^2(2a - x) = x^3$, locul geometric al punctului M fiind *cisoida lui Diocles.* Există și un aparat pentru trasarea mecanică a curbei.

b) Vinclul ABC are o mișcare plană, astfel încît capătul lui C alunecă pe dreapta (Δ) fără a o putea părăsi, iar latura lui AB trece prin punctul fix D.

Scanned with OKEN Scanner

Centrul instantaneu de rotație I se găsește la intersecția perpendicularei în C la dreapta (Δ), cu perpendiculara în D la dreapta AB. Se observă că $ID = IC = CE = DE$.

În planul fix xOy, punctul I, aflîndu-se la aceeași distanță de dreapta fixă (Δ) și de punctul fix D, face ca locul său geometric să fie parabola (C_f) avînd axa Ox, focarul în D și directoarea (Δ), care este baza mișcării.

În planul mobil solidar cu vinclul ABC, punctul I se află la aceeași distanță de dreapta AB și de punctul C al vinclului; deci rostogolirea este tot o parabolă (C_m), identică cu (C_f), avînd axa după direcția BC, focarul în C și directoarea AB.

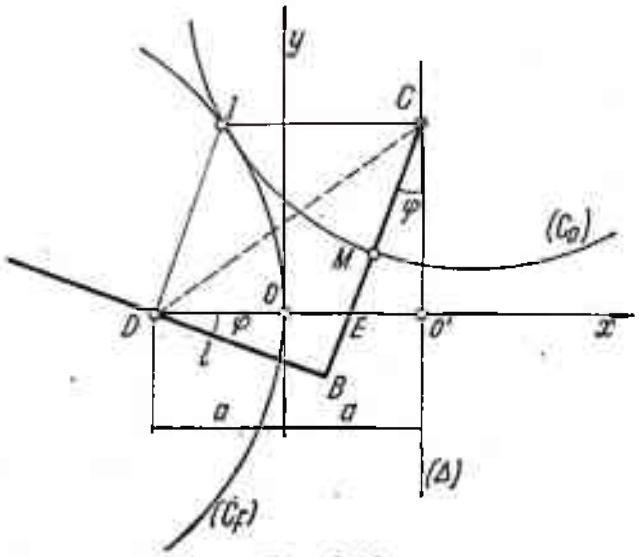


Fig. 8.19

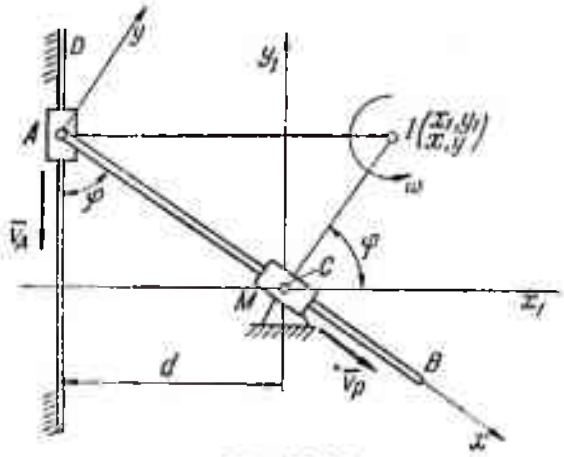


Fig. 8.20

8.20. Se consideră mecanismul din figura 8.20, constituit din bara AB, avînd unul din capete articulat la culisorul A, care alunecă cu viteza constantă $v_A = c$ în lungul barei fixe DD, iar bara AB se poate deplasa prin manșonul M al cărui centru este articulat în punctul fix C, situat la distanța d de bara DD în jurul căruia se poate roti.

Să se determine centrul instantaneu, baza și rostogolitoarea mișcării.

Rezolvare: Se consideră ca parametru unghiul φ. Deoarece viteza unui punct oarecare P al barei AB, în momentul în care P se confundă cu C, este după direcția barei AB, centrul instantaneu de rotație I în mișcarea plană a bielei AB se găsește la intersecția perpendicularelor ridicate în A la DD și în C la AB. Scriind $v_A = c = IA\,\omega$, se obține viteza unghiulară instantanee

$$\omega = \frac{c}{IA}.$$

Viteza punctului P al barei AB, în momentul cînd aceasta se confundă cu C este

$$v_P = IC \cdot \omega = c\frac{IC}{IA}.$$

Deoarece $IC = IA \cos \varphi$, rezultă

$$v_P = c \cdot \cos \varphi$$

Ecuația bazei. Se alege ca sistem de referință, în planul fix, axa Cx_1 perpendiculară la bara DD, și Cy_1 paralelă la DD.

Coordonatele centrului instantaneu I sînt:

$$x_1 = CI \cos \varphi$$

$$y_1 = CI \sin \varphi.$$

Dar $CI = AC \operatorname{cotg} \varphi$, iar $AC = \dfrac{d}{\sin \varphi}$.

Rezultă $x_1 = d \operatorname{cotg}^2 \varphi$; $y_1 = d \operatorname{cotg} \varphi$, care sînt ecuațiile parametrice ale bazei. Eliminînd parametrul φ, se obține ecuația bazei $y_1^2 = dx_1$ care este o parabolă cu vîrful în C (parametrul $p = d/2$ și axa Cx_1).

Ecuația rostogolitoarei. Se alege ca sistem de referință mobil axa Ax după direcția barei AB și Ay perpendiculară în A la aceasta. Coordonatele lui I în planul mobil sînt:

$$x = AC = \frac{d}{\sin \varphi},$$

$$y = IC = \frac{d \cos \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

care sînt ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei.

Prin eliminarea parametrului φ se obține ecuația rostogolitoarei $x^4 - d^2(x^2 + y^2) = 0$.

8.21. O bară dreaptă $ABC = l$, aflată într-un plan vertical, reazemă fără frecare în punctele A și B (fig. 8.21). Capătul A alunecă pe planul orizontal AO cu viteza constantă $\bar{v}_0$. Să se determine:

a) viteza unghiulară instantanee ω a barei, în funcție de unghiul α, baza și rostogolitoarea mișcării;

b) ecuațiile de mișcare ale capătului C al barei.

Rezolvare. a) Centrul instantaneu de rotație I al barei se găsește la intersecția normalelor ridicate în punctele A și B respectiv pe planul orizontal și pe bară.

Distanța de la punctul A la centrul instantaneu I este

$$|\overline{IA}| = \frac{|\overline{AB}|}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin^2 \alpha}.$$

Viteza punctului A se exprimă sub forma

$$\frac{\omega h}{\sin^2 \alpha} = v_0$$

respectiv

$$\omega = \frac{v_0 \sin^2 \alpha}{h}.$$

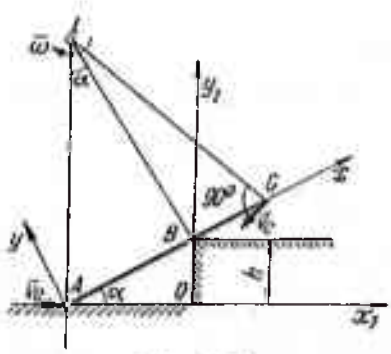


Fig. 8.21

Viteza punctului A mai poate fi scrisă şi sub forma

$$-\dot{x}_{1A} = h\frac{-\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha} = -v_0,$$

deoarece

$$-x_{1A} = h\operatorname{cotg}\alpha.$$

Între $\dot{\alpha}$ şi ω există relaţia

$$\dot{\alpha} = \omega = \frac{v_0\sin^2\alpha}{h}.$$

Pentru determinarea bazei şi rostogolitoarei se determină coordonatele centrului instantaneu atît în sistemul de referinţă fix $x_1O_1y_1$ cît şi în sistemul mobil xAy.

Ecuaţiile parametrice ale bazei sînt:

$$\xi_1 = -h\operatorname{cotg}\alpha, \quad \eta_1 = \frac{h}{\sin^2\alpha}.$$

Eliminînd parametrul α obţinem pentru bază ecuaţia

$$h\eta_1^2 - \xi_1^2\eta_1 - h^3 = 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale rostogolitoarei sînt:

$$\xi = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad \eta = \frac{h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

După eliminarea parametrului α se obţine pentru rostogolitoare ecuaţia

$$\eta^2 = \frac{\xi^2(\xi^2 - h^2)}{h^2}.$$

b) Ecuaţiile parametrice ale mişcării capătului C al barei sînt:

$$x = -v_0t + \left(l - \frac{h}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha$$

$$y = l\sin\alpha.$$

iar componentele vitezei acestui punct

$$\dot{x} = -v_0 + \omega\left(\frac{h}{\sin^2\alpha} - l\sin\alpha\right)$$

$$\dot{y} = l\,\omega\cos\alpha.$$

8.22. Pe un cerc tangent în originea axei O_1x_1 sprijină continuu o tangentă MA, a cărei extremitate A se mişcă pe O_1x_1 (fig. 8.22). Să se determine baza şi rostogolitoarea mişcării acestei tangente.

Rezolvare. Coordonatele centrului instantaneu de rotație exprimate față de sistemul mobil de referință xAy sînt

$$\xi = -\frac{v_{Ay}}{\omega} = +\frac{|\overline{IA}|\cdot\omega}{\omega}\cdot\sin\theta = \frac{R\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\eta = \frac{v_{Ax}}{\omega} = \frac{|\overline{IA}|\cdot\omega}{\omega}\cos\theta = \frac{R\cos\theta}{1-\sin\theta}.$$

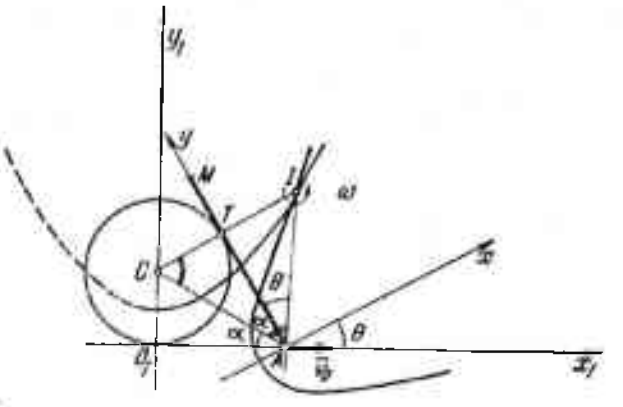


Fig. 8.22

Eliminarea parametrului θ între cele două ecuații permite determinarea ecuației rostogolitoarei.

$$\eta^2 = R^2 + 2R\xi$$

$\left(\text{parabolă avînd focarul în punctul } A \text{ și ca directoare dreapta } x = -\frac{R}{2}\right)$.

Față de sistemul fix de referință, coordonatele centrului instantaneu de rotație sînt

$$\xi_1 = R\operatorname{cotg}\alpha,\ \eta_1 = R + R\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}2\alpha.$$

Eliminînd parametrul α între cele două ecuații, obținem pentru bază ecuația

$$\eta_1 - \frac{R}{2} = \frac{\xi_1^2}{2R}$$

(parabolă avînd ca focar centrul C al cercului, și ca directoare axa O_1x_1).

Problema poate fi rezolvată și geometric observînd că CA este bisectoarea unghiului O_1CT.

Triunghiul ICA este isoscel, deci I este egal depărtat de punctele C și A.

Baza este parabola de focar C și directoare axa Ox, iar rostogolitoarea este o parabolă egală, cu focarul în A și directoare o paralelă dusă la MA, prin jumătatea segmentului CT.

8.23. Problema lui Cardan. Se dă un sistem de două drepte concurente în punctul fix O_1, formînd în permanență între ele un unghi γ. Pe acest sistem se mișcă o dreaptă AB de lungime constantă l (fig. 8.23). Se cere baza și rostogolitoarea mișcării dreptei AB.

Rezolvare. Vitezele punctelor A și B sînt îndreptate după direcțiile barelor O_1A și O_1B, deci centrul instantaneu se găsește la intersecția perpendicularelor pe bare în punctele A și B.

Locul geometric al centrului instantaneu I față de un sistem mobil legat de bară (rostogolitoarea) este cercul circumscris patrulaterului AO_1BI

(deoarece unghiul AIB este egal $180 - \gamma = \text{const.}$) avînd raza egală cu

$$R = \frac{l}{4 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Baza este cercul cu centrul în O_1 și rază $O_1I = 2R$.

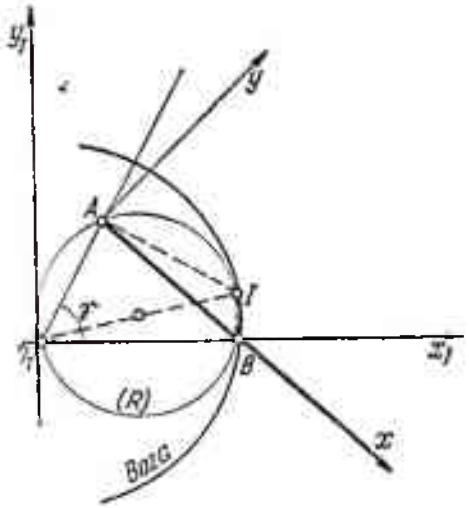


Fig. 8.23

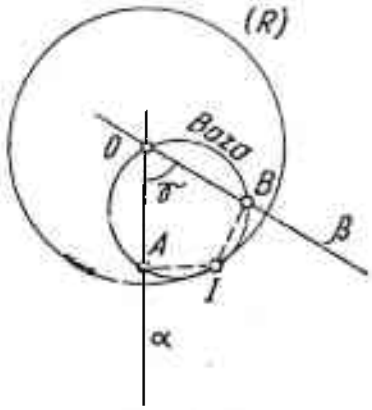


Fig. 8.24

8.24. Un unghi fix format din direcțiile α și β se mișcă astfel încît aceste direcții trec necontenit prin punctele A și B (fig. 8.24). Să se determine baza și rostogolitoarea mișcării.

Rezolvare. Problema 8.24 este inversa problemei lui Cardan și se tratează în mod analog. Baza este cercul circumscris patrulaterului $OABI$, iar rostogolitoarea este cercul de rază constantă OI.

8.25. Să se determine baza și rostogolitoarea mișcării barei BC pentru patrulaterul articulat $ABCDA$, numit și antiparalelogram articulat, știind că latura AD este menținută fixă, iar AB se rotește în jurul lui A (fig.8.25).

Se dau $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 2a$, $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 2c$, $|\overline{BC}| > |\overline{AB}|$.

Rezolvare. Baza și rostogolitoarea se determină pe următoarele considerente.

În triunghiul isoscel AIC există relația

$$|\overline{AI}| - |\overline{ID}| = |\overline{AI}| - |\overline{IB}| = 2a$$

deci baza va fi hiperbola

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{c^2 - a^2} = 1$$

avînd focarele în punctele A și D. Față de sistemul mobil xOy se observă că

$$|\overline{IC}| - |\overline{IB}| = |\overline{IC}| - |\overline{ID}| = 2c.$$

Rostogolitoarea este tot o hiperbolă, avînd focarele în punctele B și C și ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Pentru $|\theta| < |\alpha|$ centrul instantaneu se găsește pe ramura dreaptă a hiperbolei din planul fix, iar pentru $|\theta| > |\alpha|$, I se găsește pe ramura stîngă a aceleiași hiperbole. α este unghiul format de asimptote cu axa O_1x_1:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}.$$

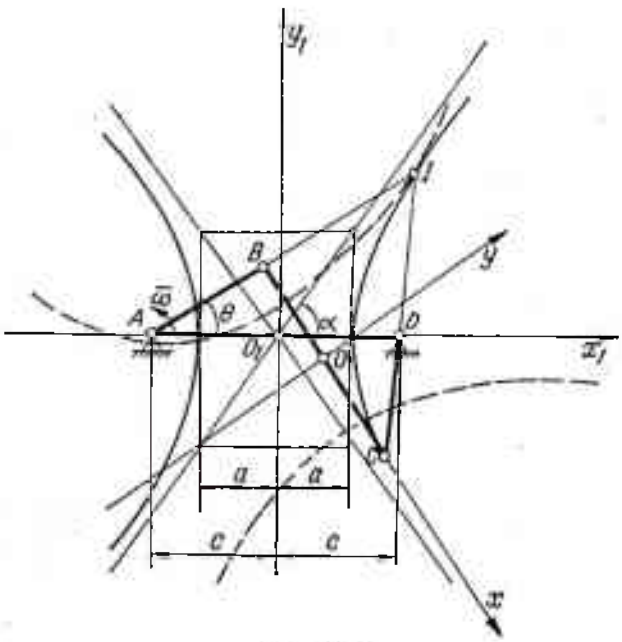


Fig. 8.25

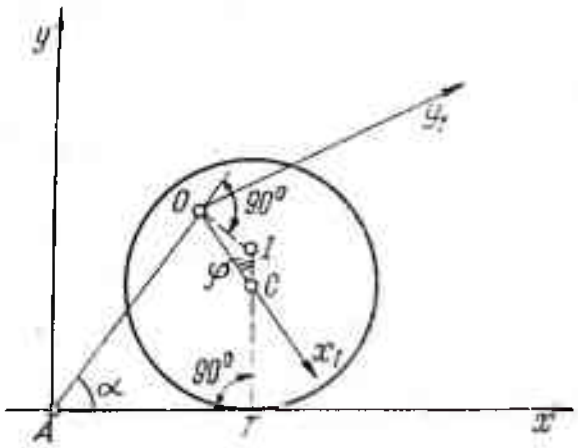


Fig. 8.26

8.26. Se dau două drepte $\overline{OA}$ și $\overline{AT}$ făcînd între ele unghiul constant α. Știind că $\overline{OA}$ trece necontenit prin O, iar $\overline{AT}$ este mereu tangentă la cercul cu centrul în C, să se determine baza și rostogolitoarea mișcării (fig. 8.26).

Rezolvare. Notăm cu φ unghiul format de axa Ox_1 cu perpendiculara pe dreapta AT. În triunghiul OIC există relațiile

$$\frac{|\overline{IC}|}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{c}{\sin(180 - \alpha)},$$

unde $c = OC$,

$$|\overline{IC}| \cos \varphi + |\overline{OI}| \cos(\alpha - \varphi) = c$$

din care rezultă

$$|\overline{IC}| = \frac{c \sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$$

$$|\overline{OI}| = \frac{c}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^2(\alpha - \varphi) + 2 \sin(\alpha - \varphi) \cos \varphi + \sin^2 \alpha}.$$

Coordonatele centrului instantaneu exprimate în sistemul fix de referință, ce are drept axă O_1x_1 dreapta OC și axa O_1y_1 perpendiculară pe aceasta, sînt

$$\xi_1 = c - IC \cos \varphi, \ \eta_1 = IC \sin \varphi,$$

respectiv

$$\begin{cases} \xi_1 - \frac{c}{2} = -\frac{c}{2}(\cos 2\varphi - \operatorname{cotg} \alpha \sin 2\varphi) \\ \eta_1 + \frac{c \operatorname{cotg} \alpha}{2} = \frac{c}{2}(\sin 2\varphi + \operatorname{cotg} \alpha \cos 2\varphi). \end{cases}$$

Prin eliminarea parametrului φ rezultă ecuația bazei

$$\left(\xi_1 - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\eta_1 + \frac{c \operatorname{cotg} \alpha}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4 \sin^2 \alpha}$$

un cerc de centru

$$\left(\frac{c}{2}, -\frac{c \operatorname{cotg} \alpha}{2}\right)$$

și rază

$$R = \frac{c}{2 \sin \alpha}.$$

Drept sistem mobil de referință alegem axa AT ca axă Ox și o perpendiculară pe aceasta drept axă Oy. Coordonatele centrului instantaneu sînt în acest caz

$$\eta = R + IC = R + \frac{c \sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$$

$$\xi = c \sin \varphi + \eta \operatorname{cotg} \alpha = c \sin \varphi + R \operatorname{cotg} \alpha + \frac{c \sin(\alpha - \varphi) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Pentru eliminarea parametrului φ se multiplică prima ecuație cu $\operatorname{cotg} \varphi$ și rezultatul se scade din cea de a doua. Obținem

$$\xi - \eta \operatorname{cotg} \alpha = c \sin \varphi$$

de unde

$$\sin \varphi = \frac{\xi - \eta \operatorname{cotg} \alpha}{c}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - (\xi - \eta \operatorname{cotg} \alpha)^2}.$$

Introducînd aceste valori în expresia lui η obţinem ecuaţia rostogolitoarei

$$\xi^2 + \eta^2 (\sin^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \alpha \cos 2\alpha) - 2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \xi\eta - R\xi \sin 2\alpha + 2 R\eta \cos^2 \alpha +$$

$$+ (R^2 - c^2) \sin^2 \alpha = 0.$$

8.27. Capătul A al unei bare AB se mişcă pe o curbă plană (C_1) cu viteza $\bar{v}_1$, iar capătul B se mişcă pe o altă curbă plană (C_2) (fig. 8.27). Să se determine viteza unui punct M de pe bară, ca mărime şi direcţie.

Rezolvare. Fie ecuaţiile celor două curbe faţă de un sistem de coordonate arbitrar xOy

$$f_1(x, y) = 0, \; f_2(x, y) = 0$$

şi ecuaţiile normalelor la cele două curbe, în A respectiv în B,

$$y - y_A = m_1(x - x_A)$$

$$y - y_B = m_2(x - x_B), \qquad \text{(a)}$$

unde

$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}}.$$

$$m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}}$$

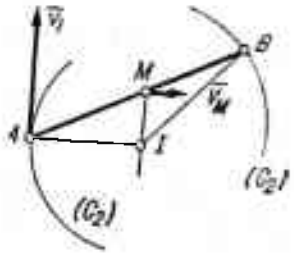


Fig. 8.27

Coordonatele centrului instantaneu de rotaţie rezultă din rezolvarea sistemului (a) şi sînt

$$x_1 = \frac{y_A - y_B - x_A m_1 + x_B m_2}{m_2 - m_1}$$

$$y_1 = \frac{m_2 y_A - m_1 y_B + m_1 m_2 (x_B - x_A)}{m_2 - m_1}.$$

Coordonatele x_A, x_B, y_A, y_B îndeplinesc condiţia ca distanţa $|\overline{AB}| = l$,

$$|\overline{IA}| = \sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2}.$$

Viteza unghiulară de rotaţie ω în jurul centrului instantaneu se obţine din relaţia

$$\omega \cdot |\overline{IA}| = v_1$$

şi este

$$\omega = \frac{v_1}{|\overline{IA}|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza punctului M se calculează cu formula

$$v_M = |\overline{IM}| \cdot \omega = \frac{|\overline{IM}|}{|\overline{IA}|} v_1 = v_1 \sqrt{\frac{(x_1 - x_M)^2 + (y_1 - y_M)^2}{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2}} .$$

Această viteză este perpendiculară pe raza vectoare $\overline{IM}$.

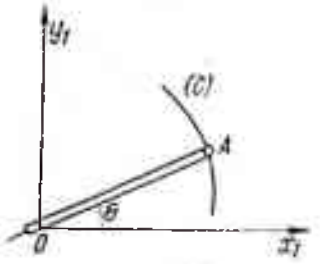


Fig. 8.28

8.28. O bară rectilinie OA (fig. 8.28) trece printr-un punct fix O, iar extremitatea A descrie curba $(C): r = f(\theta)$. Să se determine baza şi rostogolitoarea mişcării barei.

Cazuri particulare:

a) (C) este dreapta $r = \dfrac{a}{\cos\theta}$

b) (C) este spirala lui Arhimede $r = a\theta$.

Rezolvare. Distanţa OA fiind egală cu r, avem următoarele coordonate ale unui punct pe curba C

$$x_1 = r\cos\theta, \quad y_1 = r\sin\theta.$$

Coeficientul unghiular al normalei într-un punct pe curba (C) este

$$-\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{-dr\cos\theta + r\sin\theta\, d\theta}{dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta} = \frac{-f'\cos\theta + f\sin\theta}{f'\sin\theta + f\cos\theta} .$$

Centrul instantaneu I se găseşte la intersecţia normalei din A cu perpendiculara pe bară în punctul O

$$y_1 - f\sin\theta = \frac{-f'\cos\theta + f\sin\theta}{f'\sin\theta + f\cos\theta}(x_1 - f\cos\theta)$$

$$y_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} x_1 .$$

Coordonatele centrului instantaneu faţă de sistemul fix sînt

$$\xi_1 = -f'\sin\theta, \quad \eta_1 = f'\cos\theta.$$

Baza este deci cercul

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = f'^2.$$

Coordonatele centrului instantaneu faţă de sistemul mobil xAy sînt

$$\xi = -f, \quad \eta = OI = f'.$$

a) În cazul dreptei $r = \dfrac{a}{\cos\theta} = f, \quad f' = \dfrac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}$.

Ecuaţiile parametrice ale bazei sînt

$$\xi_1 = -a\operatorname{tg}^2\theta, \quad \eta_1 = a\operatorname{tg}\theta,$$

respectiv baza este parabola

$$\xi_1 = -\frac{1}{a}\eta_1^2.$$

Rostogolitoarea are ecuațiile parametrice

$$\xi = -\frac{a}{\cos\theta}, \quad \eta = \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

Prin eliminarea parametrului θ, rezultă ecuația rostogolitoarei

$$\eta = \frac{\xi}{a}\sqrt{\xi^2 - a^2}.$$

b) În cazul spiralei lui Arhimede $f = a\theta$; $f' = a$, baza este cercul de centru O și rază a, iar rostogolitoarea este dreapta $\eta = a$.

8.29. Fie semicercul de rază R. O manivelă OB de lungime l se învîrtește în jurul lui O cu viteză unghiulară ω, iar un cerc al cărui centru este în B rămîne necontenit tangent la cercul de rază R (fig. 8.29). Fie M punctul de pe cercul cel mic a cărui viteză trece prin A. Se cere poziția punctului M și mărimea vitezei.

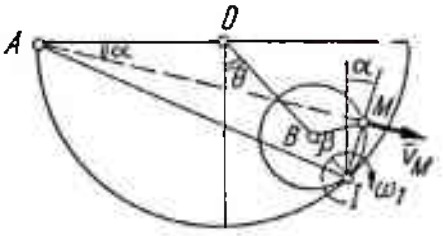


Fig. 8.29

Rezolvare. Există relația

$$l\omega = \omega_1 r$$

unde $r = R - l$.

Se pot determina relațiile geometrice

$$\sphericalangle OIM = \alpha + \theta = 90° - \frac{\beta}{2}$$

$$R\theta = (R - l)\beta.$$

Dar

$$IM = 2r\cos(\alpha + \theta) = 2r\sin\frac{\beta}{2}.$$

Poziția punctului M pe cercul de rază r va fi definită de unghiul β

$$IM = 2r\sin\frac{\beta}{2}.$$

Viteza punctului M va fi

$$v_M = \omega_1 |\overline{IM}| = \frac{l}{r}\omega \cdot 2r\sin\frac{\beta}{2}$$

$$v_M = l\omega 2\sin\frac{\beta}{2} = 2l\omega\sin\frac{\theta}{2\left(1 - \frac{l}{R}\right)}.$$

8.30. Dreapta $\overline{OD}$ se rotește în jurul lui O cu viteza unghiulară $\omega_0 =$ $=$ const.; pe $\overline{OD}$ se rostogolește cercul C cu viteza constantă a centrului v_0 (fig. 8.30). Se cer baza și rostogolitoarea mișcării cercului.

Rezolvare. Cercul are o mișcare plană, cu viteza unghiulară $\overline{\omega} =$ $= \overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_1$, în jurul unui centru instantaneu a cărui poziție rezultă din compunerea lui $\overline{\omega}_0$ cu $\overline{\omega}_1$

$$-r\omega + r_1\omega_1 = 0$$

$$\omega = -\omega_0 + \omega_1.$$

Poziția axei de rotație instantanee este definită de

$$r = +r_1 \frac{\omega_1}{-\omega_0 + \omega_1} = \frac{+v_0 t \dfrac{v_0}{R}}{-\omega_0 + \dfrac{v_0}{R}}.$$

Poziția barei este definită de unghiul

$$\theta = \omega_0 t.$$

Rezultă că baza este spirala lui Arhimede

$$r = k\theta$$

unde am notat

$$k = \frac{+v_0^2}{\omega_0(-R\omega_0 + v_0)}$$

deci

$$r = +\frac{v_0^2\theta}{\omega_0(R\omega_0 + v_0)}.$$

Considerînd un sistem mobil de referință legat de disc, coordonatele centrului instantaneu de rotație sînt

$$(r - r_1)\cos\alpha + R\sin\alpha = \xi$$

$$(r - r_1)\sin\alpha - R\cos\alpha = \eta$$

$$(r - r_1)^2 + R^2 = \xi^2 + \eta^2$$

$$(r - r_1)^2 = r_1^2\left[1 + \frac{\omega_1}{\omega_0 + \omega_1}\right]^2 = r_1^2\left[\frac{\omega_0 + 2\omega_1}{\omega_0 + \omega_1}\right]^2 = v_0^2 t^2 \left[\frac{\omega_0 + 2\dfrac{v_0}{R}}{\omega_0 + \dfrac{v_0}{R}}\right]^2 =$$

$$= \frac{v_0^2\theta^2}{\omega_0^2}\left[\frac{R\omega_0 + 2v_0}{R\omega_0 + v_0}\right]^2.$$

Ecuația rostogolitoarei:

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2 + \theta^2\left[\frac{R\omega_0 + 2v_0}{R\omega_0 + v_0}\right]^2 \frac{v_0^2}{\omega_0^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

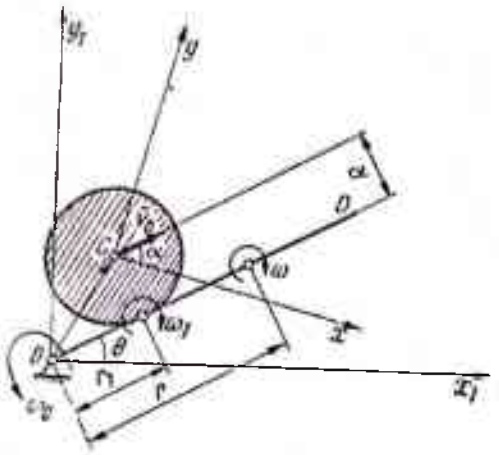


Fig. 8.30

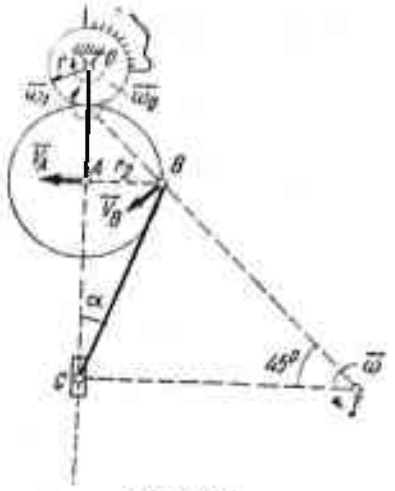


Fig. 8.31

8.31. Manivela $OA = 30$ cm se rotește în jurul axei O cu viteza $\omega_0 = 0{,}5$ rad/s. Roata dințată de rază $r_2 = 20$ cm se rostogolește fără alunecare pe rotița fixă de rază $r_1 = 10$ cm și antrenează în mișcare biela $BC = 20\sqrt{26}$ cm, legată de ea (fig. 8.31). Să se determine viteza unghiulară a bielei BC și viteza punctelor B și C în momentul în care raza AB este perpendiculară pe manivela OA.

Rezolvare. Viteza punctului A, perpendiculară pe manivela OA, are mărimea

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15 \text{ m/s}.$$

Viteza unghiulară a mișcării de rostogolire a roții de rază r_2 pe roata de rază r_1 este

$$\omega_1 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75 \text{ rad/s}.$$

Viteza punctului B va fi

$$v_B = r_2\sqrt{2}\omega_1 = r_2\sqrt{2} \cdot \frac{v_A}{r_2} = 0{,}15\sqrt{2} = 0{,}212 \text{ m/s}.$$

Centrul instantaneu de rotație al barei BC se găsește la intersecția normalelor pe vitezele din punctele B și C.

În triunghiurile ABC și IO_1B există relațiile geometrice

$$|\overline{BC}| \cos\alpha = |\overline{IB}| \frac{\sqrt{2}}{2},$$

respectiv

$$|\overline{IB}| = \sqrt{2}|\overline{BC}| \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{|\overline{BC}|}\right)^2} = \frac{1}{|\overline{BC}|}\sqrt{|\overline{BC}|^2 - r_2^2}.$$

Rezultă pentru IB valoarea

$$|\overline{IB}| = \sqrt{2}\,|\overline{BC}| \cdot \frac{1}{|\overline{BC}|}\sqrt{|\overline{BC}|^2 - r_2^2} = 1{,}41 \text{ m}.$$

Viteza de rotație în jurul centrului instantaneu este

$$\omega = \frac{v_B}{|\overline{IB}|} = \frac{0{,}212}{1{,}41} = 0{,}15 \text{ rad/s}.$$

Viteza punctului C va fi pentru cazul considerat

$$v_C = \omega \cdot |\overline{IC}| = \frac{v_B}{|\overline{IB}|} \cdot |\overline{IC}| = v_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{r_2}{|\overline{IB}|}\right) = 0{,}18 \text{ m/s}.$$

8.32. Bara AB de lungime 60 cm, se poate roti în jurul punctului A, fiind pusă în mișcare de manivela $OE = 10$ cm, care efectuează 100 rot/min, prin intermediul unui sistem de pîrghii $BC = CD = 40$ cm și CE. Să se calculeze viteza unghiulară a barei AB în poziția mecanismului indicată pe figura 8.32.

Rezolvare. Din figura 8.32 rezultă pentru viteza punctului B aparținînd barelor AB și BC valoarea

$$v_B = \omega_A |\overline{AB}| = \omega_{BC} |\overline{I_{BC}B}|$$

de unde

$$\omega_A = \omega_{BC} \frac{|\overline{I_{BC}B}|}{|\overline{AB}|} = \omega_{BC} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Viteza punctului C permite scrierea egalității

$$|\overline{I_{BC}C}|\,\omega_{BC} = |\overline{I_{CE}C}|\,\omega_{CE}$$

de unde

$$\omega_{BC} = \omega_{CE} \frac{|\overline{I_{CE}C}|}{|\overline{I_{BC}C}|} = 2{,}5\,\omega_{CE}.$$

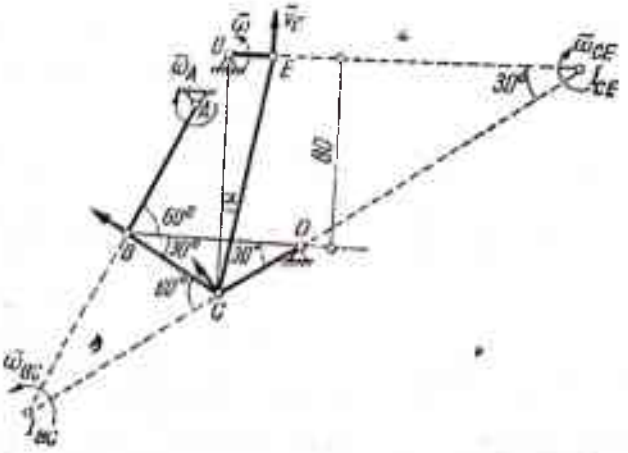


Fig. 8.32

Viteza punctului E este

$$v_E = |\overline{OE}|\,\omega = |\overline{I_{CE}E}|\,\omega_{CE};$$

rezultă

$$\omega_{CE} = \omega \frac{|\overline{OE}|}{\overline{I_{CE}E}} = 0{,}66 \text{ rad/s}.$$

Viteza unghiulară ω_A este

$$\omega_A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}66 \cdot 2{,}5 = 1{,}85 \text{ rad/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Probleme propuse pentru rezolvare

8.33. Să se determine viteza şi acceleraţia unui punct de pe scaunul unui scrînciob care se mişcă într-un plan vertical (fig. 8.33). Scrînciobul are viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$ date.

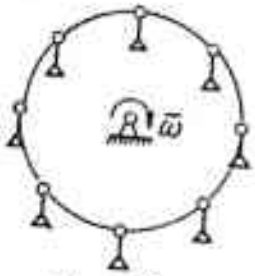


Fig. 8.33

R. Toate punctele scaunului vor avea aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie ca şi punctele de pe periferia scrînciobului

$$\bar{v} = \omega R\bar{\tau}$$

$$\bar{a} = \varepsilon R\bar{\tau} + R\omega^2\bar{\nu}.$$

8.34. O dreaptă D se roteşte uniform în jurul unei drepte Δ, situată în acelaşi plan cu D; fie $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a dreptei D, $\bar{v}$ şi $\bar{a}$ viteza şi acceleraţia unui punct M de pe D, date în mărime şi direcţie (fig. 8.34). Să se găsească locurile geometrice ale extremităţilor vitezei şi acceleraţiei punctului M.

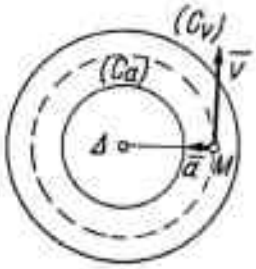


Fig. 8.34

R. Locurile extremităţilor lui $\bar{v}$ şi $\bar{a}$ vor fi respectiv cilindrii C_v şi C_a de raze

$$R_v = \sqrt{R^2 + R^2\omega^2} = R\sqrt{1 + \omega^2}$$

$$R_a = R - R\omega^2 = R(1 - \omega^2).$$

8.35. Un corp efectuează simultan trei mişcări de rotaţie, cu vitezele unghiulare ω_1, $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$, care sînt dirijate după trei axe perpendiculare ce se intersectează în acelaşi punct (fig. 8.35). Care este mişcarea reală efectuată de corp?

R. Corpul efectuează o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}), \ |\bar{\omega}| = |\bar{\omega}_1| \cdot \sqrt{14}$$

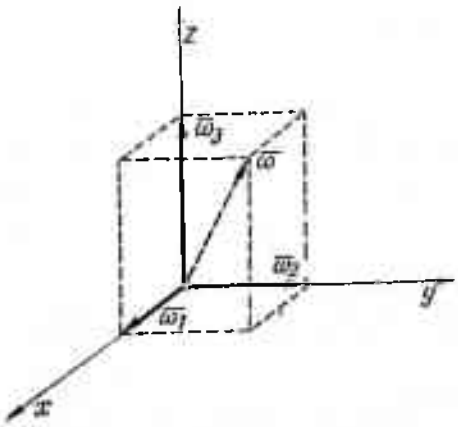


Fig. 8.35

8.36. Axa unei roți dințate conice de rază r intersectează axa geometrică a unei alte roți dințate plane de rază $2r$, în centrul O al acesteia (fig. 8.36). Roata dințată plană efectuează o mișcare de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul său cu o turație de 5 rot/min. Să se calculeze viteza unghiulară a roții conice față de axa ei proprie $\overline{\omega}_1$ și viteza unghiulară instantanee $\overline{\omega}$.

R. $\omega_1 = 2\omega_0 = \frac{\pi}{3}$ rad/s

$$\omega = \omega_0 \sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \text{ rad/s.}$$

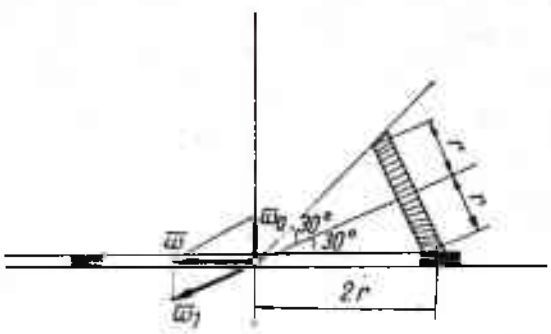


Fig. 8.36

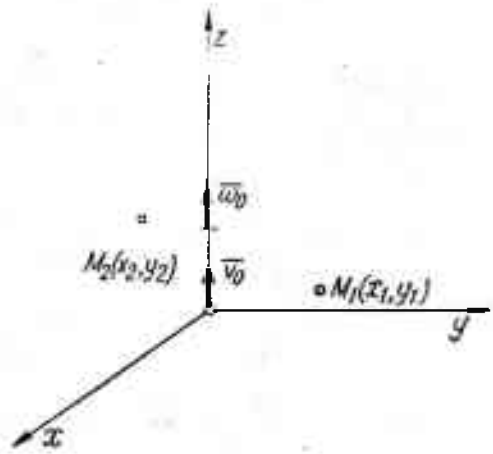


Fig. 8.37

8.37. Un corp are o mișcare de șurub în lungul axei Oz (viteza unghiulară $\overline{\omega}_0$, viteza de translație $\overline{v}_0$). Să se găsească raportul dintre distanțele față de axă a două puncte M_1 și M_2 (fig. 8.37), astfel încît vitezele lor să fie perpendiculare între ele.

R. $x_1x_2 + y_1y_2 = -\frac{v_0}{\omega_0^2}$.

8.38. Un șurub diferențial are construcția din figura 8.38. Pasul primului filet este h_1, iar pasul celui de-al doilea, care mișcă culisa, este h_2. Să se afle viteza culisei, dacă primul filet este pe dreapta, al doilea filet pe dreapta sau pe stînga, iar mînerul se învîrtește astfel încît primul filet se înșurubează făcînd n ture pe minut:

— filetul al doilea este pe dreapta, $v_1 = \frac{h_1 - h_2}{60} n$

— filetul al doilea este pe stînga $v_2 = \frac{h_1 + h_2}{60} n$, direcția vitezei v fiind considerată pozitivă de la dreapta la stînga.

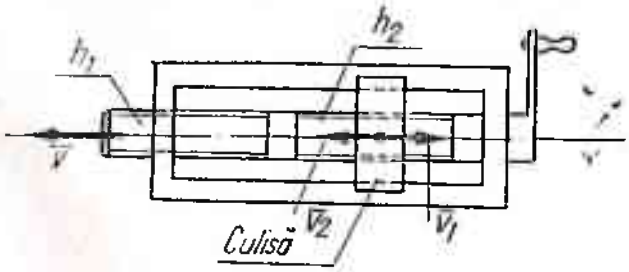


Fig. 8.38

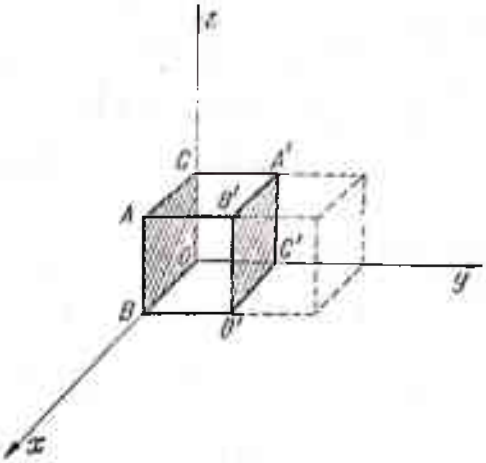


Fig. 8.39

8.39. Un cub de latură a se mişcă astfel încît trei vîrfuri ale sale ABC ajung în $A'B'C'$ (fig. 8.39). Care este mişcarea cea mai simplă pentru a ajunge în această poziţie?

R. O translaţie în jurul axei Oy şi o rotaţie în jurul aceleiaşi axe:

$$\bar{a} = a\bar{j} \text{ (translaţie)}$$

$$\bar{\theta} = -\frac{\pi}{2}\bar{j} \text{ (rotaţie)}.$$

8.40. Se dau barele $|\overline{OA}| = |\overline{AB}| = l$, articulate între ele şi articulate în punctul fix O. Capătul B alunecă pe axa Ox_1 (fig. 8.40). Să se găsească baza şi rostogolitoarea mişcării barei AB, apoi să se determine viteza punctelor B şi M de pe bara $AB(\overline{AM} = k\overline{AB})$ ştiind că bara OA se roteşte în jurul punctului O cu viteza unghiulară constantă ω_0.

R. Baza: $\xi_1^2 + \eta_1^2 = 4l^2$

Rostogolitoarea: $\xi^2 + (\eta - l)^2 = l^2$, $\bar{v}_B = -2l\omega \sin \omega t \cdot \bar{i}_1$.

$$|\bar{v}_M| = \omega l\sqrt{1 + k^2 + 2k\cos\omega t} \text{ cu } \bar{v}_M \perp \overline{IM}$$

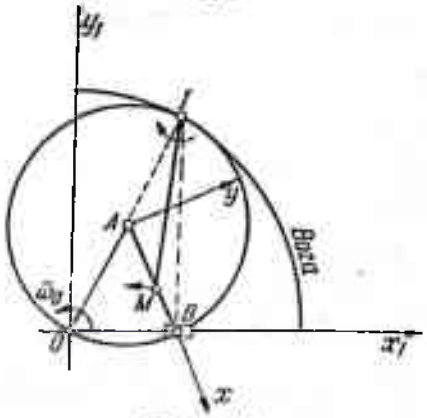


Fig. 8.40

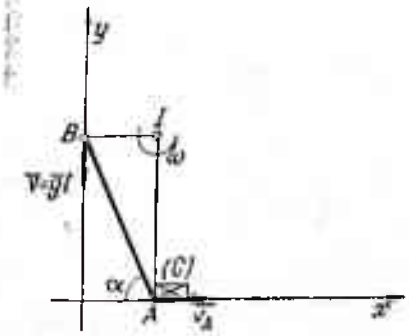


Fig. 8.41

8.41. Bara $AB = l$ se deplasează într-un plan vertical astfel încît capătul B alunecă în lungul axei Oy cu acceleraţia $\bar{g}$. Capătul A al barei

împinge un corp C, care se deplasează fără frecare în lungul axei Ox (fig. 8.41). Să se studieze mișcarea de translație a corpului C.

R. $\mathbf{v}_A = -gt \operatorname{tg} \alpha \cdot \mathbf{i}$.

8.42. Se consideră sistemul de bare articulate $|\overline{AB}| = |\overline{ED}| = a$, $|\overline{DB}| = 2b$, A și E fiind articulații fixe, D și B articulații mobile (fig. 8.42). Bara BA avînd o viteză unghiulară cunoscută ω, se cere viteza lui C — al treilea vîrf al triunghiului DBC solidar legat cu bara DB, pentru poziția mecanismului indicat în figură.

R. $-v_C = |\overline{AB}| \dfrac{|\overline{IC}|}{|\overline{IB}|} \omega \cdot \mathbf{i}$.

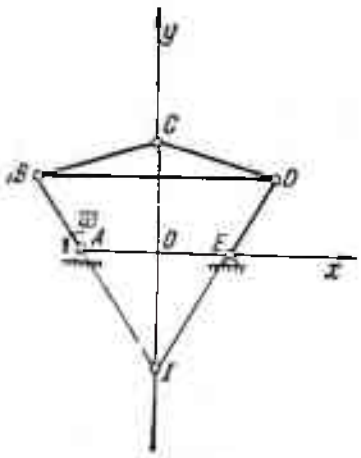


Fig. 8.42

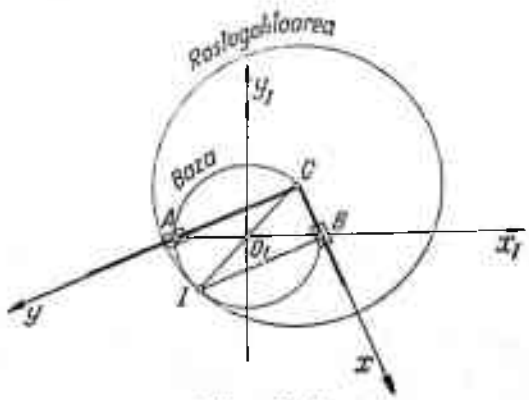


Fig. 8.43

8.43. Vîrful unui unghi drept C descrie cu viteză constantă periferia unui cerc de rază r, iar laturile unghiului drept trec necontenit prin două puncte A și B de pe cerc, situate pe același diametru (fig. 8.43). Se cer vitezele punctelor de pe laturile unghiului drept, baza și rostogolitoarea mișcării.

R. Baza este cercul cu centrul în O și raza r, avînd ecuația

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = r^2.$$

Rostogolitoarea este un cerc cu centrul în C și rază $2r$, avînd ecuația

$$\xi^2 + \eta^2 = 4r^2.$$

8.44. Se consideră mecanismul articulat din figura 8.44 compus din barele $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 2a$ și $|\overline{CD}| = |\overline{AB}| = 2c$. Bara AB fiind fixă să se studieze mișcarea barei CD și să se determine baza și rostogolitoarea mișcării acestei bare.

R. Baza este o elipsă cu axa mare AB, avînd focarele în punctele A și B și ecuația

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Rostogolitoarea este o elipsă egală cu prima și avînd focarele în punctele C și D, cu ecuația

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

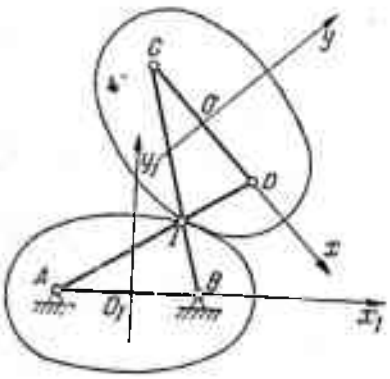


Fig. 8.44

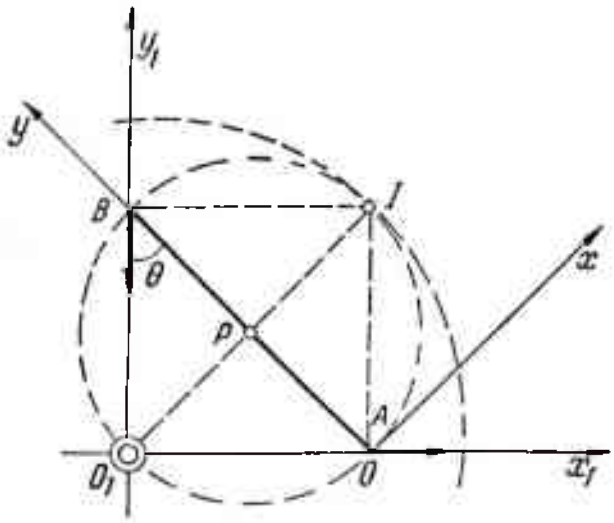


Fig. 8.45

8.45. O bară AB alunecă pe xOy ca în figura 8.45. Să se scrie ecuația bazei și a rostogolitoarei ($AB = l$).

R. Centrul instantaneu este în I.

Baza: $x_1^2 + y_1^2 = l^2$

(cerc cu centrul în O_1; $R = l$).

Rostogolitoarea:

$$x^2+\left(y-\frac{l}{2}\right)^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\left(\text{cerc cu centrul în } P;\ R=\frac{l}{2}\right).$$

8.46. Să se găsească viteza culisei B a mecanismului cu manivelă excentrică din figura 8.46, *a* pentru două poziții (orizontală și verticală) ale manivelei, care se rotește în jurul articulației O cu viteza unghiulară constantă $\omega_0 = 1{,}5$ rad/s. Se dau: $|\overline{OA}| = 20$ cm, $|\overline{AB}| = 100$ cm, $|\overline{OC}| = 40$ cm.

R. Cazul a) (fig. 8.46, *b*): $v_{B_1} = |\overline{OA}|\ \omega_0 \operatorname{tg}\alpha = 0{,}13$ m/s.

Cazul b) (fig. 8.46, *c*): $v_{B_2} = |\overline{OA}|\ \omega_0 = 0{,}03$ m/s.

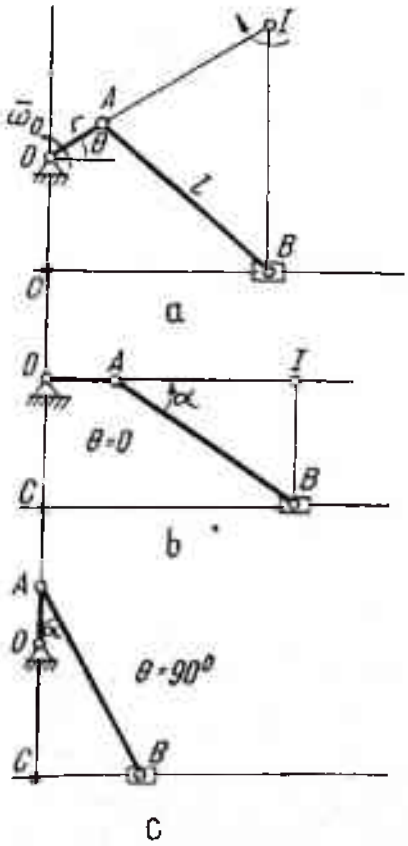


Fig. 8.46

IX. MIŞCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este studiul mişcării punctului material în raport cu un sistem de referinţă fix, atunci cînd se cunosc parametrii cinematici ai mişcării punctului faţă de un sistem de referinţă mobil, precum şi parametrii cinematici care caracterizează mişcarea reperului mobil faţă de reperul fix (fig. IX. 1).

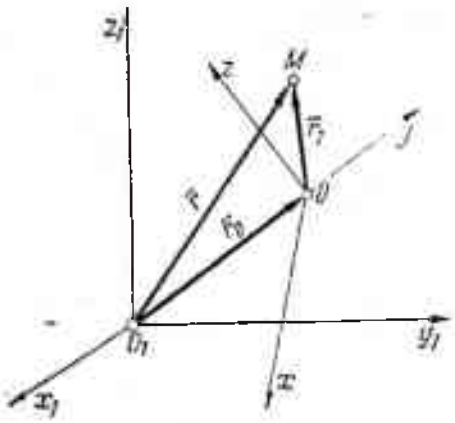


Fig. IX.1

Noţiuni şi formule de bază. În mişcarea relativă a punctului material intervin următoarele noţiuni importante:

Mişcarea absolută: mişcarea punctului în raport cu un reper fix. Se numeşte viteză (respectiv acceleraţie) absolută, viteza (respectiv acceleraţia) punctului în această mişcare.

Mişcarea relativă: mişcarea punctului în raport cu un reper mobil. Viteza (respectiv acceleraţia) relativă este viteza (respectiv acceleraţia) punctului în această mişcare.

Mişcarea de transport: mişcarea în raport cu sistemul fix a punctului solidar cu reperul mobil şi care în momentul considerat coincide cu punctul a cărui mişcare se studiază.

Compunerea vitezelor şi acceleraţiilor în mişcarea relativă se face după cum urmează:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t,$$

unde $\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ este viteza relativă, $\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$ este viteza de transport şi $\bar{v}_a$ este viteza absolută:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c,$$

unde $\bar{a}_a$ este acceleraţia absolută, $\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2}$ este acceleraţia relativă, $\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ este acceleraţia de transport şi $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r$ este *acceleraţia complementară* sau *acceleraţia Coriolis.*

Acceleraţia Coriolis este nulă dacă mişcarea de transport este o translaţie sau dacă vectorii $\bar{\omega}_t$ şi $\bar{v}_r$ sînt paraleli.

Probleme rezolvate

9.1. Un vapor parcurge în josul unui fluviu (în aval) o distanţă L în timpul t_1; acelaşi vapor şi în aceleaşi condiţii parcurge în sensul aceluiaşi fluviu (în amonte) distanţa L, în timpul t_2 (fig. 9.1). Să se găsească viteza proprie a vaporului şi a fluviului, mişcările fiind presupuse uniforme. Aplicaţie numerică:

$$L = 20 \text{ km}, \; t_1 = 50 \text{ min}, \; t_2 = 2\text{h } 30 \text{ min}.$$

Rezolvare. Ecuaţiile de mişcare sînt:

— la deplasarea vaporului în aval

$$(v_1 + v_2)\, t_1 = L;$$

— la deplasarea vaporului în amonte

$$(v_1 - v_2)\, t_2 = L$$

unde s-a notat cu v_1 viteza de curgere a apei, iar cu v_2 viteza de deplasare a vaporului.

Rezultă pentru cele două viteze valorile

$$v_1 = L\frac{t_1 + t_2}{2t_1t_2} = \frac{20\,000(50 + 150)}{2 \cdot 50 \cdot 150 \cdot 60} = \frac{40}{9} \text{ m/s}$$

$$v_2 = L\frac{t_2 - t_1}{2t_1t_2} = \frac{20\,000(150 - 50)}{2 \cdot 50 \cdot 150 \cdot 60} = \frac{20}{9} \text{ m/s}.$$

Pentru valorile numerice date, viteza de deplasare a vaporului este jumătate din viteza de curgere a apei

$$v_1 = 2v_2.$$

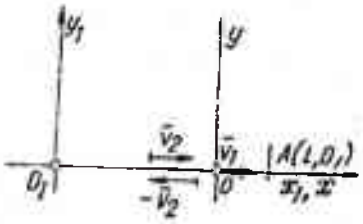


Fig. 9.1

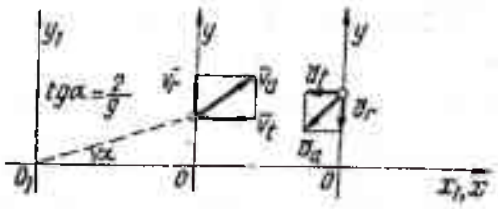


Fig. 9.2

9.2. Un pod rulant de 20 m deschidere se mişcă într-o hală de 90 m lungime în 2 min, iar căruciorul (pisica cu elevator) parcurge în acelaşi timp podul pe toată lungimea lui (fig. 9.2). a) Să se studieze mişcarea podului şi a căruciorului; b) La un moment dat, podul şi căruciorul trebuie să fie oprite brusc, în 1/2 s, pentru a evita un accident. Să se studieze mişcarea în această perioadă, pînă la oprire (viteze şi acceleraţii). Se va considera deceleraţia constantă.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Vitezele de deplasare ale podului şi căruciorului faţă de pod fiind

$$v_{pod} = \frac{90}{2 \cdot 60} = \frac{3}{4} \text{ m/s} = v_t$$

$$v_{căr} = \frac{20}{2 \cdot 60} = \frac{1}{6} \text{ m/s} = v_r.$$

Viteza absolută a căruciorului faţă de pămînt este

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \frac{1}{6}\bar{j}_1 + \frac{3}{4}\bar{i}_1 = \frac{3}{4}\bar{i}_1 + \frac{1}{6}j_1$$

şi are mărimea

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{85}}{12} \text{ m/s}.$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$x_1 = \frac{3}{4}t, \quad y_1 = \frac{1}{6}t,$$

deci punctul descrie dreapta de ecuaţie

$$y_1 = \frac{2x_1}{9}.$$

b) În momentul frînării, legea de variaţie a vitezelor devine

$$v_{pod} = v_{0,\,pod} + a_{pod}t$$

$$v_{căr} = v_{0,\,căr} + a_{căr}t.$$

După 1/2 s vitezele sînt egale cu zero, deci

$$v_{pod} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}a_{pod} = 0, \quad \text{de unde } a_{pod} = -\frac{3}{2} \text{ m/s}^2$$

$$v_{căr} = \frac{1}{6} + \frac{a_{căr}}{2} = 0, \quad \text{de unde } a_{căr} = -\frac{1}{3} \text{ m/s}^2.$$

Viteza căruciorului faţă de pămînt la un moment dat este

$$\bar{v}_a = \bar{v}_{pod} + \bar{v}_{căr} = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}t\right)\bar{i}_1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}t\right)\bar{j}_1$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_{pod}^2 + v_{căr}^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}t\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}t\right)^2}.$$

Acceleraţia căruciorului faţă de pămînt este

$$\bar{a}_a = \bar{a}_{pod} + \bar{a}_{cdr} = -\frac{3}{2}\,\bar{i}_1 - \frac{1}{3}\,\bar{j}_1$$

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{a_{pod}^2 + a_{cdr}^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{85}}{6}\ \mathrm{m/s^2}.$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$x_1 = \int\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\,t\right)\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\,(t - t^2)$$

$$y_1 = \int\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\,t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\,(t - t^2).$$

Căruciorul descrie faţă de pămînt aceeaşi dreaptă de ecuaţie

$$y_1 = \frac{2}{9}\,x_1.$$

9.3. Un punct material se deplasează pe axa Ox a sistemului xOy, cu viteza constantă $\bar{v}_0$, pornind din originea O. În acelaşi timp, mobilul este purtat, cu viteza $\bar{v}$, dirijată după direcţia axei Oy (fig. 9.3). Să se studieze mişcarea absolută în următoarele cazuri: a) $v = ct^n$; b) $v = cx^n$.

Rezolvare. În cazul general viteza şi acceleraţia absolută se exprimă prin relaţiile

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = v_0\bar{i}_1 + v\bar{j}_1$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t = \dot{v}\,\bar{j}_1.$$

a) Viteza şi acceleraţia absolută sînt

$$\bar{v}_a = v_0\bar{i}_1 + ct^n\bar{j}_1$$

$$\bar{a}_a = nct^{(n-1)}\bar{j}_1$$

respectiv mişcarea se exprimă (în componente) prin ecuaţiile

$$\dot{x}_1 = v_0, \quad \dot{y}_1 = ct^n.$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sînt date de

$$x_1 = v_0 t, \quad y_1 = \frac{c}{n+1}\,t^{n+1}$$

sau

$$y_1 = \frac{c}{(n+1)\,v_0^{(n+1)}}\,x_1^{n+1}$$

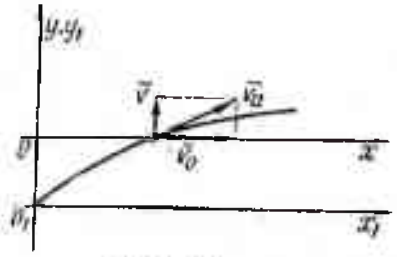


Fig. 9.3

Cazuri particulare:

$$n = 0, \quad \dot{x}_1 = v_0, \quad \dot{y}_1 = c$$

mişcarea este rectilinie şi uniformă după dreapta

$$y_1 = \frac{c}{v_0} x_1;$$

$$n = 1, \quad \dot{x}_1 = v_0, \quad \dot{y}_1 = ct$$

traiectoria punctului este parabola

$$y_1 = \frac{c}{2v_0^2} x_1^2.$$

b) Viteza şi acceleraţia absolută sînt date de

$$\bar{v}_a = v_0 \bar{i}_1 + cx^n \bar{j}_1$$

$$\bar{a}_a = cnx^{n-1} \bar{j}_1.$$

Studiul mişcării se face pornind tot de la expresiile componentelor vitezei

$$\dot{x}_1 = v_0, \quad \dot{y}_1 = cx_1^n.$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$x_1 = v_0 t, \quad y_1 = c\int x_1^n \mathrm{d}t = cv_0^n \int t^n \mathrm{d}t = \frac{cv_0^n}{n+1} t^{n+1}.$$

Ecuaţia traiectoriei este

$$y_1 = \frac{c}{v_0(n+1)} x_1^{n+1}.$$

9.4. Dintr-un punct A de pe malul unui fluviu de lăţime a, care curge cu viteza $\bar{v}$, pleacă în acelaşi timp două vapoare cu aceeaşi viteză $\bar{c}$, unul în lungul fluviului şi altul transversal pe direcţia fluviului (fig. 9.4). Ştiind că vapoarele parcurg fiecare distanţa 2 a (dus-întors), se întreabă care dintre cele două vapoare se întoarce mai repede în punctul A.

Rezolvare. Viteza vaporului în mişcarea în lungul fluviului în sensul de curgere al apei este

$$v_{l1} = v + c;$$

— viteza vaporului în mişcarea în lungul fluviului în sensul contrar sensului de curgere al apei este

$$v_{l2} = c - v.$$

Timpul necesar parcurgerii distanţei $2a$ în lungul fluviului $(c > v)$

$$t_l = \frac{a}{c+v} + \frac{a}{c-v} = \frac{2ac}{c^2 - v^2}.$$

Viteza vaporului la traversarea fluviului este

$$v_t = \sqrt{c^2 - v^2},$$

iar timpul necesar parcurgerii distanţei $2a$ transversal pe fluviu este:

$$t_t = \frac{2a}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Călătoria transversală pe direcţia fluviului se face mai repede decît cea longitudinală

$$\frac{t_t}{t_l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1.$$

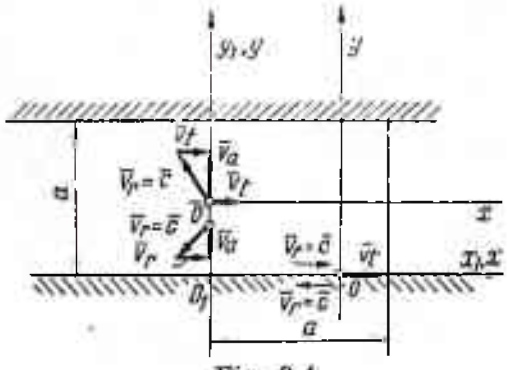


Fig. 9.4

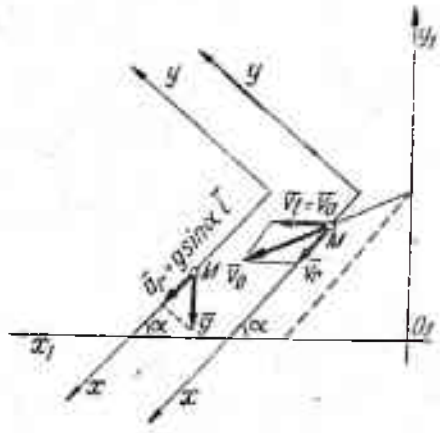


Fig. 9.5

9.5. Un mobil M se mişcă liber pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală. În acelaşi timp, planul înclinat are o mişcare de translaţie cu viteza constantă v_0 pe planul orizontal. Să se studieze mişcarea mobilului M (fig. 9.5).

Rezolvare. Mişcarea pe planul înclinat reprezintă mişcarea relativă, iar mişcarea planului înclinat este mişcarea de transport. Vitezele în aceste mişcări sînt

$$\bar{v}_r = gt\,\bar{i}\sin\alpha = gt\sin\alpha(\cos\alpha\cdot\bar{i}_1 - \sin\alpha\cdot\bar{j}_1)$$

$$\bar{v}_t = v_0\bar{i}_1.$$

Viteza absolută este

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \left(\frac{1}{2}gt\sin 2\alpha + v_0\right)\bar{i}_1 - \frac{gt}{2}(1 - \cos 2\alpha)\bar{j}_1$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2\sin^2\alpha + v_0gt\sin 2\alpha}.$$

Acceleraţia absolută este

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r = g\sin\alpha\cdot\bar{i} = g\sin\alpha(\cos\alpha\cdot\bar{i}_1 - \sin\alpha\cdot\bar{j}_1)$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_c = 0.$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$x_1 = v_0 t + \frac{gt^2}{4} \sin 2\alpha$$

$$y_1 = \frac{gt^2}{4} (\cos 2\alpha - 1).$$

9.6. O corabie se mișcă în linie dreaptă cu viteza constantă $\bar{v}_1$. Un om aflat pe covertă aruncă o minge vertical în sus cu viteza inițială $\bar{v}_0$ (fig. 9.6). Neglijînd rezistența aerului, să se afle traiectoria mingii și viteza ei absolută.

Rezolvare. Mișcarea relativă a mingii se efectuează după legea

$$\bar{j}\bar{r} = y,$$

respectiv

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad x = 0.$$

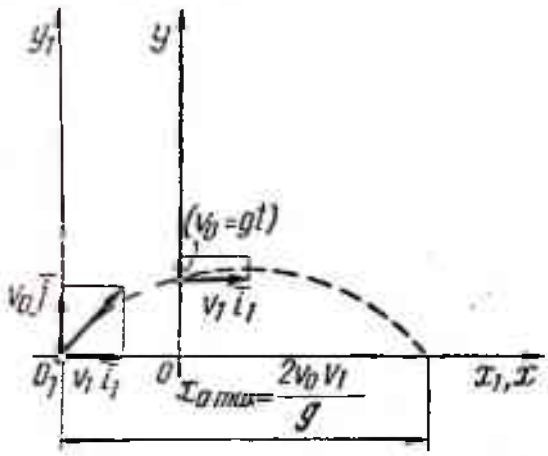


Fig. 9.6

Viteza relativă este

$$\dot{y} = v_r = v_0 - gt.$$

Timpul de urcare corespunzînd vitezei $v_r = 0$ este

$$t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

Înălțimea maximă corespunzătoare este

$$y = h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Accelerația relativă este

$$\ddot{y} = a_r = -g$$

Mișcarea de transport a corabiei se efectuează după legea

$$\bar{r}_0 = v_1 t \bar{i}_1 + y_0 \bar{j}_1,$$

respectiv

$$x = v_1 t, \; y = y_0.$$

Spațiul parcurs de corabie pînă la întoarcerea mingii este:

$$x_{max} = 2v_1 t_1 = \frac{2v_0 v_1}{g}.$$

Mișcarea absolută a mingii este dată de legea

$$\bar{r}_1 = v_1 t \bar{i}_1 + y \bar{j}_1.$$

Viteza absolută este

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \bar{v}_0 - \bar{g}t + \bar{v}_1 = v_1\vec{i}_1 + (v_0 - gt)\vec{j}_1, \quad v_a = \sqrt{v_1^2 + (v_0 - gt)^2},$$

iar accelerația absolută

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t = -\bar{g} = -g\vec{j}_1, \; a_a = -g.$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei au forma

$$x_a = v_1 t, \quad y_a = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

respectiv

$$y_a = x_a\left(\frac{v_0}{v_1} - \frac{g}{2v_1^2}x_a\right).$$

Se regăsește valoarea distanței parcurse de corabie pînă la întoarcerea mingii

$$x_{a_{max}} = \frac{2v_0v_1}{g}.$$

9.7. Un mobil M are o mișcare oscilatorie armonică pe dreapta verticală $AOB(AB = 2p)$. În același timp, dreapta AOB are o mișcare de translație uniform variată în planul xOy în direcția axei Ox, perpendicular pe AB (fig. 9.7). Să se determine:

a) traiectoria absolută a punctului M, știind că la momentul $t = 0$ dreapta AOB se suprapune peste axa Oy_1, mobilul M se află în O, iar dreapta AB în mișcarea sa de translație pleacă din O, din poziția de repaus;

b) viteza și accelerația mobilului la momentul t.

Rezolvare. a) Mișcarea relativă (pe dreapta AOB) se efectuează după legea

$$y = p \sin \omega t.$$

Mișcarea de transport a dreptei este dată de

$$x = \frac{1}{2}a_0t^2.$$

Traiectoria absolută are ecuațiile parametrice

$$x_1 = \frac{1}{2}a_0t^2, \quad y_1 = p \sin \omega t,$$

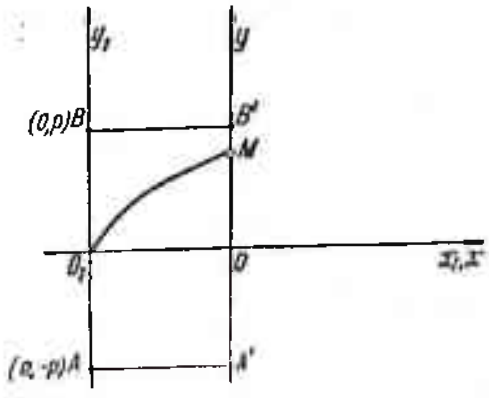


Fig. 9.7

respectiv

$$y_1 = p \sin \omega\sqrt{\frac{2x}{a_0}} = p \sin b\sqrt{x_1}$$

unde

$$b = \omega \sqrt{\frac{2}{a_0}}.$$

b) Viteza absolută este

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

unde

$$\bar{v}_r = p\omega \cos \omega t \bar{j}$$
$$\bar{v}_t = a_0 t \bar{i}_1,$$

adică

$$\bar{v}_a = p\omega \cos \omega t \bar{j}_1 + a_0 t \bar{i}_1, \quad |\bar{v}_a| = \sqrt{a_0^2 t^2 + p^2\omega^2 \cos^2 \omega t}.$$

Accelerația absolută este

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

unde

$$\bar{a}_r = -p\omega^2 \sin \omega t \bar{j}, \quad \bar{a}_t = a_0 \bar{i}_1, \quad \bar{a}_c = 0.$$

Rezultă

$$\bar{a}_a = -p\omega^2 \sin \omega t \cdot \bar{j}_1 + a_0 \bar{i}_1, \quad |\bar{a}_a| = \sqrt{p^2\omega^4 \sin^2 \omega t + a_0^2}.$$

9.8. Se cere să se strunjească o bară cilindrică de oțel, cu diametrul $d = 80$ mm și lungimea $l = 4{,}5$ m. Să se determine timpul necesar pentru strunjire, dacă viteza de tăiere este de 200 mm/s, iar deplasarea laterală a cuțitului este de 0,5 mm la fiecare rotație a barei (fig. 9.8).

Rezolvare. Mișcarea unui punct de pe bara de strunjit se compune din:

— o mișcare relativă: o rotație uniformă în jurul axei barei de strunjit cu viteza unghiulară

$$\bar{\omega}_r = \frac{v}{R} \bar{j}_1 = \frac{200}{40} \bar{j}_1 = 5\bar{j}_1, \quad |\bar{\omega}_r| = 5 \text{ rad/s};$$

— o mișcare de transport: o translație rectilinie, uniformă, cu viteza de transport $\bar{v}_t$. Dacă la fiecare rotație a piesei, cuțitul înaintează cu 0,5 mm, atunci timpul necesar pentru o rotație va fi

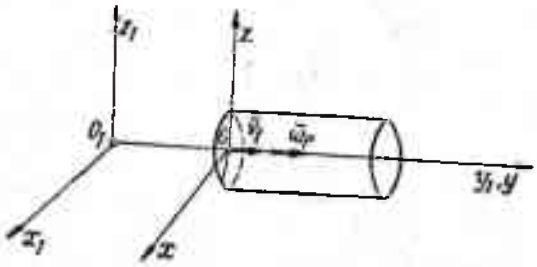


Fig. 9.8

$$\Delta t = \frac{2\pi}{5}, \text{ deci } |\bar{v}_t| = \frac{0{,}5 \cdot 5}{2\pi} \text{ mm/s}.$$

Timpul total necesar strunjirii va fi

$$T = \frac{4 \cdot 500 \cdot 2\pi}{5 \cdot 0{,}5} = 3600\pi \text{ s} = \pi \text{h}.$$

9.9. Un con circular drept de rază R şi înălţime H se roteşte în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară constantă ω_0. Un mobil M se deplasează cu viteza $v = kt$ pe generatoarea acestui con (fig. 9.9). Să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia absolută a mobilului.

Rezolvare. Mişcarea lui M pe generatoarea AB este mişcare relativă, iar mişcarea generatoarei AB în jurul axei Oz este mişcare de transport.

Viteza relativă a punctului M este

$$\bar{v}_r = kt(\sin\alpha\bar{i} - \cos\alpha\bar{k}) = kt\sin\alpha(\cos\omega_0 t\bar{i}_1 + \sin\omega_0 t\bar{j}_1) - kt\cos\alpha\bar{k}_1.$$

Viteza de transport este

$$\bar{v}_t = \frac{kt^2}{2}\omega_0\sin\alpha\cdot\bar{j} = \frac{kt^2}{2}\omega_0\sin\alpha(-\sin\omega_0 t\cdot\bar{i}_1 + \cos\omega_0 t\cdot\bar{j}_1)$$

iar viteza absolută

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = kt\sin\alpha(\cos\omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2}\sin\omega_0 t)\bar{i}_1 + kt\sin\alpha\times$$

$$\times\left(\sin\omega_0 t + \frac{\omega_0 t}{2}\cos\omega_0 t\right)\bar{j}_1 - kt\cos\alpha\bar{k}_1,$$

$$|\bar{v}_a| = \frac{kt}{2}\sqrt{4 + \omega_0^2 t^2\sin^2\alpha}.$$

Acceleraţia relativă a punctului M este

$$\bar{a}_r = k(\sin\alpha\cdot\bar{i} - \cos\alpha\cdot\bar{k}) = k\sin\alpha(\cos\omega_0 t\cdot\bar{i}_1 + \sin\omega_0 t\cdot\bar{j}_1) - k\cos\alpha\cdot\bar{k}_1$$

Acceleraţia de transport datorită rotaţiei uniforme are numai componenta radială

$$\bar{a}_t = -\frac{kt^2}{2}\omega_0^2\sin\alpha(\cos\omega_0 t\cdot\bar{i}_1 + \sin\omega_0 t\cdot\bar{j}_1),$$

iar acceleraţia Coriolis

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_0\times\bar{v}_r = 2\omega_0 kt\sin\alpha(\cos\omega_0 t\cdot\bar{j}_1 - \sin\omega_0 t\cdot\bar{i}_1).$$

Acceleraţia absolută are forma

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = \bar{i}_1\left[k\sin\alpha\cos\omega_0 t - \frac{kt^2}{2}\omega_0^2\sin\alpha\cos\omega_0 t -\right.$$

$$\left.- 2\omega_0 k\,t\sin\alpha\sin\omega_0 t\right] + \bar{j}_1\left[k\sin\alpha\sin\omega_0 t - \frac{kt^2}{2}\omega_0^2\sin\alpha\sin\omega_0 t +\right.$$

$$\left.+ 2\omega_0\,kt\sin\alpha\cos\omega_0 t\right] - k\cos\alpha\bar{k}_1$$

$$|\bar{a}_a| = \frac{k}{2}\sqrt{4 + 12\omega_0^2 t^2\sin^2\alpha + \omega_0^4 t^4\sin^2\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea traiectoriei absolute se vor integra în raport cu timpul proiecțiile vitezei absolute, exprimate în raport cu sistemul de referință fix sau, ceea ce este același lucru, se va proiecta distanța $AM = \frac{kt^2}{2}$ pe axele de coordonate. Se obțin ca ecuații parametrice ale traiectoriei

$$x_1 = \frac{kt^2}{2} \sin \alpha \cos \omega_0 t$$

$$y_1 = \frac{kt^2}{2} \sin \alpha \sin \omega_0 t$$

$$z_1 = H - \frac{kt^2}{2} \cos \alpha.$$

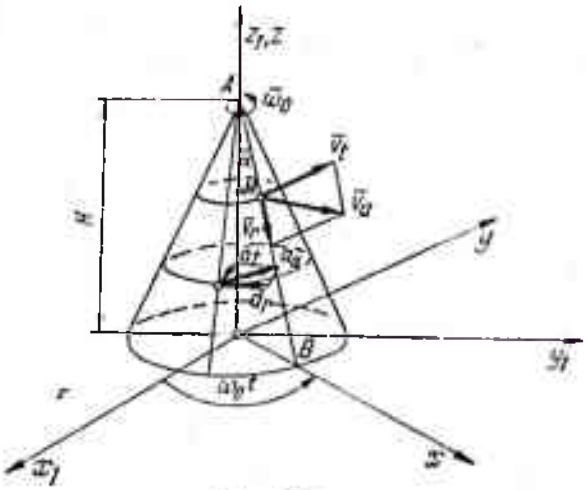


Fig. 9.9

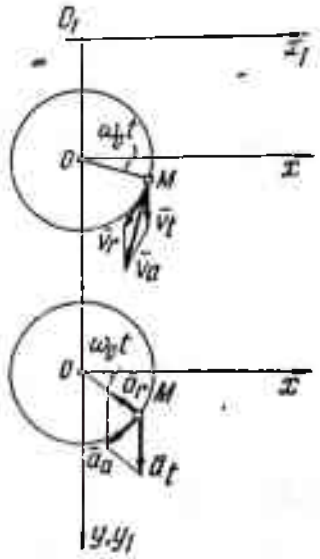


Fig. 9.10

9.10. Un disc circular greu cade sub acțiunea gravitației, și în același timp, se învârtește în jurul centrului său cu viteza unghiulară constantă ω_0. Să se studieze mișcarea unui punct M de pe periferia discului (componentele vitezei și accelerației). În momentul inițial centrul O al discului coincide cu centrul O_1 al sistemului de referință fix, iar punctul M se află pe axa O_1x_1 (fig. 9.10).

Aplicația numerică: $n = 180$ rot/min, $OM = 10$ cm, $t = 1$ s.

Rezolvare. Mișcarea discului este o mișcare plan-paralelă. Un punct M de pe periferia discului poate fi considerat că efectuează o mișcare relativă față de disc, în timp ce acesta are o mișcare de translație cu accelerația gravitației $\bar{g}$. Viteza relativă a punctului M este

$$\bar{v}_r = R\omega_0(-\sin \omega_0 t \cdot \bar{i} + \cos \omega_0 t \cdot \bar{j}),$$

iar viteza de transport a discului are expresia

$$\bar{v}_t = gt\bar{j}$$

Rezultă pentru viteza absolută

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -R\omega_0 \sin \omega_0 t \cdot \bar{i} + (R\omega_0 \cos \omega_0 t + gt)\,\bar{j}$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{R^2\omega_0^2 + g^2t^2 + 2gR\omega_0 t \cos \omega_0 t}.$$

Accelerația relativă are numai componentă radială, deoarece mișcarea circulară a punctului este uniformă

$$\bar{a}_r = -\omega_0^2 R(+\cos \omega_0 t \cdot \bar{i} + \sin \omega_0 t \cdot \bar{j}).$$

Accelerația de transport este

$$\bar{a}_t = g\bar{j},$$

iar accelerația Coriolis este nulă

$$\bar{a}_c = 0,$$

mișcarea de transport fiind o translație.

Accelerația absolută devine

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t = -\omega_0^2 R \cos \omega_0 t \cdot \bar{i} + (g - \omega_0^2 R \sin \omega_0 t)\,\bar{j}$$

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{R^2\omega_0^4 + g^2 - 2g\omega_0^2 R \sin \omega_0 t}$$

deci

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{g^2 + 1{,}2g\pi + 0{,}36\pi^2}\ \mathrm{m/s}$$

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{g^2 + 36^2}\ \mathrm{m/s^2}.$$

Pentru aplicația numerică avem

$$\omega_0 = \frac{2\pi n}{60} = 6\pi\ \mathrm{rad/s}.$$

9.11. Un disc de rază R se rotește uniform în jurul unei axe, care trece prin centrul său și este perpendiculară pe planul său. Pe o coardă a discului se mișcă un punct M cu o viteză constantă $\bar{v}_0$, pornind din mijlocul coardei (fig. 9.11). Să se afle viteza și accelerația absolută ale punc-

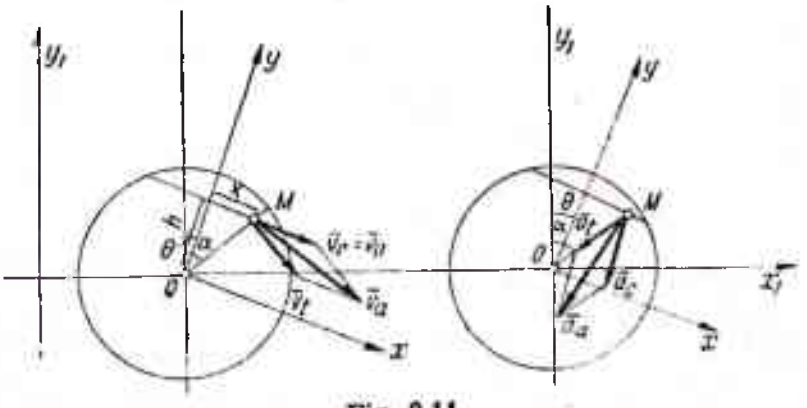


Fig. 9.11

tului M în funcţie de poziţia lui pe coardă. Sînt date: viteza unghiulară ω_0 a discului, viteza relativă $\bar{v}_r$ a punctului M, distanţa b de la centrul discului la coardă şi distanţa x a punctului M la mijlocul coardei.

Rezolvare. Fie $\theta = \omega t$ unghiul format de axele Oy şi Oy_1 şi α unghiul format de raza vectoare $\overline{OM}$ cu axa Oy_1.

Între datele geometrice ale problemei rezultă relaţiile

$$x = |\overline{O_1M}| \sin(\alpha - \theta), \quad h = |\overline{O_1M}| \cos(\alpha - \theta),$$

respectiv

$$|\overline{O_1M}| = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$\sin(\alpha - \theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}, \quad \cos(\alpha - \theta) = \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

Viteza punctului M pe coardă, adică viteza relativă, este

$$\bar{v}_r = v_0\bar{i} = v_0(\cos\theta \cdot \bar{i}_1 - \sin\theta \cdot \bar{j}_1),$$

iar viteza de transport a sistemului

$$\bar{v}_t = |\overline{O_1M}|\, \omega_0(\cos\alpha \cdot \bar{i}_1 - \sin\alpha \cdot \bar{j}_1),$$

deci viteza absolută a punctului este

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \bar{i}_1(v_0 \cos\theta + |\overline{O_1M}|\, \omega_0 \cos\alpha) - \bar{j}_1(v_0 \sin\theta + |\overline{O_1M}|\, \omega_0 \sin\alpha)$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_0^2 + |\overline{O_1M}|^2 \omega_0^2 + 2v_0\omega_0 |\overline{O_1M}| \cos(\alpha - \theta)} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 + (x^2 + h^2)\,\omega_0^2 + 2v_0\omega_0 h}.$$

Acceleraţia relativă este nulă

$$\bar{a}_r = 0.$$

Acceleraţia de transport este

$$\bar{a}_t = -|\overline{O_1M}|\, \omega_0^2(\sin\alpha \cdot \bar{i}_1 + \cos\alpha \cdot \bar{j}_1),$$

Acceleraţia Coriolis

$$\bar{a}_c = -2\omega_0\bar{k}_1 \times v_0(\cos\theta \cdot \bar{i}_1 - \sin\theta \cdot \bar{j}_1) = -2\omega_0 v_0(\cos\theta \cdot \bar{j}_1 + \sin\theta \cdot \bar{i}_1).$$

Deci acceleraţia absolută este

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_c = -\bar{i}_1(\omega_0^2 |\overline{O_1M}| \sin\alpha + 2\omega_0 v_0 \sin\theta) - \bar{j}_1(2\omega_0 v_0 \cos\theta +$$

$$+ \omega_0^2 |\overline{O_1M}| \cos\alpha)$$

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{\omega_0^4 |\overline{O_1M}|^2 + 4\omega_0^2 v_0^2 + 2\omega_0^3 v_0 |\overline{O_1M}| \cos(\alpha - \theta)} =$$

$$= \sqrt{\omega_0^4(x^2 + h^2) + 4\omega_0^2 v_0^2 + 2\omega_0^3 v_0 h}.$$

9.12. Pe suprafaţa Pămîntului, de-a lungul ecuatorului, merge un tren cu viteza de 72 km/h. Care este mişcarea absolută a trenului dacă se ţine seama şi de rotaţia Pămîntului (fig. 9.12)? (Raza Pămîntului este de 6370 km.)

Rezolvare. Viteza unghiulară a mişcării circulare a trenului pe ecuator este

$$\omega_0 = \frac{72}{60^2 \cdot 6370} \text{ rad/s},$$

iar viteza unghiulară de rotaţie a Pămîntului

$$\omega_1 = \frac{2}{24 \cdot 60^2} \text{rad/s}.$$

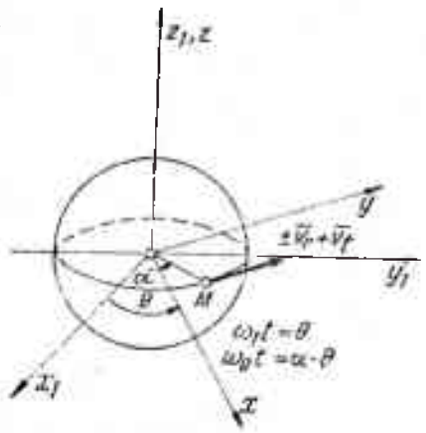


Fig. 9.12

Viteza absolută a trenului este

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = R(\omega_1 \pm \omega_0)\,\bar{\tau} = 2R(\omega_1 \pm \omega_0)\,(-\sin\alpha \cdot \bar{i}_1 + \cos\alpha \cdot \bar{j}_1)$$

iar accelerаţia absolută a trenului

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = R\bar{\nu}(\omega_1 + \omega_0)^2 = -R(\omega_1 + \omega_0)^2\,(\cos\alpha \cdot \bar{i}_1 + \sin\alpha \cdot \bar{j}_1)$$

Traiectoria trenului este cercul de rază R

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2.$$

9.13. Pe suprafaţa Pămîntului, merge un tren M de-a lungul unui meridian, de la sud la nord, cu viteza constantă de 90 km/h. Să se studieze mişcarea absolută a trenului, ţinînd seama şi de rotaţia Pămîntului (fig. 9.13, *a*).

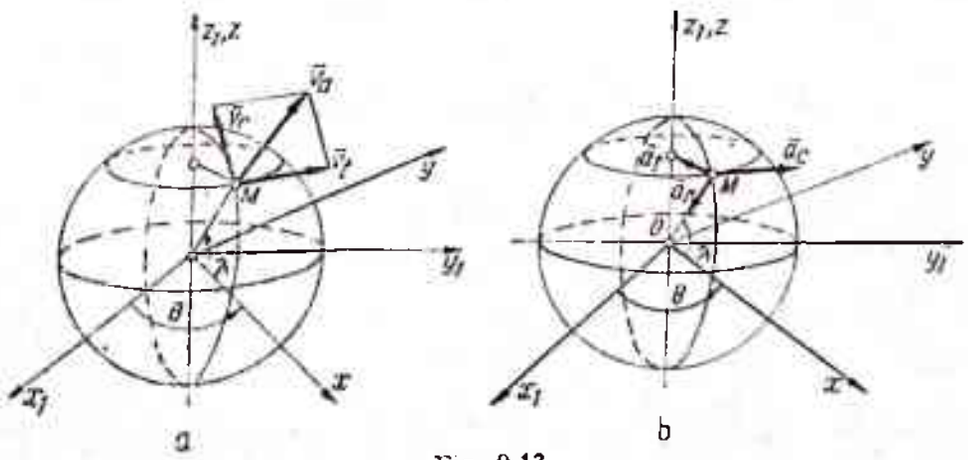


Fig. 9.13

Rezolvare. Poziția punctului M este definită prin longitudinea $\theta = \omega t$ (ω fiind viteza unghiulară de rotație a Pămîntului) și prin latitudinea $\lambda = \frac{v_r}{R} t = Kt$.

Viteza relativă a punctului M față de meridian este

$$\bar{v}_r = -v_r(\sin\lambda\cos\theta \cdot \bar{i}_1 + \sin\lambda\sin\theta \cdot \bar{j}_1 - \cos\lambda\,\bar{k}_1).$$

Viteza de transport a punctului M legat de meridian este

$$\bar{v}_t = R\cos\lambda\omega_t(\cos\theta \cdot \bar{i}_1 - \sin\theta \cdot \bar{j}_1);$$

Rezultă viteza absolută a punctului M

$$\bar{v}_a = -\bar{i}_1(v_r\sin\lambda\cos\theta + R\omega_t\cos\lambda\sin\theta) +$$
$$+ \bar{j}_1(R\omega_t\cos\lambda\cos\theta - v_r\sin\lambda\sin\theta) + v_r\cos\lambda\bar{k}_1$$
$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + R^2\omega_t^2\cos^2\lambda}.$$

Accelerația relativă are numai componentă normală, dirijată către centrul Pămîntului, deoarece viteza relativă este constantă,

$$\bar{a}_r = -\frac{v_r^2}{R}(\cos\lambda\cos\theta \cdot \bar{i}_1 + \cos\lambda\sin\theta \cdot \bar{j}_1 + \sin\lambda \cdot \bar{k}_1).$$

Accelerația de transport este tangentă la paralelă și are expresia (fig. 9.13, *b*)

$$\bar{a}_t = -R\cos\lambda\omega_t^2(\cos\theta \cdot \bar{i}_1 + \sin\theta \cdot \bar{j}_1).$$

Accelerația Coriolis este dată de

$$\bar{a}_c = 2\omega_t\bar{k}_1 \times v_r(-\sin\lambda\cos\theta \cdot \bar{i}_1 - \sin\lambda\sin\theta \cdot \bar{j}_1 + \cos\lambda\bar{k}_1) =$$
$$= 2\omega_t v_r\sin\lambda(\sin\theta \cdot \bar{i}_1 - \cos\theta \cdot \bar{j}_1).$$

Accelerația absolută (fig. 9.13, *b*) are expresia

$$\bar{a}_a = \bar{i}_1\left[-\frac{v_r^2}{R}\cos\lambda\cos\theta - R\omega_t^2\cos\lambda\cos\theta + 2\omega_t v_r\sin\lambda\sin\theta\right] -$$
$$- \bar{j}_1\left[\frac{v_r^2}{R}\cos\lambda\sin\theta + R\omega_t^2\cos\lambda\sin\theta + 2\omega_t v_r\sin\lambda\cos\theta\right] -$$
$$- \frac{v_r^2}{R}\sin\lambda \cdot \bar{k}_1 = \bar{i}_1\left[2\omega_t v_r\sin\lambda\sin\theta - \cos\lambda\cos\theta\left(R\omega_t^2 + \frac{v_r^2}{R}\right)\right] -$$
$$- \bar{j}_1\left[2\omega_t v_r\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\left(\frac{v_r^2}{R} + R\omega_t^2\right)\right] - \frac{v_r^2}{R} \cdot \sin\lambda \cdot \bar{k}_1$$

şi

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{\left(4\omega_t^2 v_r^2 + \frac{v_r^2}{R^2}\right)\sin^2\lambda + \left(R\omega_t^2 + \frac{v_r}{R}\right)^2\cos^2\lambda}\,.$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei, se obţin prin integrarea în raport cu timpul a componentelor vitezei absolute şi sînt date de

$$x_1 = -\int(v_r \sin\lambda\cos\theta + R\omega_t\cos\lambda\cos\theta)\,dt = R\cos\lambda\cos\theta$$

$$y_1 = \int(-v_r \sin\lambda\sin\theta + R\omega_t\cos\lambda\cos\theta)\,dt = R\cos\lambda\sin\theta$$

$$z_1 = \int v_r\cos\lambda dt = R\sin\lambda.$$

9.14. Un cerc se roteşte în jurul centrului său cu viteza unghiulară constantă ω_0. Să se studieze mişcarea unui mobil care se deplasează pe o tangentă, în sensul general al mişcării, cu viteza constantă $\bar{u}$. La momentul $t = 0$ mobilul se află în punctul de tangenţă (fig. 9.14).

Rezolvare. Notăm cu α unghiul format de raza vectoare a punctului B cu axa Ox_1 (fixă) şi cu β unghiul format de raza vectoare cu axa Ox (mobilă). Avem relaţiile

$$\alpha = \theta + \beta \text{ şi } |\overline{OB}| = \sqrt{R^2 + u^2t^2};$$

de asemenea relaţiile

$$\sin\alpha = \sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta = \sin\theta\frac{R}{\sqrt{R^2+u^2t^2}} + \frac{ut}{\sqrt{R^2+u^2t^2}}\cos\theta$$

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta = \cos\theta\frac{R}{\sqrt{R^2+u^2t^2}} - \frac{ut}{\sqrt{R^2+u^2t^2}}\sin\theta.$$

Viteza relativă a punctului B este

$$\bar{v}_r = u\bar{j} = u(-\sin\theta\,\bar{i}_1 + \cos\theta\,\bar{j}_1).$$

Viteza de transport a cercului este

$$\bar{v}_t = \omega_0\overline{OB}(-\sin\alpha\cdot\bar{i}_1 + \cos\alpha\cdot\bar{j}_1) = \omega_0\sqrt{R^2+u^2t^2}(-\sin\alpha\cdot\bar{i}_1 + \cos\alpha\cdot\bar{j}_1)$$

Viteza absolută are expresia

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -(u\sin\theta + \omega_0\,OB\sin\alpha)\,\bar{i}_1 + (u\cos\theta + \omega_0\,OB\cos\alpha)\,\bar{j}_1$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{u^2 + \omega_0^2|\overline{OB}|^2 + 2u\omega_0|\overline{OB}|\cos\beta}.$$

Accelerația relativă este nulă, mișcarea pe tangentă fiind uniformă

$$\bar{a}_r = 0.$$

Accelerația de transport are numai componenta radială, rotația fiind uniformă,

$$\bar{a}_t = \frac{v_t^2}{OB}\bar{\nu} = OB\,\omega_0^2\,\bar{\nu} = -\,\omega_0^2\sqrt{R^2 + u^2t^2}(+\cos\alpha\cdot\bar{i}_1 + \sin\alpha\cdot\bar{j}_1).$$

Accelerația Coriolis are expresia

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t\times\bar{v}_r = 2\omega_0\bar{k}_1\times u(-\sin\theta\cdot\bar{i}_1 + \cos\theta\cdot\bar{j}_1) =$$
$$= -\,2\omega_0 u(\cos\theta\cdot\bar{i}_1 + \sin\theta\cdot\bar{j}_1).$$

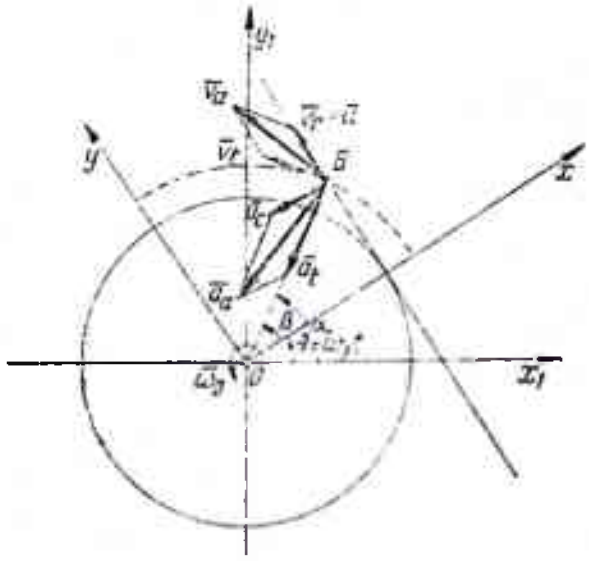


Fig 9.14

Rezultă pentru accelerația absolută expresia

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = -\,\bar{i}_1(\omega_0^2\cos\alpha\sqrt{R^2 + u^2t^2} + 2\omega_0 u\cos\theta) -$$
$$-\,\bar{j}_1(\omega_0^2\sin\alpha\sqrt{R^2 + u^2t^2} + 2\omega_0 u\sin\theta)$$

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{\omega_0^4(R^2 + u^2t^2) + 4\omega_0^2u^2 + 4\omega_0^3\,u\sqrt{R^2 + u^2t^2}\cos\beta}.$$

Traiectoria absolută se obține prin integrarea componentelor vitezei absolute

$$x_1 = -\int[(u + \omega_0 R)\sin\omega_0 t + \omega_0\,ut\cos\omega_0 t]\,dt$$

$$y_1 = \int[(u + \omega_0 R)\cos\omega_0 t - \omega_0 ut\sin\omega_0 t]\,dt.$$

9.15. O picătură de apă curge cu o viteză uniformă $\bar{v}_0$ de-a lungul unei spițe de roată, pornind de la poziția verticală. Roata se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal avînd o viteză constantă a centrului $\bar{v}_1$. Care sînt viteza și accelerația absolută ale picăturii pentru o poziție a spiței înclinată cu unghiul φ față de verticală, raza roții fiind R (fig. 9.15)?

Rezolvare. Poziţia punctului M este definită la un moment dat prin unghiul α format de raza vectoare, care trece prin centrul instantaneu I, cu axa Oy, sau de unghiul φ format de vectorul de poziţie în sistemul mobil xOy cu axa Oy. Între aceste unghiuri există relaţiile

$$\sin\alpha = \frac{R - v_0 t}{|\overline{IM}|}\sin\varphi, \quad \cos\alpha = \frac{R + (R - v_0 t)\cos\varphi}{|\overline{IM}|}.$$

Viteza relativă a punctului M este

$$\bar{v}_r = \bar{v}_0 = -v_0(+\sin\varphi\cdot\bar{i}_1 + \cos\varphi\cdot\bar{j}_1),$$

iar viteza de transport a roţii

$$\bar{v}_t = |\overline{IM}|\frac{v_1}{R}(\cos\alpha\cdot\bar{i}_1 - \sin\alpha\cdot\bar{j}_1).$$

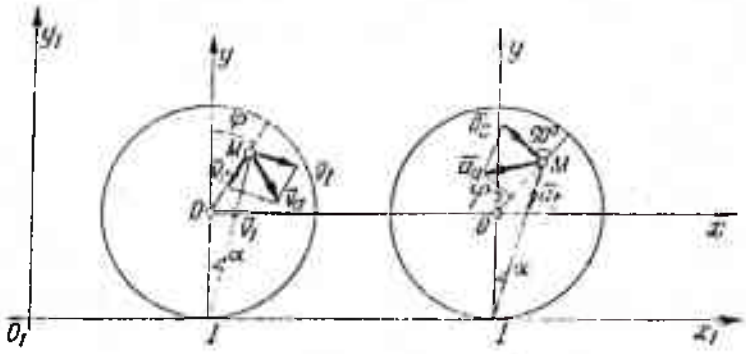


Fig. 9.15

Viteza absolută a lui M va fi

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \bar{i}_1\left(|\overline{IM}|\frac{v_1}{R}\cos\alpha - v_0\sin\varphi\right) - \bar{j}_1\left(|\overline{IM}|\frac{v_1}{R}\sin\alpha + v_0\cos\varphi\right).$$

Acceleraţia relativă este nulă

$$\bar{a}_r = 0,$$

deoarece viteza relativă este constantă ($\bar{v}_r = \bar{v}_0$).

Acceleraţia de transport este

$$\bar{a}_t = -|\overline{IM}|\frac{v_1}{R^2}(+\sin\alpha\cdot\bar{i}_1\cos\alpha\cdot\bar{j}_1),$$

iar acceleraţia Coriolis

$$\bar{a}_c = -2\omega_0\bar{k}\times\bar{v}_r = +2\frac{v_0 v_1}{R}\bar{k}_1\times(+\sin\varphi\cdot\bar{i}_1 + \cos\varphi\cdot\bar{j}_1) =$$

$$= +\frac{2v_0 v_1}{R}\sin\varphi\cdot\bar{j}_1 - \frac{2v_0 v_1}{R}\cos\varphi\cdot\bar{i}_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă pentru accelerația absolută expresia

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_c = -\frac{v_1^2}{R^2}\left(|\overline{IM}|\sin\varphi + \frac{2v_0R}{v_1}\cos\varphi\right)\bar{i}_1 -$$

$$-\frac{v_1^2}{R^2}\left(|\overline{IM}|\cos\varphi - \frac{2v_0R}{v_1}\sin\varphi\right)\bar{j}_1.$$

9.16. Pe axa Oy_1 a unui sistem cartezian de coordonate $O_1x_1y_1z_1$ se mișcă centrul C al unui cerc perpendicular pe axă cu viteza constantă $\bar{v}_0$. O rază a cercului $\overline{CM}$ se rotește în jurul lui C cu viteza unghiulară constantă ω_0 (fig. 9.16). Să se studieze mișcarea punctului M, știind că atunci cînd C este în O, raza $\overline{CM}$ este verticală.

Rezolvare. Punctul M de pe periferia discului este antrenat într-o mișcare de transport — o translație de viteză constantă $\bar{v}_0$ și are o mișcare relativă circulară de viteză unghiulară — $\omega_0\bar{j}_1$. Viteza de transport este deci

$$\bar{v}_t = v_0\bar{j}_1.$$

Viteza relativă este

$$\bar{v}_r = -R\omega_0(+\cos\omega_0 t\cdot\bar{i}_1 + \sin\omega_0 t\cdot\bar{k}_1).$$

Viteza absolută va fi

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -R\omega_0\cos\omega_0 t\cdot\bar{i}_1 + v_0\bar{j}_1 - R\omega_0\sin\omega_0 t\bar{k}_1$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{R^2\omega_0^2 + v_0^2}.$$

Mișcarea de transport fiind o translație uniformă, $\bar{v}_t = \bar{v}_0$, atît accelerația de transport cît și accelerația complimentară sînt nule.

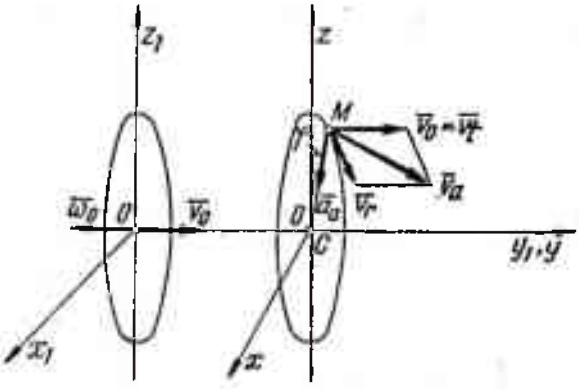


Fig. 9.16

$$\bar{a}_t = 0, \quad \bar{a}_c = 0.$$

Accelerația relativă este egală cu accelerația absolută și are expresia

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r = R\omega_0^2(\sin\omega_0 t\cdot\bar{i}_1 -$$

$$-\cos\omega_0 t\cdot\bar{k}_1), \qquad |\bar{a}_a| = R\omega_0^2.$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei se obțin din integrarea componentelor vitezei absolute și au forma

$$x_1 = -R\sin\omega_0 t, \quad y_1 = v_0 t, \quad z_1 = R\cos\omega_0 t,$$

deci traiectoria este o elice.

9.17. O bară rectilinie O_1A, de lungime p, se rotește în jurul punctului O_1 în planul $x_1O_1y_1$ cu viteza unghiulară constantă ω_0. O bară AB de

lungime q este articulată la O_1A în A şi se mişcă în acelaşi plan, cu viteza unghiulară constantă ω_1, în jurul lui A (fig. 9.17, *a*). Să se studieze mişcarea absolută a punctului B.

Rezolvare. Mişcarea punctului B se compune dintr-o mişcare de transport — o rotaţie cu viteza unghiulară ω_0 şi o mişcare relativă circulară cu viteza unghiulară ω_1.

Viteza relativă a punctului B este

$$\bar{v}_r = q\omega_1 (-\sin\beta \cdot \bar{i}_1 + \cos\beta \cdot \bar{j}_1).$$

Viteza de transport este

$$\bar{v}_t = |\overline{O_1B}|\, \omega_0 (-\sin\gamma \cdot \bar{i}_1 + \cos\gamma \cdot \bar{j}_1)$$

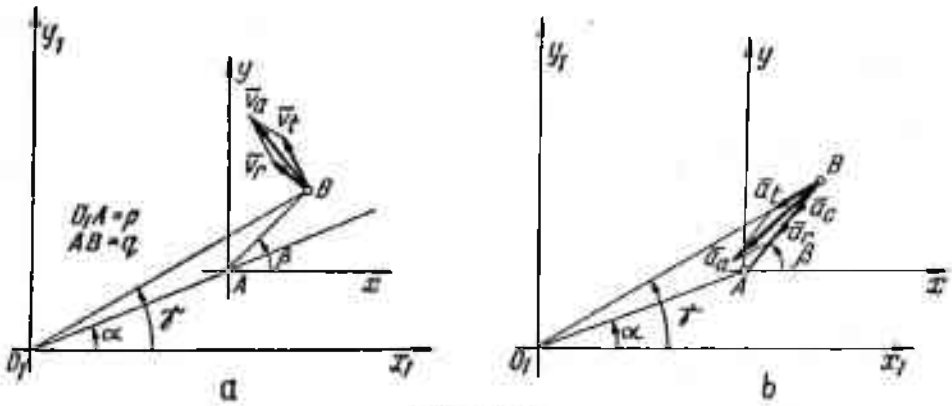


Fig. 9.17

unde

$$|\overline{O_1B}| = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos(\beta - \alpha)}, \qquad \alpha = \omega_0 t,$$

$$\beta = \omega_1 t \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{p\sin\alpha + q\sin\beta}{p\cos\alpha + q\cos\beta}.$$

Viteza absolută a punctului B este

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -\bar{i}_1(q\omega_1\sin\beta + |\overline{O_1B}|\,\omega_0\sin\gamma) +$$

$$+ \bar{j}_1(q\omega_1\cos\beta + |\overline{O_1B}|\,\omega_0\cos\gamma)$$

şi are mărimea

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{q^2\omega_1^2 + |\overline{O_1B}|^2\omega_0^2 + 2q\omega_0\omega_1\cos(\beta - \gamma)}$$

Acceleraţia relativă a punctului M este

$$\bar{a}_r = -q \cdot \omega_1^2(\cos\beta \cdot \bar{i}_1 + \sin\beta \cdot \bar{j}_1).$$

Acceleraţia de transport este

$$\bar{a}_t = -|\overline{O_1B}|\,\omega_0^2(+\cos\gamma \cdot \bar{i}_1 + \sin\gamma \cdot \bar{j}_1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Accelerația complementară este

$$\bar{a}_c = 2\omega_0\omega_1 q\bar{k}_1 \times (-\sin\beta \cdot \bar{i}_1 + \cos\beta \cdot \bar{j}_1) = -2\omega_0\omega_1 q \times$$
$$\times (\sin\beta \cdot \bar{j}_1 + \cos\beta \cdot \bar{i}_1)$$

Rezultă pentru accelerația absolută (fig. 9.17, *b*) expresia

$$\bar{a}_a = -\bar{i}_1(q\omega_1^2 \cos\beta + |\overline{O_1B}|\,\omega_0^2 \cos\gamma + 2\omega_0\omega_1\, q \cos\beta) -$$
$$- \bar{j}_1(q\omega_1^2 \sin\beta + |\overline{O_1B}|\,\omega_0^2 \sin\gamma + 2\omega_0\omega_1\, q \sin\beta)$$

și

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{\omega_0^4|\overline{O_1B}|^2 + \omega_1^4 q^2 + 4\omega_0\omega_1^2 q^2(\omega_0 + \omega_1) + 2q\omega_1\omega_0^2|\overline{O_1B}|\cos(\beta-\gamma)\cdot(\omega_1+2\omega_0)}.$$

Traiectoria absolută a punctului B se obține prin integrarea componentelor vitezei absolute și este dată de sistemul

$$x_1 = -\int (q\omega_1 \sin\omega_1 t + |\overline{O_1B}|\,\omega_0 \sin\gamma)\, dt.$$

$$y_1 = \int (q\omega_1 \cos\omega_1 t + |\overline{O_1B}|\,\omega_0 \cos\gamma)\, dt.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

9.18. Care este cea mai bună direcție de dat umbrelei, cînd cineva merge pe stradă în timp de ploaie?

R. a) pietonul stă pe loc: umbrela are direcția lui $\bar{v}$ (viteza de cădere a picăturilor de ploaie) (fig. 9.18, *a*);

b) dacă pietonul merge cu viteza $\bar{v}_0$; mînerul trebuie ținut în direcția vitezei relative $\bar{v}_r$ a picăturilor de apă în raport cu pietonul ($\bar{v}_r = \bar{v} - \bar{v}_0$), (fig. 9.18, *b*);

c) la întoarcerea pietonului, direcția se schimbă ($\bar{v}_r = \bar{v} + \bar{v}_0$) (fig. 9.18, *c*).

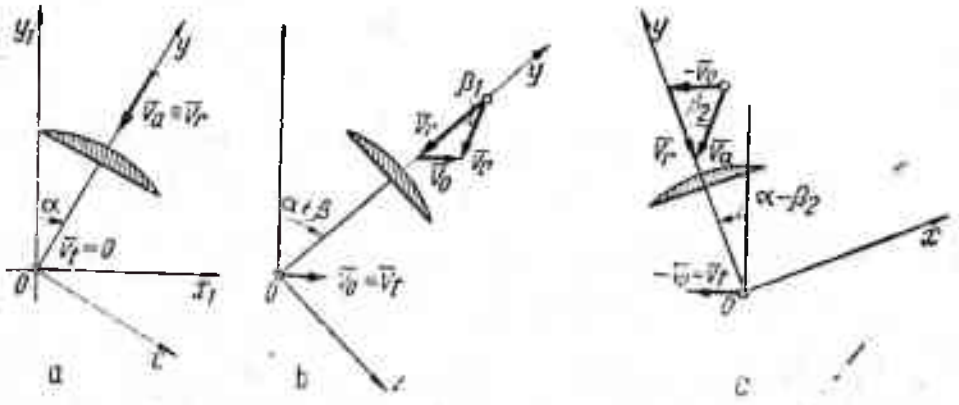


Fig. 9.18

9.19. Să se studieze mişcarea unui punct M pe o dreaptă Δ, paralelă cu axa Ox_1, dreapta Δ deplasîndu-se paralel cu ea însăşi (fig. 9.19). Să se exprime viteza şi acceleraţia punctului. Caz particular: mişcarea uniformă. În acest din urmă caz să se exprime traiectoria punctului M.

R. $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$, $\bar{a}_a = \dot{\bar{v}}_r + \dot{\bar{v}}_t$.

În cazul particular al mişcării uniforme $\bar{v}_a =$ constant, traiectoria absolută e dreapta $y = \frac{v_t}{v_r} x + y_0$.

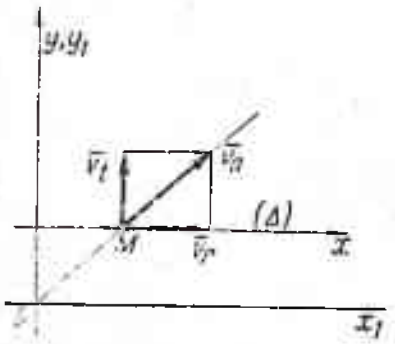


Fig. 9.19

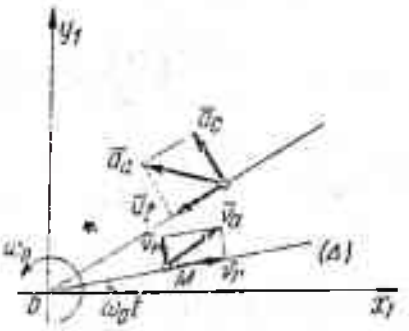


Fig. 9.20

9.20. Un punct M descrie dreapta Δ cu viteza constantă $\bar{c}$; în acelaşi timp dreapta Δ se roteşte în planul său în jurul capătului său O cu viteza unghiulară constantă ω_0 (fig. 9.20). Se cer: traiectoria punctului M, viteza şi acceleraţia punctului într-o poziţie oarecare, raza de curbură a traiectoriei.

R. Traiectoria punctului este spirala lui Arhimede: $r = \frac{c}{\omega_0}\theta$.

Viteza absolută:

$$\bar{v}_a = (c \cos \omega_0 t - r\omega \sin \omega_0 t)\, \bar{i}_1 + (c \sin \omega_0 t + r\omega_0 \cos \omega_0 t)\, \bar{j}_1;$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{c^2 + r^2\omega_0^2}.$$

Acceleraţia absolută:

$$\bar{a}_a = -(r\omega_0^2 \cos \omega_0 t + 2\omega_0 c \sin \omega_0 t)\, \bar{i}_1 +$$

$$+ (-r\omega_0^2 \sin \omega_0 t + 2\omega_0 c \cos \omega_0 t)\, \bar{j}_1, \quad |\bar{a}_a| = \omega \sqrt{4c^2 + r^2\omega^2}.$$

Raza de curbură a traiectoriei

$$\rho = \frac{(c^2 + r^2\omega_0^2)^{3/2}}{[4c^2\omega_0^2(c^2 + \omega_0^2 r^2) + r^2\omega_0^6]^{1/2}}.$$

9.21. Un dreptunghi $ABCO_1$ are o rotaţie uniformă cu viteza unghiulară ω_0 în jurul laturii celei mari $AO_1 = c$. Un mobil M se mişcă pe diagonala AC cu viteza uniform variată $v = pt$ (fig. 9.21, *a*). Se cere să se

găsească viteza și accelerația absolută a mobilului într-un punct oarecare M și în punctul C, știind că $AB = b$.

Aplicație numerică:

$$c = 3 \text{ m}, \ b = 4 \text{ m}, \ n = 10 \text{ rot/min}, \ p = \frac{10}{9} \text{ m/s}^2.$$

R. $$\bar{v}_a = pt \sin\alpha \left(\cos\omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2} \sin\omega_0 t\right) \bar{i}_1 + pt \sin\alpha \left(\sin\omega_0 t + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_0 t}{2} \cos\omega_0 t\right) \bar{j}_1 - pt \cos\alpha \cdot \bar{k}_1$$

$$|\bar{v}_a| = pt \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 t^2}{4} \sin^2\alpha}$$

$$\bar{a}_a = p \sin\alpha \left\{ \bar{i}_1 \left[\cos\omega_0 t \left(1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2}\right) - 2\omega_0 t \sin\omega_0 t\right] + \right.$$

$$\left. + \bar{j}_1 \left[\sin\omega_0 t \left(1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2}\right) - 2\omega_0 t \cos\omega_0 t\right]\right\} - p \cos\alpha \cdot \bar{k}_1$$

$$|\bar{a}_a| = p \sqrt{1 - \sin^2\alpha \left(3\omega_0^2 t^2 + \frac{\omega_0^4 t^4}{4}\right)}, \quad \text{(fig. 9.21, } b\text{)}.$$

Timpul necesar pentru a ajunge în C: $t = 3$ s.

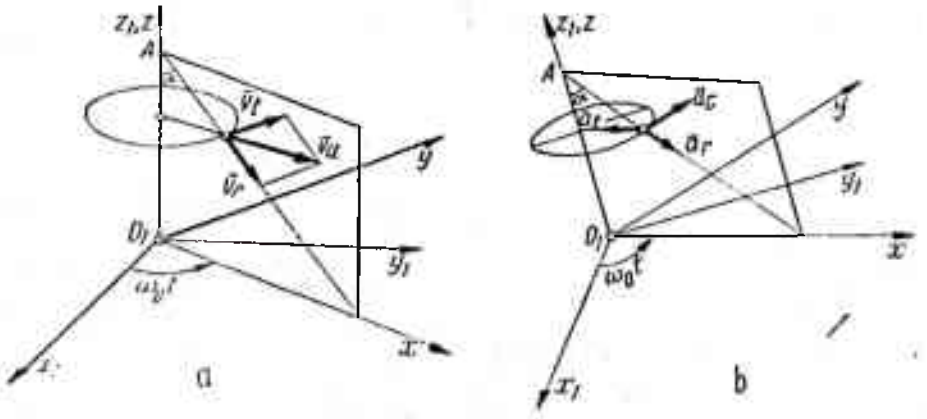


Fig. 9.21

9.22. Un punct descrie cu o mișcare uniformă, cu viteza unghiulară ω_0, periferia unui cerc de rază r; în același timp centrul cercului descrie o dreaptă perpendiculară pe planul cercului, cu viteza constantă $\bar{u}$ (fig. 9.22).

Se cere să se studieze mişcarea şi traiectoria mobilului şi să se determine raza de curbură a traiectoriei.

R. Traiectoria este elicea de ecuaţii parametrice

$$x = R\cos\omega_0 t, \qquad y = R\sin\omega_0 t, \qquad z = ut.$$

Viteza absolută a unui punct:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{u^2 + R^2\omega_0^2}.$$

Acceleraţia absolută:

$$\bar{a} = R\omega_0^2\bar{v}.$$

Raza de curbură a traiectoriei:

$$\rho = \frac{u^2 + R^2\omega_0^2}{R\omega_0^2}.$$

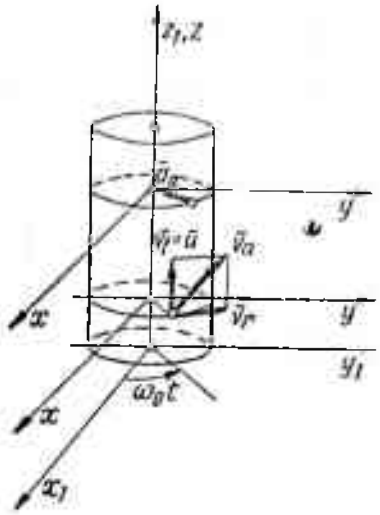


Fig. 9.22

9.23. Să se studieze mişcarea absolută a unui punct situat la latitudinea ţării noastre, care se deplasează cu $v_0 = 100$ km/h pe meridian, de la S la N (aproximativ 45°), ţinînd seama de mişcările de rotaţie şi de revoluţie ale Pămîntului (fig. 9.23). Raza Pămîntului se va lua de circa 6400 km, iar orbita în jurul Soarelui se va considera un cerc cu raza egală aproximativ cu 30 raze pămînteşti. Să se analizeze influenţa mişcării de rotaţie şi de revoluţie ale Pămîntului asupra unei locomotive care merge de-a lungul meridianului cu viteza de 100 km/h.

R. Viteza absolută

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_{t_0} + \bar{v}_{t_1} = r\dot{\theta}\bar{\tau} + r\cos\theta\cdot\dot{\varphi}\cdot\bar{\tau}_0 + |\overline{O_1M}|\,\dot{\alpha}\bar{\tau}_1.$$

Acceleraţia absolută

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = r\dot{\theta}^2\bar{\nu} + r\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2\bar{\nu}_0 + |\overline{O_1M}|\,\dot{\alpha}^2\bar{\nu}_1 + 2(\dot{\alpha}+\dot{\varphi})\bar{k}_1 \times r\dot{\theta}\bar{\tau}.$$

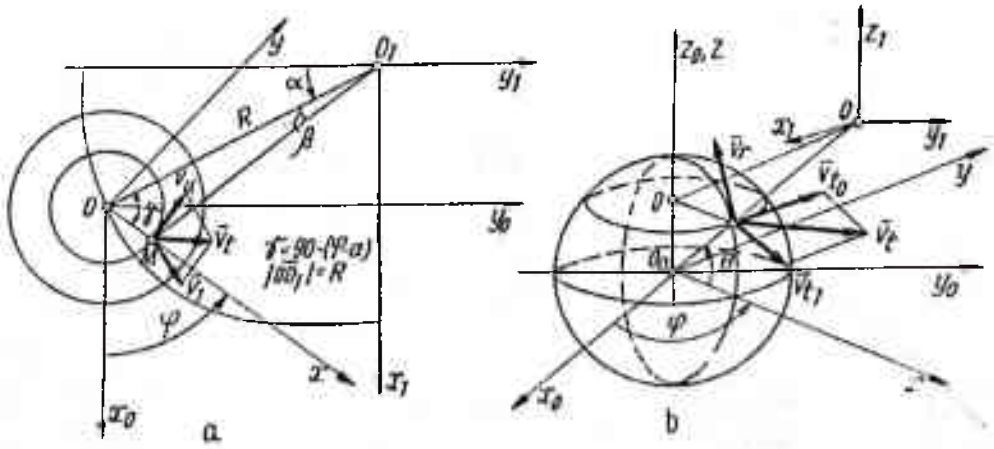


Fig. 9.23

S-a notat:

$$\bar{\tau} = -\sin\theta \cdot \bar{i} + \cos\theta \cdot \bar{k} = -\sin\theta\,(\cos\varphi \cdot \bar{i}_1 + \sin\varphi \cdot \bar{j}_1) + \cos\theta \cdot \bar{k}_1$$

$$\bar{\tau}_0 = -\sin\varphi \cdot \bar{i}_1 + \cos\varphi \cdot \bar{j}_1$$

$$\bar{\tau}_1 = \cos(\alpha + \beta) \cdot \bar{i}_1 + \sin(\alpha + \beta) \cdot \bar{j}_1$$

$$\bar{\nu} = -(\cos\theta\cos\varphi \cdot \bar{i}_1 + \cos\theta\sin\varphi \cdot \bar{j}_1 + \sin\theta \cdot \bar{k}_1)$$

$$\bar{\nu}_0 = -(\cos\theta\cos\varphi \cdot \bar{i}_1 + \cos\theta\sin\varphi \cdot \bar{j}_1)$$

$$\bar{\nu}_1 = -\sin(\alpha + \beta) \cdot \bar{i}_1 + \cos(\alpha + \beta) \cdot \bar{j}_1$$

$$\theta = \omega t = \frac{100\,000}{3\,600\,r}\,t = \frac{250}{9}\,t$$

$$\varphi = \omega_0 t = \frac{2\pi t}{24 \cdot 3\,600} = \frac{\pi t}{43\,200}$$

$$\alpha = \omega_1 t = \frac{2\pi t}{365 \cdot 24 \cdot 3\,600} = \frac{\omega_0}{365}\,t$$

$$|\overline{O_1M}| = \sqrt{R^2 + r^2\cos^2\theta + 2Rr\cos\theta\sin(\varphi - \alpha)}$$

unde r este raza Pămîntului, iar R raza cercului de revoluție.

9.24. Să se studieze mișcarea unui punct M, pe o dreaptă $\overline{OM}$ care se rotește în planul x_0Oz_0 în jurul punctului O, cu viteza unghiulară ω_1, iar planul x_0Oz_0 se rotește în jurul axei Oz cu viteza unghiulară ω_0 (fig. 9.24).

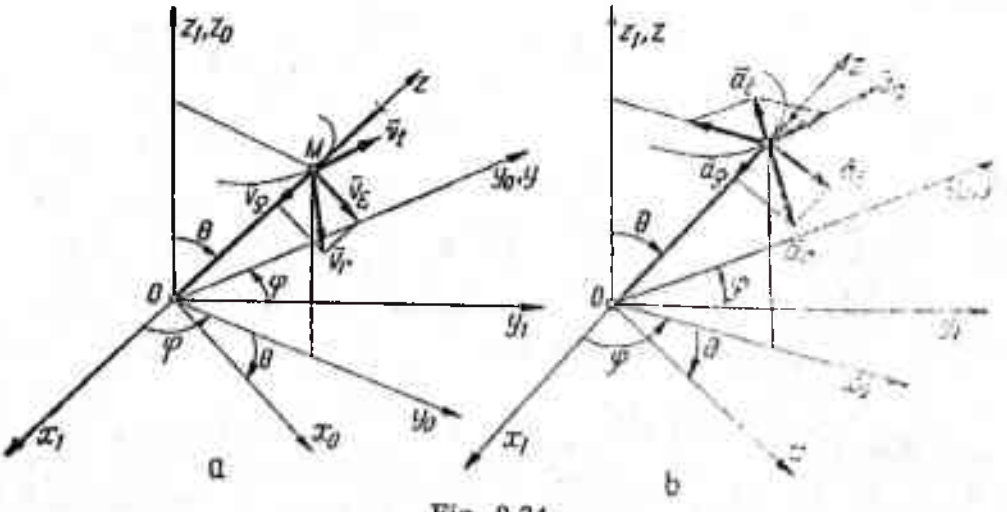


Fig. 9.24

R. $\bar{v}_r = r\dot{\theta}\bar{\varepsilon} + \dot{r}\bar{\rho}$, $\bar{v}_t = r\sin\theta\cdot\dot{\varphi}\bar{\tau}$

$$\bar{v}_a = r\dot{\theta}\bar{\varepsilon} + r\sin\theta\cdot\dot{\varphi}\bar{\tau} + \dot{r}\bar{\rho}$$

$$\bar{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{\rho} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\bar{\varepsilon}$$

$$\bar{a}_t = -r\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2\bar{\rho} + r\sin\theta\cdot\ddot{\varphi}\bar{\tau}$$

$$\bar{a}_c = 2\dot{\varphi}\bar{k}\times[r\dot{\theta}\bar{\varepsilon} + \dot{r}\bar{\rho}] = 2\dot{\varphi}\,[r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\sin\theta]\,\bar{\tau}$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{i} = \cos\theta\cdot\bar{i}_0 - \sin\theta\cdot\bar{k}_0 = \cos\theta(\cos\varphi\cdot\bar{i}_1 + \sin\varphi\cdot\bar{j}_1) - \sin\theta\cdot\bar{k}_1$$

$$\bar{\tau} = \bar{j} = +\bar{j}_0 = -\sin\varphi\cdot\bar{i}_1 + \cos\varphi\cdot\bar{j}_1$$

$$\bar{\rho} = \sin\theta\cos\varphi\cdot\bar{i}_1 + \sin\theta\sin\varphi\cdot\bar{j}_1 + \cos\theta\cdot\bar{k}_1.$$

X. APLICAŢII ALE CINEMATICII ÎN TEHNICĂ

Obiectul capitolului este determinarea caracteristicilor cinematice ale mişcărilor elementelor componente ale mecanismelor.

Vom studia îndeosebi următoarele mecanisme:

a) *Mecanismele plane*, cu unul, maximum două grade de mobilitate. La studiul cinematic al acestor mecanisme interesează, în general, determinarea traiectoriilor, vitezelor şi acceleraţiilor diferitelor puncte. Pentru aceste determinări se folosesc metode analitice, grafice sau grafo-analitice.

b) *Mecanisme cu roţi*. Interesează poziţia axelor de rotaţie şi vitezele unghiulare. Axele elementelor pot fi coliniare, paralele, concurente sau oarecare. Transmiterea mişcării se poate face prin cuplaje, roţi de fricţiune, roţi dinţate, elemente flexibile — cabluri, curele, lanţuri.

c) *Mecanisme cu camă*. Servesc pentru transformarea mişcărilor.

Rezolvarea diferitelor probleme referitoare la mecanisme, se face aplicînd rezultatele teoretice găsite la capitolele de cinematica punctului şi mai ales cinematica solidului.

Probleme rezolvate

10.1. Să se studieze distribuţia vitezelor de pe mecanismul din fig. 10.1, *a*, în poziţia indicată. Se dau: $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{CD}| = 2a$, $|\overline{OA}| = a$ şi viteza unghiulară ω_0 a barei OA, în mişcarea sa de rotaţie în jurul lui O.

Rezolvare. Determinarea vitezelor punctelor mecanismului se va face aplicînd metodele: rabaterea vitezelor, proiecțiile vitezelor și poligonul vitezelor.

Metoda rabaterii vitezelor. Centrele de rotație (absolute și relative) sînt indicate în figura 10.1, *a* și au fost determinate folosind și teoremele de coliniaritate, după cum urmează.

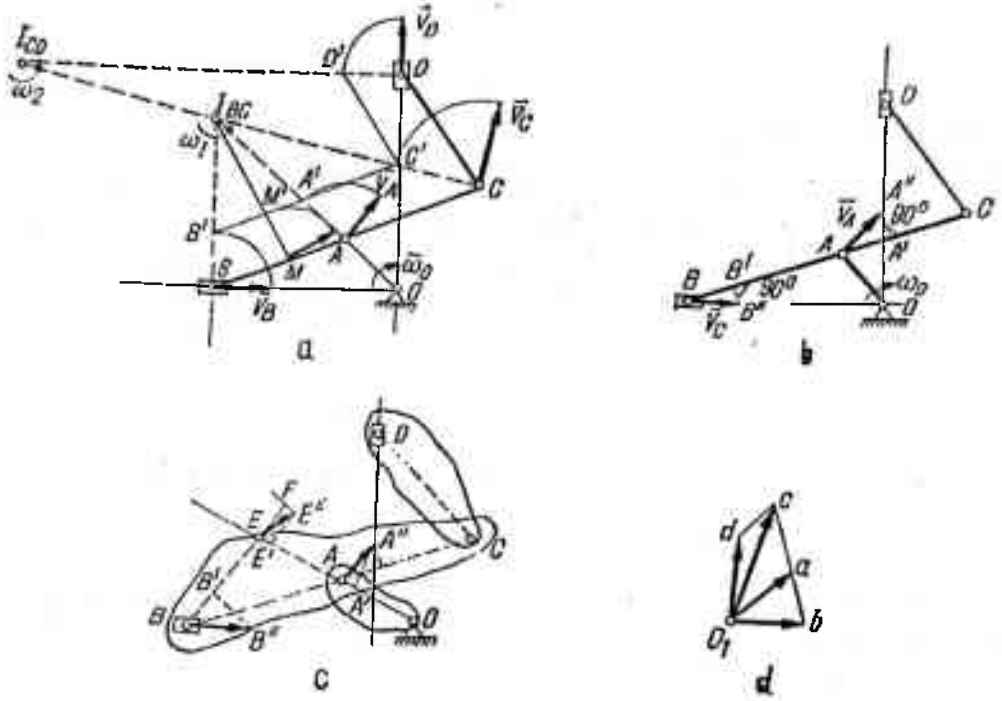


Fig. 10.1

Suportul vitezei $\bar{v}_B$ (orizontal) și viteza punctului A, $\bar{v}_A = |\overline{OA}| \cdot \omega \bar{\tau}_0$ (perpendiculară pe $\overline{OA}$) fiind cunoscute, centrul instantaneu absolut al barei BC (I_{BC}) se găsește la intersecția verticalei ce trece prin B, cu prelungirea lui $\overline{OA}$. Viteza instantanee de rotație în jurul lui I_{BC} este

$$\omega_1 = \frac{v_A}{|\overline{I_{BC}A}|} = \omega_0 \frac{a}{|\overline{I_{BC}A}|}.$$

Centrul instantaneu absolut I_{CD} se găsește la intersecția dreaptei $I_{BC}C$ cu perpendiculara la suportul lui $\bar{v}_D$. Viteza de rotație în jurul lui I_{CD} se calculează din expresia

$$v_C = |\overline{I_{BC}C}|\,\omega_1 = |\overline{I_{CD}C}|\,\omega_2$$

și este

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{|\overline{I_{BC}C}|}{|\overline{I_{CD}C}|} = a\omega_0 \frac{|\overline{I_{BC}C}|}{|\overline{I_{BC}A}| \cdot |\overline{I_{CD}C}|}.$$

Cunoscînd poziția centrelor absolute de rotație și viteza $\bar{v}_A$, se rabate $\bar{v}_A$ pe dreapta $I_{BC}A$, obținînd punctul A', prin care se duce o paralelă la $\overline{BC}$. Viteza oricărui punct M al barei BC se determină rabatînd segmen-

tul MM_1, pe perpendiculara în M, la $I_{BC}M$ (fig. 10.1, *a*). Pentru vitezele punctelor de pe bara CD se procedează analog utilizînd centrul instantaneu I_{CD}.

Metoda proiecției vitezelor. În baza teoremei egalității proiecțiilor vitezelor punctelor unui solid care se găsesc pe o dreaptă din solid, pe acea dreaptă ($\bar{v}_A \cdot \overline{AB} = \bar{v}_B \cdot \overline{AB}$) rezultă construcția distribuției de viteze a mecanismului ca în figura 10.1, *b*. Cunoscînd $\overline{AA''} = \bar{v}_A$, se proiectează acest vector pe AB, obținînd segmentul AA' care va fi egal cu $\overline{BB'}$ și cu proiecția vitezei oricărui alt punct de pe dreapta AB pe această dreaptă. Ducînd normala pe AB în B' se obține pe orizontala lui B (suportul vitezei în B este cunoscut) punctul B'', extremitatea lui $\bar{v}_B$.

O b s e r v a ț i e. Dacă elementele componente ale mecanismului nu se reduc la axele lor, se poate calcula viteza unui punct E, necoliniar cu A și B, după cum urmează.

Se unesc punctele A, B cu punctul E, apoi se iau segmentele $EE' = AA'$ și $EF = BB'$ pe dreapta EA și respectiv EB. La intersecția normalelor în F și E' pe BE respectiv AE, se găsește punctul E'', extremitatea lui $\bar{v}_E$ (fig. 10.1, *c*).

Metoda poligonului vitezelor (fig. 10.1, *d*). Cunoscînd viteza punctului A, $\bar{v}_A$ și suportul vitezei punctului B, $\bar{v}_B$ (orizontal), se alege un pol arbitrar O_1 (fig. 10.1, *d*) din care se trasează vectorii: $\overline{O_1a} = \bar{v}_A$ și $\overline{O_1b}$ avînd direcția lui $\bar{v}_B$, astfel încît $\overline{ab} \perp \overline{AB}$. Vectorul $\overline{O_1b}$ este chiar $\bar{v}_B$. Viteza punctului $c(\bar{v}_C)$ se obține unind O_1 cu punctul c, simetricul lui b în raport cu a; punctul d (extremitatea lui $\bar{v}_D$) se găsește la intersecția verticalei dusă prin O_1 (suportul lui $\bar{v}_D$) cu o perpendiculară dusă prin c, pe direcția barei CD.

10.2. Să se studieze mișcarea mecanismului cu culisă rotativă din figura 10.2, constituit din culisa O_1B care se rotește cu viteza unghiulară ω_1 în jurul axei O_1, manivela O_2A care se rotește în jurul axei O_2 și al cărei buton A este articulat cu culisorul care alunecă în lungul culisei.

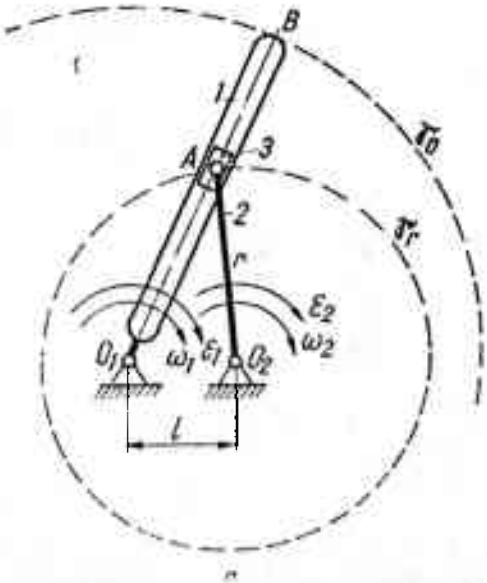


Fig. 10.2 a

R e z o l v a r e: Caracteristica structurală a acestui mecanism este $l < x$, l fiind distanța dintre centrele O_1, O_2, iar $r = O_2A$ lungimea manivelei. Se notează cele trei elemente mobile ale mecanismului (culisa, manivela și culisorul) cu numerele *1*, *2*, *3*.

În A se consideră suprapuse: punctul A_1 al culisei *1*, butonul A_2 al manivelei *2* și centrul A_3 al culisorului *3*, articulat cu butonul de manivelă A_2 și deci avînd aceeași viteză și accelerație ca și acesta.

Viteza punctului A_1 este $v_{A_1} = \omega_1 \cdot O_1A$, vectorul $\bar{v}_{A_1}$ fiind perpendicular pe axa culisei 1. Viteza butonului de manivelă A_2 se

deduce din relaţia lui Euler $\bar{v}_{A2} = \bar{v}_{A1} + \bar{v}_{A2(A1)}$ unde $v_{A2(A1)}$ este viteza relativă cu care alunecă butonul de manivelă A_2 (deci şi culisorul *3*) în lungul culisei *1*. În figura 10.2, *a* s-a construit poligonul vitezelor dat de ecuaţia vectorială de mai sus şi s-a determinat grafic (la scara *kv* a vitezelor) viteza $\bar{v}_{A2} = \bar{p}a_2'$ a butonului de manivelă A_2 şi viteza $\bar{V}_{A2(A1)}$, în mişcarea de translaţie, a culisorului *3* de-a lungul culisei *1*.

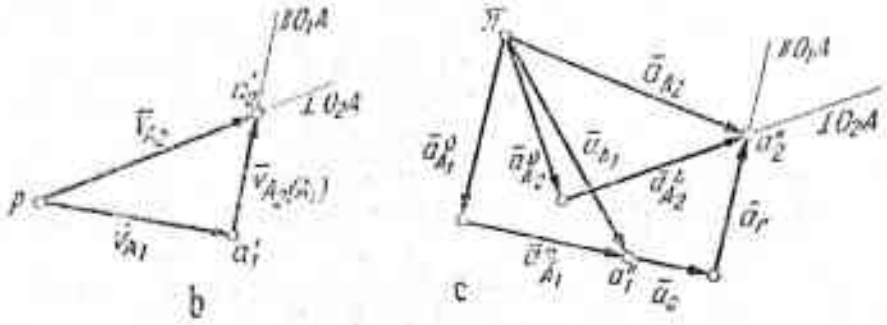


Fig. 10.2 b şi c

Deoarece $v_{A2} = \omega_2 \cdot O_2A$, rezultă $\omega_2 = \frac{v_{A2}}{O_2A}$, care este viteza unghiulară cu care se roteşte manivela O_2A.

Acceleraţia punctului A_1 al culisei *1* este (fig. 10.2, *c*)

$$\bar{a}_{A1} = \bar{a}^{\nu}_{A1} + \bar{a}^{\tau}_{A1}$$

şi are valoarea $\bar{a}_{A1} = O_1A\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}$; face cu direcţia culisei unghiul $\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{|\varepsilon_1|}{\omega^2}$.

Acceleraţia butonului de manivelă A_2 este dată de formula mişcărilor absolute:

$$\bar{a}_{A2} = \bar{a}_{A1} + \bar{a}^{\nu}_{A2(A1)} + \bar{a}^{\tau}_{A2(A1)}$$

unde:

$\bar{a}_{A2} = \bar{a}^{\nu}_{A2} + \bar{a}^{\tau}_{A2}$, acceleraţia normală $\bar{a}^{\nu}_{A2}$ avînd direcţia manivelei O_2A, sensul de la A către O_2 şi valoarea $a^{\nu}_{A2} = \omega_2^2 O_2A$, iar acceleraţia tangenţială $\bar{a}^{\tau}_{A2}$ avînd cunoscută numai direcţia, perpendiculară pe O_2A, acceleraţia $\bar{a}^{\nu}_{A2}$ notată simplu $\bar{a}_r$, este acceleraţia relativă cu care se deplasează culisorul *3* în translaţia lui în lungul culisei *1*; pentru $\bar{a}_r$ se cunoaşte numai direcţia. Acceleraţia $a^{C}_{A2(A1)}$, notată $\bar{a}_c$, este acceleraţia Coriolis; are expresia vectorială:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{A2(A1)}$$

şi direcţia perpendiculară pe culisă, sensul vitezei $\bar{v}_{A1}$ şi valoarea scalară $a_c = 2\omega_1 \cdot v_{A2(A1)}$.

Ecuația accelerațiilor capătă forma:

$$\bar{a}^{\nu}_{A2} + \bar{a}^{\tau}_{A2} = \bar{a}^{\nu}_{A1} + \bar{a}^{\tau}_{A2} + \bar{a}_r + \bar{a}_c$$

care este reprezentată grafic prin poligonul accelerațiilor (fig. 10.2, *b*). Din poligonul accelerațiilor rezultă vectorii $\bar{a}_{A2}$, $\bar{a}^{\tau}_{A2}$ și $\bar{a}_r$.

Scriind $a^{\tau}_{A2} = \varepsilon_2 \cdot O_2A$, rezultă accelerația unghiulară $\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_{A2}}{O_2A}$, al cărei sens este dat de $\bar{a}^{\tau}_{A2}$.

Manivela O_2A are o rotație accelerată, cu ω_2 și ε_2; culisorul are o translație accelerată cu $\bar{v}_{A2(A1)}$ și $\bar{a}_r$.

Mecanismul reprezintă schema cinematică a unor motoare de aviație.

10.3. Se consideră mecanismul din figura 10.3 constituit din culisa oscilantă OA (elementul *1*), al cărei culisor este articulat în M cu un buton solidar cu bara BC (elementul *2*), care are o mișcare de translație în lungul ghidajelor G_1, G_2. În timp ce culisa pendulează în jurul punctului ei fix O, bara BC are o mișcare rectilinie alternativă.

Să se determine viteza și accelerația punctului M:

a) considerat pe culisa OA (punctul M_1);

b) considerat pe bara BC (punctul M_2).

Rezolvare: a) Punctul M_1 se deplasează în lungul culisei OA. Distanța $OM = l_1$ este

$$l_1 = \frac{l}{\cos\theta}.$$

Avem:

$$v_1 = \frac{dl_1}{dt} = \omega l \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \omega l_1 \frac{\sqrt{l_1^2 - l^2}}{l}$$

$$a_1 = \omega^2 l \frac{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}$$

$$a_1 = \omega^2 l_1 \frac{2l_1^2 - l^2}{l^2}$$

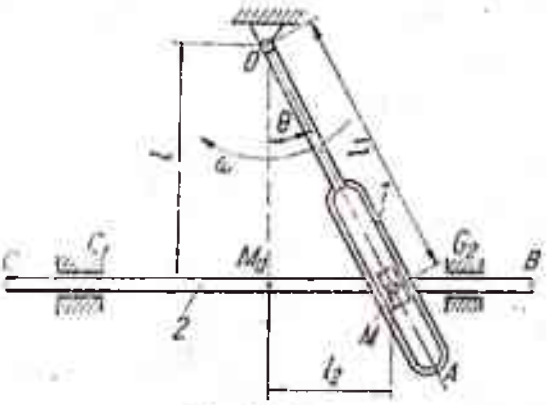


Fig. 10.3

b) $l_2 = l \operatorname{tg}\theta$

$$v_2 = \frac{dl_2}{dt} = \frac{l\omega}{\cos^2\theta} = l\omega\left(1 + \frac{l_2^2}{l^2}\right) \qquad a_2 = \omega^2 l_2 \frac{2(l_2^2 + l^2)}{l^2}.$$

10.4. Să se studieze mișcarea mecanismului bielă-manivelă (fig. 10.4) constituit din manivela OA care se rotește în jurul arborelui O cu viteza unghiulară ω, biela AB și culisorul C, deplasîndu-se în lungul ghidajului C.

Rezolvare: Se consideră ca poziție inițială a mecanismului bielă-manivelă, poziția OA_1B_1, cînd biela și manivela sînt în prelungire, punctul B al bielei fiind în punctul mort superior B_1 al cursei.

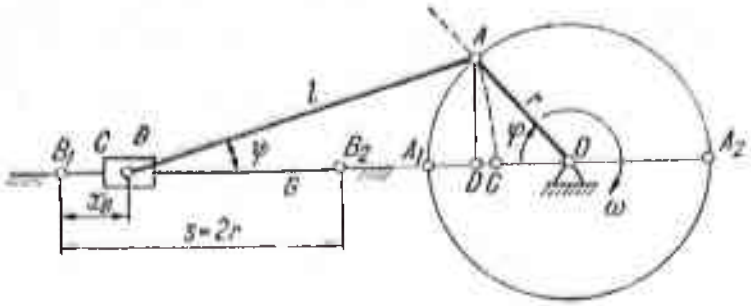


Fig. 10.4

Se consideră ca parametru variabil unghiul φ, pe care-l are la un moment dat manivela OA față de poziția ei inițială OA_1, punctul B fiind deplasat față de B_1 cu distanța $B_1B = x_B$.

Dacă se trasează un arc de cerc cu centrul în B și raza $AB = l$ se obține distanța $A_1C = x_B$; se duce AD perpendicular pe BO. Avem:

$$x_B = A_1D + DC = l(1 - \cos \Psi) + r(1 + \cos \varphi).$$

Se observă că $AD = l \sin \Psi = r \sin \varphi$, de unde

$$\sin \Psi = \frac{r}{l} \sin \varphi.$$

Raportul $\frac{r}{l} = \lambda$ reprezintă caracteristica structurală a mecanismului bielă-manivelă.

Avem:

$$x_B = \pm (1 - \cos \varphi) = l\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \varphi}{l}\right)^2}\right]$$

Scriind:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^4 \ldots$$

și, cu o eroare acceptabilă, oprindu-ne la al doilea termen, al dezvoltării, se obține:

$$x_B = r(1 - \cos \varphi) + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \varphi. \tag{1}$$

Viteza punctului B este $v_B = \dot{x}_B$ și se obține

$$v_B = r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{r^2}{2l} 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Deoarece $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, viteza unghiulară a manivelei OA devine

$$v_B = r \cdot \omega \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi\right). \tag{2}$$

Dar $r\omega = v_A$, viteza butonului de manivelă A, și deci

$$v_B = v_A \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi\right). \tag{3}$$

10.5. Să se studieze distribuția de viteze a mecanismului articulat din figura 10.5, *a*, cînd placa OAC se rotește în jurul punctului O cu viteza unghiulară ω_0.

Rezolvare. Distribuția de viteze pe mecanism se obține printr-una din metodele cunoscute după determinarea prealabilă a poziției centrelor instantanee de rotație. Ținînd seamă de faptul că placa OAC are o mișcare de rotație în jurul lui O, centrul instantaneu al barei AB se găsește la intersecția prelungirii barei OA cu perpendiculara pe OB (I_{AB}). De asemenea, centrul instantaneu al barei CD se găsește la intersecția barelor ED și OC, deoarece punctele C și D efectuează mișcări circulare în jurul punctelor E și O.

Viteza unghiulară ω_0 fiind cunoscută, se obțin vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 din observația că punctele C și D aparțin respectiv atît barelor OC și CD, cît și barelor CD și DE.

Viteza punctului C este

$$v_C = 2a\omega_0 = |\overline{I_{CD}C}|\,\omega_1$$

de unde

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{2a}{|\overline{I_{CD}C}|}.$$

Viteza punctului D este

$$v_D = \omega_1 |\overline{I_{CD}D}| = r\omega_2.$$

Rezultă viteza unghiulară de rotație

$$\omega_2 = \frac{2a}{r} \frac{|\overline{I_{CD}D}|}{|\overline{I_{CD}C}|} \omega_0.$$

Din expresia vitezei punctului A

$$v_A = c\omega_0 = |\overline{I_{AB}A}|\,\omega_3$$

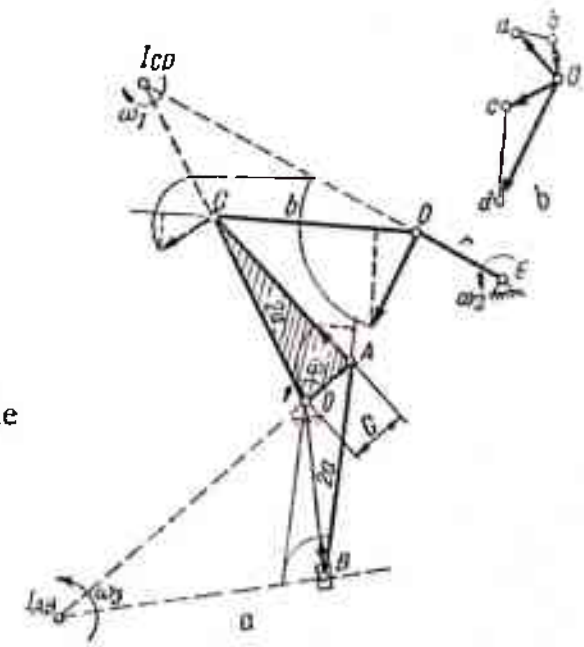


Fig. 10.5

obţinem viteza unghiulară de rotaţie în jurul centrului instantaneu I_{AB}.

$$\omega_3 = \omega_6 \frac{c}{|\overline{I_{AB}A}|}.$$

Metoda proiecţiei vitezelor. Cunoscînd vitezele în A şi C, se determină vitezele în B şi respectiv D, conform celor arătate la problema 10.1.

Metoda poligonului vitezelor. Se cunosc $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_C$, cu care se începe poligonul.

Se obţine b la intersecţia verticalei prin O_1 (direcţia lui $\bar{v}_B$) cu direcţia perpendicularei pe AB. Analog pentru viteza punctului D.

10.6. Să se studieze distribuţia vitezelor mecanismului din fig. 10.6, *a* cînd se cunoaşte ω_2 — viteza unghiulară de rotaţie a barei OD în jurul punctului O.

Rezolvare. Se determină poziţia centrelor instantanee de rotaţie absolute I_1, I_3 şi a centrelor de rotaţie relative I_{12}, I_{13}, I_{23}, precum şi vitezele unghiulare de rotaţie ω_1 şi ω_3 utilizînd expresia vitezelor punctelor D şi C.

$$v_D = a\omega_2 = |\overline{I_1D}|\,\omega_1$$

Rezultă pentru ω_1 valoarea

$$\omega_1 = \frac{a}{|\overline{I_1D}|}\,\omega_2.$$

Viteza punctului C este

$$v_C = |\overline{I_1C}|\,\omega_1 = |\overline{I_3C}|\,\omega_3$$

de unde se deduce

$$\omega_3 = \frac{|\overline{I_1C}|}{|\overline{I_3C}|}\,\omega_1 = \frac{a\,|\overline{I_1C}|}{|\overline{I_1D}|\,|\overline{I_3C}|}\,\omega_2.$$

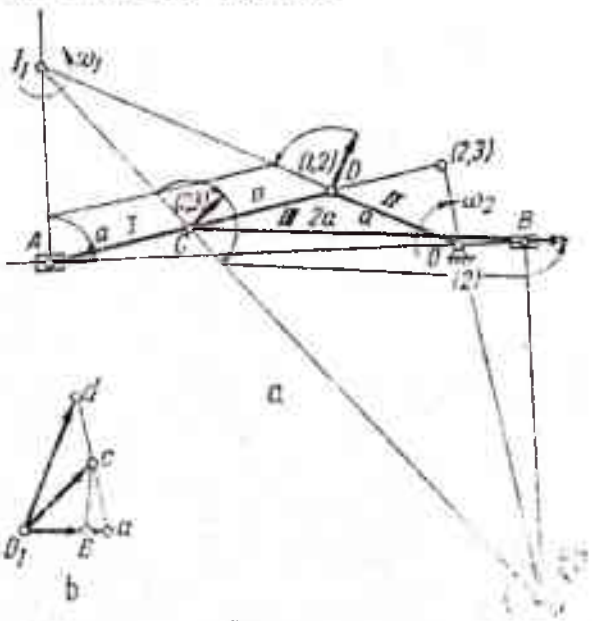


Fig. 10.6

Distribuţia de viteze se obţine printr-una din metodele cunoscute — rabatere sau proiecţii — şi este reprezentată în fig. 10.6, *a* şi *b*.

Metoda poligonului vitezelor. Se trasează $\overline{Od}$ echipolent cu $\bar{v}_D$, apoi se trasează prin d o perpendiculară pe $\overline{AD}$, a cărei intersecţie cu paralela prin O la $\overline{O_1A}$ este vîrful lui $\bar{v}_A$. La jumătatea lui ad se va găsi c, extremitatea lui $\bar{v}_c$. Perpendiculara pe $\overline{CB}$ dusă prin c, determină punctul b, extremitatea lui $\bar{v}_B$.

10.7. Se consideră grinda cu zăbrele static determinată, căreia i se suprimă o bară (fig. 10.7, *a* și *b*). Să se trasceze diagramele vitezelor pentru mecanismele rezultate și să se calculeze analitic vitezele unghiulare în jurul centrelor de rotație (fixe și instantanee), precum și viteza centrului relativ I_{12}, pentru fiecare din cele două cazuri.

Rezolvare. a) *Calculul coordonatelor centrului instantaneu absolut* I_1. Din asemănarea triunghiurilor AI_1B și $CI_{12}B$ rezultă

$$\frac{y_1}{2a} = \frac{6a}{3a}$$

din care

$$y_1 = 4a, \quad x_1 = 0,$$

Calculul vitezei unghiulare instantanee ω_2. Scriind că deplasarea în I_{12} este aceeași pe cele două corpuri, rezultă

$$3a\omega_1 = -3a\omega_2, \quad \omega_2 = -\omega_1.$$

Admițînd $\omega_1 = 1$ rad/s rezultă că proiecția vitezei centrului relativ I_{12} pe verticală este:

$$v_{V_{12}} = 3a\omega_1 = 3a \text{ m/s}.$$

relație care folosește drept scară a vitezelor.

Proiecția vitezei centrului I_{12} pe orizontală este

$$v_{H_{12}} = 2a\omega_1 = 2a \text{ m/s}.$$

Viteza totală a centrului relativ I_{12} este

$$v_{12} = \sqrt{v^2_{V(12)} + v^2_{H(12)}} = a\sqrt{9+4} = a\sqrt{13} \text{ m/s}.$$

b) *Calculul coordonatelor centrelor instantanee absolute* (2) și (3). Centrul instantaneu I_2 se găsește la intersecția dreptelor I_1I_{12} cu o paralelă prin I_4 la diagonala $I_{12}I_{24}$

$$y = mx = \frac{2}{3}x, \quad x + y = 6a.$$

Soluția sistemului sînt coordonatele

$$x_2 = \frac{18}{5}a, \quad y_2 = \frac{12}{5}a.$$

Centrul instantaneu I_3 se găsește la intersecția dreptei $I_{23}I_2$ cu paralela la axa Oy dusă prin I_4. Sistemul de ecuații este

$$\frac{y - 2a}{\frac{12}{5}a - 2a} = \frac{x - 5a}{\frac{18}{5}a - 5a}, \quad x = 6a$$

Scanned with OKEN Scanner

şi admite ca soluţii

$$x_3 = 6a, \quad y_3 = \frac{12}{7}a.$$

Calcul vitezelor unghiulare instantanee.

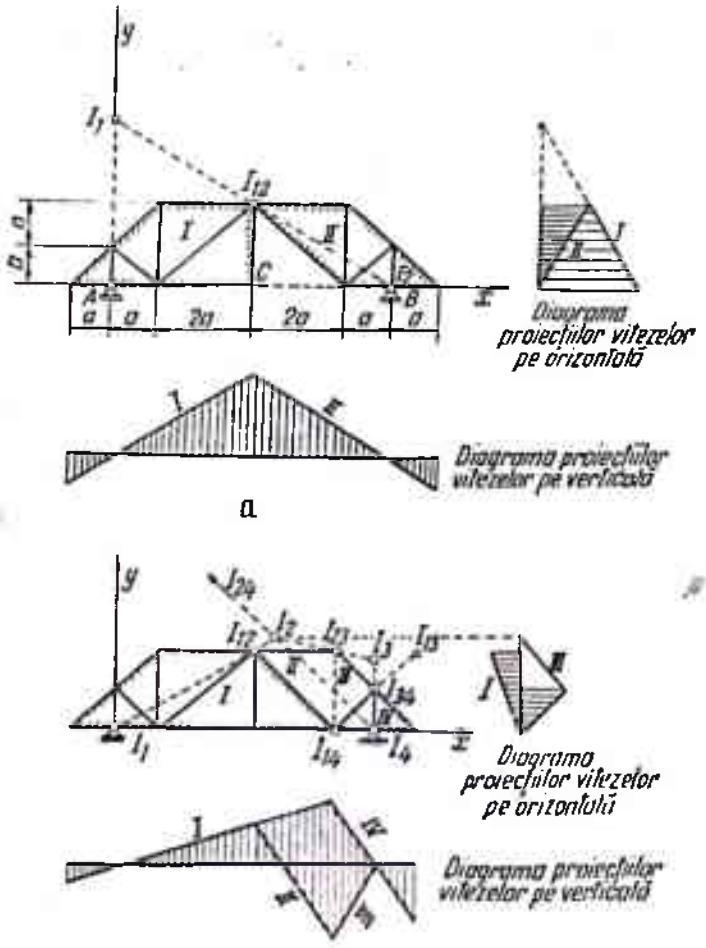


Fig. 10.7

Admitem $\omega_1 = 1$ rad/s. Vitezele diferitelor centre instantanee relative permit determinarea celorlalte viteze unghiulare necunoscute. Astfel

$$v_y I_{12} = 3a\omega_1 = (x_2 - 3a)\,\omega_2$$
$$\omega_2 = 5\omega_1 = 5 \text{ rad/s};$$
$$v_x I_{23} = (y_2 - 2a)\,\omega_2 = (2a - y_3)\,\omega_3$$
$$\omega_3 = 7\omega_1 = 7 \text{ rad/s};$$
$$v_y I_{14} = 5a\omega_1 = a\omega_4$$
$$\omega_4 = 5\omega_1 = 5 \text{ rad/s}.$$

Concluzia analitică $\omega_4 = \omega_2$ rezultă din faptul că $I_{24} \to \infty$. Scara vitezelor se obţine din relaţia

$$v_{y(12)} = (3a) \text{ m/s}.$$

10.8. Se consideră grinda cu zăbrele static determinată (fig. 10.8, *a* şi *b*) căreia i se suprimă o bară. Să se traseze diagramele vitezelor pentru mecanismele rezultate şi să se calculeze analitic vitezele unghiulare ale centrelor instantanee de rotaţie precum şi viteza centrului relativ I_{12} pentru fiecare din cele două cazuri.

a) *Calculul coordonatelor centrelor instantanee absolute* I_2 şi I_4.

Centrul instantaneu I_2 se găseşte la intersecţia dreptelor I_1I_{12} şi I_3I_{23} ale căror ecuaţii sînt

$$y = mx = 3x, \quad \frac{y}{3a} = \frac{x - 6a}{2a - 6a}.$$

Soluţia sistemului dă pentru coordonatele centrului I_2 valorile

$$x_2 = \frac{6a}{5}, \; y_2 = \frac{18a}{5}.$$

Centrul instantaneu I_4 se găseşte la intersecţia dreptelor I_1I_{14} şi I_3I_{34}. Coordonata x_4 fiind aceeaşi cu x_2, deoarece $I_{24} \to \infty$, sistemul devine

$$x_4 = x_2 = \frac{6a}{5}, \quad \frac{x}{6a} + \frac{y}{3a} = 1.$$

Soluţia lui este

$$x_4 = \frac{6a}{5}, \quad y_4 = \frac{12a}{5}.$$

Calculul vitezelor unghiulare instatanee.

Admitem $\omega_1 = 1$ rad/s. Din figură rezultă

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_5.$$

Proiecţia pe axa Oy a vitezei punctului I_{12} se poate calcula atît din rotaţia corpului II în jurul lui I_2 cît şi din rotaţia corpului I în jurul lui I_1. Există deci relaţia

$$v_{y(12)} = a\omega_1 = (x_2 - a)\omega_2.$$

Rezultă

$$\omega_2 = \omega_4 = 5\omega_1.$$

Scara vitezelor se obţine din relaţia

$$v_{y(12)} = (a) \text{ m/s}.$$

Viteza totală a punctului I_{12} este

$$|v_{(12)}| = \sqrt{v^2_{y(12)} + v^2_{x(12)}} = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10} \text{ m/s}$$

unde

$$v_{x(12)} = 3a\omega_1 = 3\,a.$$

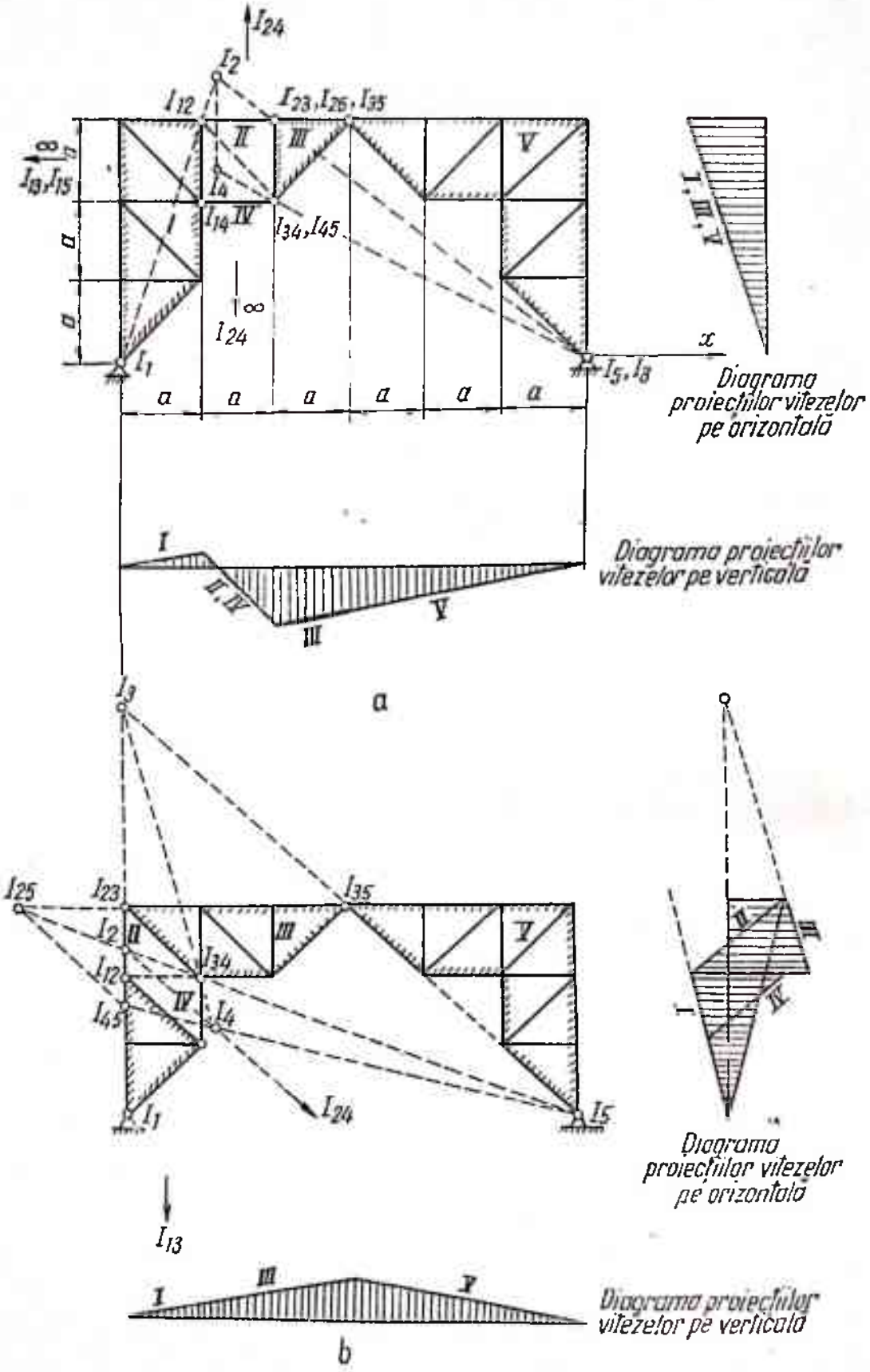


Diagrama proiectiilor vitezelor pe orizontala
Diagrama proiectiilor vitezelor pe verticala
a
Diagrama proiectiilor vitezelor pe orizontala
Diagrama proiectiilor vitezelor pe verticala
b

Fig. 10.8

b) *Calculul coordonatelor centrelor instantanee* I_2, I_3, I_4.

Există evident următoarele valori ale coordonatelor centrelor instantanee căutate

$$x_3 = 0, \; y_3 = x_5 = 6a.$$

Dreptele care unesc centrele instantanee I_3 și I_{34}, respectiv I_1 și I_{14}, au ecuațiile

$$\frac{x}{\frac{3a}{2}} + \frac{y}{6a} = 1, \qquad x = y.$$

Rezultă

$$x_4 = y_4 = \frac{6a}{5}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 2x_4 = \frac{12a}{5}.$$

Calculul vitezelor unghiulare. Din diagramele proiecțiilor pe verticală a distribuției de viteze, rezultă

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_5.$$

Din diagrama proiecției pe orizontală a vitezelor rezultă

$$\omega_1 y_4 = \omega_4 (y_4 - d)$$

de unde

$$\omega_2 = \omega_4 = \frac{y_4}{y_4 - a}\,\omega_1 = 6\omega_1.$$

Viteza centrului instantaneu I_{12} este

$$v_{I_{12}} = v_{HI_{12}} = 2a\omega_1.$$

Admițînd $\omega_1 = 1$ rad/s rezultă pentru scara vitezelor

$$v_{I_{12}} = 2a \text{ m/s}.$$

10.9. Să se calculeze transmisia prin roțile dințate din figura 10.9 numărul de dinți corespunzători roții r_i fiind Z_i, iar numărul de turații n_i.

Rezolvare. Transmisia se poate face numai dacă în punctele de contact, vitezele roților tangente sînt egale. Lățimile dinților fiind aceleași (d) există relația

$$2\pi r_i = Z_i d$$

de unde

$$r_i = \frac{d}{2\pi} Z_i = kZ_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza periferică a unui punct de pe o roată oarecare este

$$v_i = \frac{2\pi n_i}{60} r_i = \frac{d}{6a} n_i Z_i = k_1 n_i Z_i.$$

Condițiile de contact devin acum

$$n_1 Z_1 = n_2 Z_2, \quad n_2 Z_3 = n_4 Z_4, \quad n_4 Z_5 = n_6 Z_6$$

Deducem

$$n_6 = n_4 \frac{Z_5}{Z_6}, \quad n_4 = n_2 \frac{Z_3}{Z_4}, \quad n_2 = n_1 \frac{Z_1}{Z_2}$$

deci

$$n_6 = n_1 \frac{Z_5 Z_3 Z_1}{Z_6 Z_4 Z_2}.$$

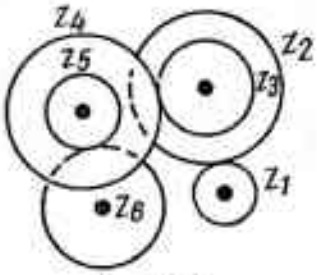


Fig. 10.9

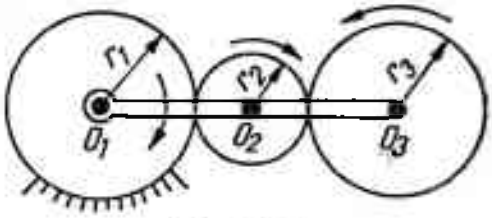


Fig. 10.10

10.10. În jurul centrului O_1 se rotește manivela O_1O_3 pe care sînt fixate axele a trei roți dințate, angrenate între ele, O_1, O_2 și O_3, de raze r_1, r_2 și r_3 (fig. 10.10).

Roata O_1 fiind fixă, să se determine viteza unghiulară a roții O_3, știind că manivela $O_1O_2O_3$ se rotește cu viteza unghiulară ω.

Rezolvare. Viteza lui O_2, ca punct aparținînd manivelei, este

$$v_2 = (r_1 + r_2)\omega.$$

Viteza lui O_2, ca punct al roții O_2, este

$$v_2 = r_2\omega_2.$$

Rezultă

$$\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega.$$

Viteza lui O_3, ca punct aparținînd manivelei, este

$$v_3 = (r_1 + 2r_2 + r_3)\omega.$$

Viteza lui O_3, ca punct al roții O_3, este

$$v_3 = 2r_2\omega_2 - r_3\omega_3.$$

Rezultă

$$\omega_3 = \frac{2r_2(\omega_2 - \omega) - (r_1 + r_3)\,\omega}{r_3} = \frac{r_1 - r_3}{r_3}\,\omega.$$

Se observă că ω_3 poate fi negativ, pozitiv sau nul. Cînd $\omega_3 = 0$, roata O_3 are o mișcare de translație curbilinie.

10.11. O camă are mișcarea de translație de la dreapta spre stînga cu viteza constantă v_0. Se dă ecuația profilului camei față de axele xO_1y cu care este solidară: $y = f(x)$. Să se afle viteza unghiulară ω a unei tije $\overline{OM} = l$, care este legată printr-o articulație de punctul fix O și se sprijină cu capătul liber A pe camă. Să se determine forma camei (ecuația conturului) pentru care tija OA se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 (fig. 10.11)

Rezolvare. Ecuația profilului camei fiind $y = f(x)$, ecuațiile parametrice ale punctului de pe bara OM care se reazemă pe camă sînt

$$x_1 = l\cos\theta = x + l - v_0 t$$

$$y_1 = l\sin\theta = y$$

pe unde

$$x = l(\cos\theta - 1) + v_0 t$$

$$y = l\sin\theta = f(x)$$

unde am notat cu θ unghiul format de bară cu axa Ox_1.

Prin derivare obținem componentele vitezei punctului M

$$\dot{x} = v_0 - l\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y} = l\dot{\theta}\cos\theta = f'(x)\,[v_0 - l\dot{\theta}\sin\theta].$$

Viteza unghiulară de rotație $\dot{\theta}$ a barei OM se obține din cea de-a doua ecuație sub forma

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{l}\cdot\frac{f'(x)}{f'(x)\sin\theta + \cos\theta}.$$

Presupunînd că $\dot{\theta}$ trebuie să fie constant $\dot{\theta} = \omega_0$ se deduce ecuația

$$f'(x) = \frac{l\omega_0\cos\theta}{v_0 - l\omega_0\sin\theta} = \frac{\omega_0\sqrt{l^2 - f^2(x)}}{v_0 - \omega_0 f(x)}$$

sau

$$(v_0 - \omega\cdot y)\,y' = \omega_0\sqrt{l^2 - y^2}$$

sau

$$\frac{v_0 - \omega y}{\sqrt{l^2 - y^2}}\,dy = \omega_0\,dx.$$

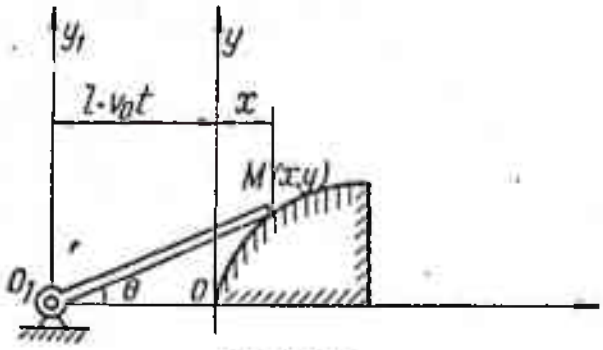


Fig. 10.11

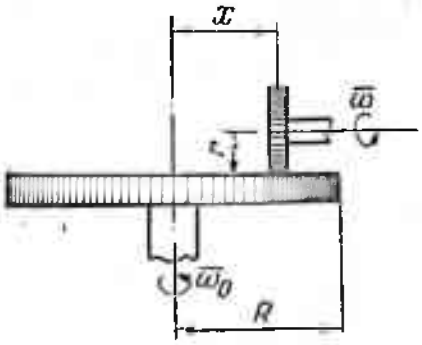


Fig. 10.12

10.12. Un disc de rază R are o mișcare de rotație uniformă în jurul unei axe verticale, cu viteza unghiulară ω_0, antrenînd un alt disc de rază r, care se poate roti în jurul axului său orizontal. Să se calculeze viteza unghiulară a acestui disc, în funcție de ω_0 și de distanța x (fig. 10.12).

Rezolvare. Fie ω viteza unghiulară a discului de rază r. Există relația evidentă

$$v_M = \omega_0 x = r\omega; \quad \omega = \frac{\omega_0}{r} x.$$

Dacă discul de rază r se apropie sau se depărtează de centrul discului mare cu viteza $v_0 = \dot{x} = ct$, atunci se observă că ω are o variație liniară în timp; discul mic va avea o rotație uniform accelerată.

10.13. Se consideră troliul diferențial cu angrenaje din figura 10.13 compus din doi cilindri coaxiali de raze r_1, r_2 și o roată de rază r_3, solidari pe axul O. Pe cilindrii r_1 și r_2 este înfășurat în sensuri diferite un fir care susține un scripete S.

Dîndu-se v_0 viteza extremității pîrghiei ce pune în mișcare troliul, solidară cu roata O_1 de rază r, se cere să se calculeze viteza greutății Q.

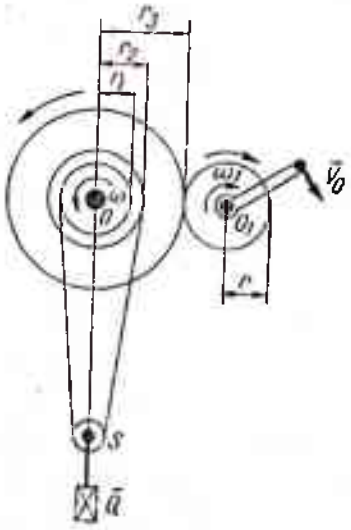


Fig. 10.13

Rezolvare. Viteza unghiulară a roții O_1 este

$$\omega_1 = \frac{v_0}{R} \text{ rad/s},$$

iar viteza unghiulară în jurul lui O va fi

$$\omega = \frac{r}{r_3}\omega_1 = \frac{rv_0}{Rr_3} \text{ rad/s}.$$

La o rotire $d\theta$ în jurul lui O firul se desfășoară cu

$$\delta_1 = r_1 d\theta$$

și se înfășoară în același timp cu

$$\delta_2 = r_2 d\theta.$$

Deci scripetele S se va deplasa în sus cu

$$\delta = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2}\, d\theta.$$

Viteza scripetelui (deci și a greutății Q) va fi

$$v = \dot{\delta} = \frac{r_2 - r_1}{2}\,\dot{\theta}$$

sau

$$v = \frac{(r_2 - r_1)}{2Rr_3}\, r v_0.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

10.14. Se consideră mecanismul articulat din figura 10.14. Să se studieze variația vitezelor sale, cunoscînd ω_0 — viteza unghiulară a barei OA.

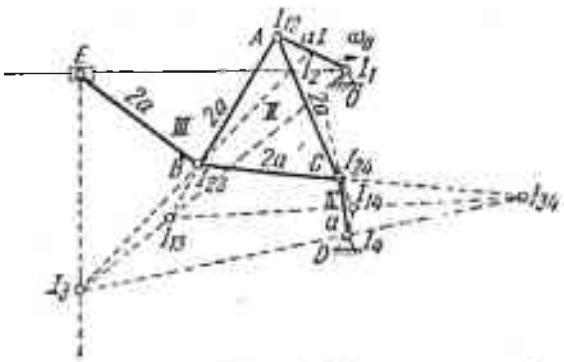


Fig. 10.14

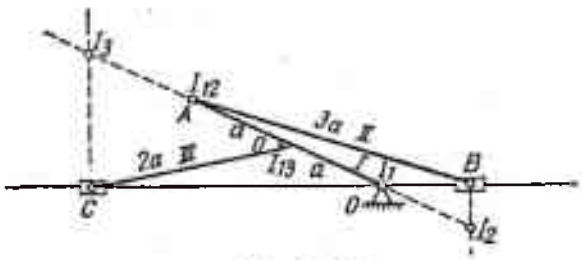
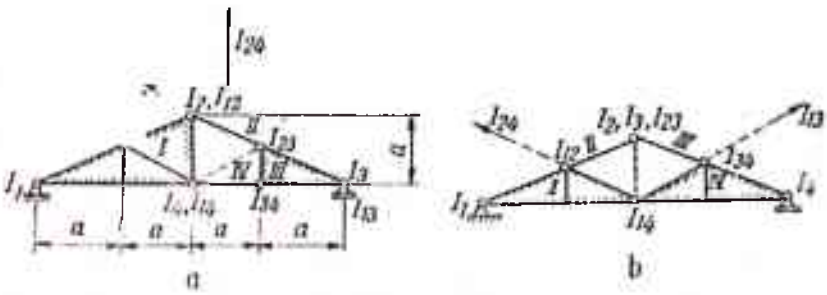


Fig. 10.15

10.15. Să se studieze mișcarea mecanismului articulat din figura 10.15, cunoscînd viteza unghiulară a barei OA egală cu ω_0.

10.16. Se consideră o fermă triunghiulară static determinată căreia i se suprimă o diagonală, sau montantul central (fig. 10.16, *a* și *b*). Se cere să se studieze distribuția de viteze pe mecanismul rezultat.



a b

Fig. 10.16

10.17. Se consideră un sistem de bare articulate static determinat, căruia i se suprimă o diagonală sau o bară din talpa inferioară (fig. 10.17, *a* şi *b*). Să se studieze distribuţia de viteze pe mecanismele rezultate.

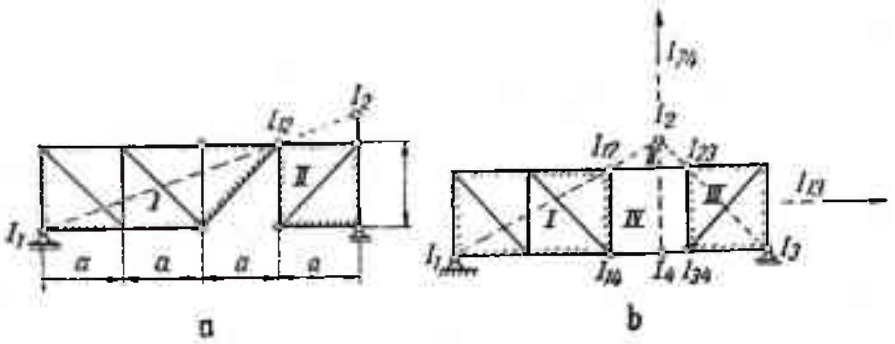


Fig. 10.17

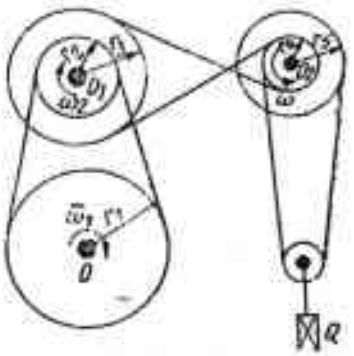


Fig. 10.18

10.18. Se consideră troliul diferenţial cu angrenaje din figura 10.18, format din tamburele de raze r_2, r_3 (coaxiale în O_1), r_4, r_5 (coaxiale în O_2) precum şi roata aşezată pe axul O, avînd raza r_1 şi viteza unghiulară ω_1. Mişcarea se transmite prin fire. Se cere viteza v a greutăţii Q, în funcţie de ω_1 şi de razele tamburelor.

R. Greutatea Q urcă cu viteza $v = \frac{(r_5 - r_4)\, r_1 r_3}{2 r_2 r_4}\, \omega_1$.

10.19. Se dau două roţi tronconice angrenate între ele, avînd unghiurile la vîrf egale respectiv cu 2α şi 2β. Ştiind că turaţia roţii tronconice mici este n_1 să se determine turaţia roţii tronconice mari.

R. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Partea a treia

DINAMICA

Scanned with OKEN Scanner

XI. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Definiții și formule

Obiectul capitolului este studiul mișcării punctului material liber sub acțiunea forțelor aplicate. Problema se prezintă sub două aspecte: a) fiind date forțele, să se găsească mișcarea punctului și b) presupunînd cunoscută mișcarea punctului, să se determine forța care provoacă această mișcare.

Problema se rezolvă aplicînd ecuația fundamentală a dinamicii

$$m\bar{a} = m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}})$$

unde am notat cu m masa punctului, cu $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$ respectiv vectorul de poziție, vectorul viteză și vectorul accelerație, cu $\bar{a}$ accelerația punctului, iar cu $\bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}})$ forța care acționează asupra lui. Proprietățile generale privind mișcarea punctului se referă la variația în timp a impulsului, momentului cinetic și energiei cinetice.

Teorema variației impulsului: derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu forța, în tot timpul mișcării

$$\frac{\mathrm{d}\,(m\bar{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\bar{H}}{\mathrm{d}t} = \dot{\bar{H}} = \bar{F}$$

unde $m\bar{v} = \bar{H}$ este impulsul punctului.

Teorema variației momentului cinetic: derivata în raport cu timpul a momentului impulsului față de un punct fix O este egală în timpul mișcării cu momentul forței față de același punct O

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \frac{\mathrm{d}\bar{K}}{\mathrm{d}t} = \dot{\bar{K}} = \bar{r} \times \bar{F}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție al punctului, iar $\bar{r} \times m\bar{v} = \bar{K}$ momentul impulsului sau momentul cinetic.

Teorema variației energiei cinetice: variația energiei cinetice în intervalul de timp $\mathrm{d}t$ este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat în același interval de timp de către forța care acționează asupra punctului material

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathrm{d}E = \bar{F} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \mathrm{d}L.$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\frac{1}{2}mv^2 = E$ este energia cinetică a punctului, iar $dL = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ lucrul mecanic elementar al forței $\bar{F}$ la variația $d\bar{r}$ a vectorului de poziție.

Tipuri de forțe sub acțiunea cărora un punct material poate efectua mișcări libere.

a) *Greutatea proprie* $\bar{G} = m\bar{g}$. Sub acțiunea acestei forțe punctul se poate mișca în vid sau în aer pe traiectorii rectilinii sau curbilinii. În cazul mișcării în aer, apare în plus o forță rezistentă, dirijată după tangenta la traiectorie în sens opus mișcării: $\bar{R} = -R\bar{\tau} = -mg\varphi(v)\,\bar{\tau}$, unde $\bar{\tau}$ este versorul tangentei la traiectorie.

b) *Forțele centrale*, care trec necontenit (suportul lor) printr-un punct fix din spațiu. Au proprietatea că traiectoriile descrise sub acțiunea lor sînt traiectorii plane, iar mișcările se produc cu viteză areolară constantă

$$r^2\dot{\theta} = C,$$

r, θ fiind coordonatele polare ale punctului în planul traiectoriei.

Ecuația diferențială a traiectoriei — ecuația lui Binet — este

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2}.$$

Cea mai importantă forță centrală este forța de atracție universală care se exercită între două puncte de mase m_1 și m_2 situate la distanța d unul de altul

$$F = f\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

unde $f = 6{,}664 \cdot 10^{-8}$ u.CGS este constanta universală.

c) *Forțele elastice* sînt forțe atractive exercitate asupra punctului material din partea unui punct fix numit centru de atracție; ele sînt proporționale cu distanța de la punct la centrul de atracție

$$\bar{F} = -k\bar{r}.$$

Ecuația fundamentală în acest caz are forma

$$m\ddot{\bar{r}} = -k\bar{r}$$

și admite soluții de forma

$$\bar{r} = \bar{A}\cos\omega t + \bar{B}\sin\omega t$$

unde $\bar{A}$ și $\bar{B}$ sînt constante de integrare și se determină prin condiții inițiale, iar

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Probleme rezolvate

11.1. Cît cîntăreşte 1 kgf la suprafaţa Lunii şi a Soarelui dacă acceleraţiile forţelor de atracţie sînt 1,7 m/s², respectiv 270 m/s²?

Rezolvare. Pe Lună

$$G_L = m \cdot 1{,}7 = \frac{1}{9{,}81} \cdot 1{,}7 = 0{,}173 \text{ kgf};$$

pe Soare

$$G_S = \frac{1}{9{,}81} \cdot 270 = 27{,}5 \text{ kgf}.$$

11.2. Să se determine mişcarea rectilinie a unui punct material sub acţiunea următoarelor forţe:

a) o forţă $F(t)$ dependentă de timp;
b) o forţă $F(x)$ dependentă de spaţiu;
c) o forţă $F(\dot{x})$ dependentă de viteză;
d) o forţă $F(t, \dot{x})$ dependentă de timp şi viteză;
e) o forţă $F(x, \dot{x})$ dependentă de spaţiu şi viteză.

Rezolvare. a) Ecuaţia fundamentală are forma

$$m\ddot{x} = F(t) \quad \text{sau} \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F(t).$$

O primă integrare a ecuaţiei are ca soluţie

$$\dot{x} - \frac{1}{m}\int F(t)\, dt = C_1,$$

iar a doua integrare a ecuaţiei admite ca soluţie

$$x = \int\left[\frac{1}{m} F(t)\, dt + C_1\right] dt + C_2$$

unde C_1 şi C_2 sînt două constante de integrare ce se determină prin condiţiile iniţiale ale problemei.

b) Pentru $F = F(x)$ ecuaţia fundamentală are forma

$$m\ddot{x} = F(x),$$

respectiv utilizînd teorema energiei

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} mv^2\right)}{dx} = F(x).$$

Prin integrare obţinem soluţia

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \int F(x)\, dx + C_1$$

unde C_1 este o constantă de integrare ce se obţine din condiţiile iniţiale ale problemei

c) Ecuaţia de mişcare pentru $F = F(\dot{x})$ este

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}) \quad \text{sau} \quad m\frac{d\dot{x}}{dt} = F(\dot{x}),$$

respectiv

$$dt = m\frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})}.$$

Din integrare se obţine

$$t = \int \frac{m\, d\dot{x}}{F(\dot{x})} + C_1.$$

Dacă vrem să punem în evidenţă legea de variaţie a spaţiului utilizăm următorul artificiu de calcul

$$\frac{dx}{d\dot{x}} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\dot{x}} = \dot{x}\frac{m}{F(\dot{x})}.$$

Rezultă pentru x soluţia

$$x = \int \frac{m\dot{x}\, d\dot{x}}{F(\dot{x})} + C_1.$$

d) $m\ddot{x} = F(t, \dot{x})$ sau $m\frac{d\dot{x}}{dt} = F(t, \dot{x})$,

care prin integrare dă soluţia

$$f(t, \dot{x}) = C.$$

e) $m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ sau $m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = F(x, \dot{x})$,

care prin integrare conduce la

$$f(x, \dot{x}) = C.$$

11.3. Un punct material de masă m (fig. 11.3) descrie curba $y = px^2 + q$, proiecţia vitezei pe axa Oy fiind constantă; să se determine forţa care acţionează asupra punctului, ştiind că în momentul iniţial $y = 0$.

Rezolvare. Dacă proiecţia vitezei pe axa Oy este constantă

$$\dot{y} = C, \quad \ddot{y} = 0,$$

accelerația are forma

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}.$$

Integrînd prima ecuație obținem

$$y = Ct$$

Înlocuind în ecuația curbei această soluție găsim

$$Ct - q = px^2$$

de unde

$$x = \sqrt{\frac{C}{p}t - \frac{q}{p}}$$

respectiv

$$\dot{x} = \frac{C}{2p\sqrt{\frac{C}{p}t - \frac{q}{p}}}$$

și

$$\ddot{x} = -\frac{C^2}{4p^2\left(\frac{C}{p}t - \frac{q}{p}\right)^{3/2}}.$$

Forța $\vec{F}$ este deci

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{i} = -\frac{mC^2}{4p^2\left(\frac{C}{p}t - \frac{q}{p}\right)^{3/2}}\vec{i}.$$

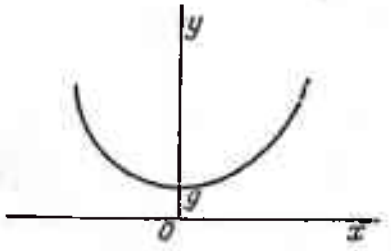


Fig. 11.3

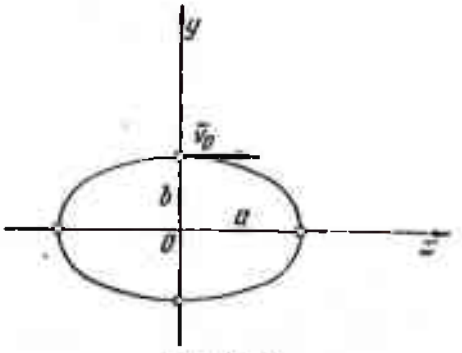


Fig. 11.4

11.4. Un punct de masă m se mișcă pe elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, accelerația sa fiind în tot timpul mișcării paralelă cu axa Oy. La timpul $t = 0$ coordonatele punctului erau $x = 0$, $y = b$, iar viteza v_0. Să se determine forța care acționează asupra punctului (fig. 11.4).

Rezolvare. Dacă punctul are accelerația îndreptată după axa Oy există relația

$$\ddot{x} = 0$$

care prin integrare duce la

$$\dot{x} = C_1, \quad x = C_1 t + C_2.$$

Cu condițiile inițiale: la $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ se obține

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = 0,$$

deci

$$x = v_0 t.$$

Introducînd în ecuația curbei găsim

$$\frac{v_0^2 t^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de unde

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{v_0^2 t^2}{a^2}\right)$$

sau

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}.$$

Prin derivări succesive

$$\dot{y} = -\frac{v_0^2 b t}{a\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}}$$

$$\ddot{y} = -\frac{v_0^2 a b}{(a^2 - v_0^2 t^2)^{3/2}}$$

sau

$$\ddot{y} = -\frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3}$$

deci

$$\bar{F} = -m\ddot{y}\bar{j} = -m\frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3}\bar{j}.$$

11.5. Un punct M de masă m, descrie sub acțiunea unei forțe centrale $\bar{F}$ o lemniscată de ecuație $r^2 = a\cos 2\theta$. În momentul inițial $r = r_0$, viteza punctului este $\bar{v}_0$ și face unghiul α cu $\bar{r}_0$ (fig. 11.5). Să se determine mărimea forței $\bar{F}$ știind că ea depinde numai de r.

Rezolvare. Forța de atracție se exprimă în coordonate polare sub forma

$$\bar{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\rho} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{n}.$$

Dar forţa fiind dirijată după raza vectoare,

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

de unde

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}.$$

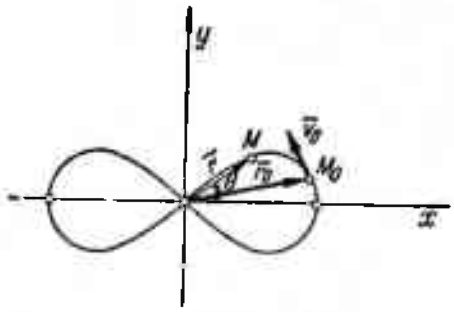


Fig. 11.5

Condiţiile iniţiale fiind: la $r = r_0$, $v = v_0$, $r_0\dot{\theta}_0 = v_0 \sin\alpha$ rezultă

$$C = \dot{\theta}_0 r_0^2 = r_0 v_0 \sin\alpha$$

şi

$$\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0 \sin\alpha}{r^2}.$$

Derivînd relaţia

$$r^2 = a\cos 2\theta$$

obţinem pentru derivatele succesive

$$\dot{r} = -\frac{a\dot{\theta}\sin 2\theta}{r} = -\frac{a r_0 v_0 \sin\alpha}{r^3}\sin 2\theta$$

$$\ddot{r} = -a r_0 v_0 \sin\alpha\,\frac{2\dot{\theta}r^3\cos 2\theta - 3r^2\cdot\dot{r}\sin 2\theta}{r^6} = -\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^7}(-r^4 + 3a^2)$$

şi

$$r\dot{\theta}^2 = r\,\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^4}.$$

Înlocuind aceste valori în expresia

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^7}(+r^4 - 3a^2 - r^4) = -\frac{3a^2 r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^7}$$

obţinem pentru forţă valoarea

$$F = \frac{3m\cdot a^2 r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^7}.$$

11.6. Un punct material de masă m este aruncat pe verticală, în sus cu viteza iniţială $\bar{v}_0$. Să se determine viteza cu care revine pe pămînt în următoarele ipoteze:

a) se neglijează rezistenţa aerului;

b) se ia în considerare rezistenţa aerului ca o forţă proporţională cu viteza ($\bar{R} = -km\bar{v}$).

Rezolvare. Ecuaţia mişcării ascendente (fig. 11.6, *a*) este

$$m\ddot{y} = -mg.$$

Integrînd succesiv această ecuație se obține:

$$\dot{y} = -gt + C_1$$

și

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Pentru determinarea constantelor de integrare se pun condițiile inițiale: $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = v_0$, rezultă $C_2 = 0$ și $C_1 = v_0$ și astfel:

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Punctul va urca pînă cînd

$$\dot{y} = v_0 - gt = 0$$

deci la timpul

$$t_1 = \frac{v_0}{g}$$

Înălțimea corespunzătoare opririi este

$$y = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} = h.$$

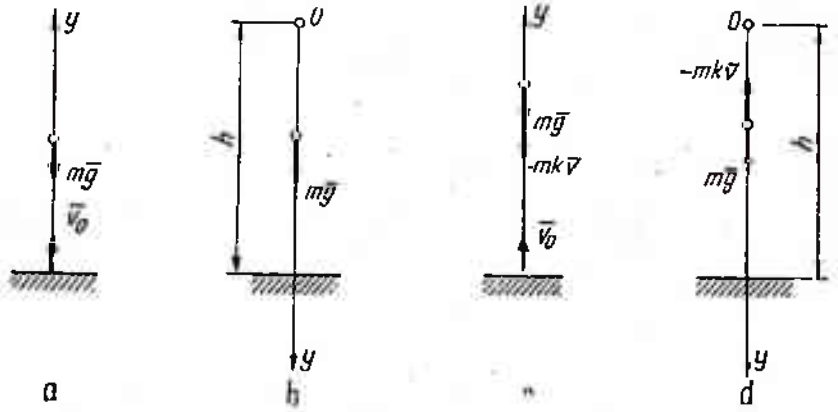


Fig. 11.6

În mișcarea descendentă (fig. 11.6, *b*) ecuația devine

$$m\ddot{y} = mg$$

respectiv

$$\dot{y} = gt + C_3$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Cu condițiile inițiale: $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$, constantele de integrare sînt $C_3 = C_4 = 0$ (au fost schimbate axele sistemului de referință), deci

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

Spațiul parcurs pînă la revenirea pe pămînt este

$$y = \frac{gt^2}{2} = h,$$

deci timpul corespunzător

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Viteza la acest moment este

$$\dot{y} = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

Dacă înlocuim valoarea lui h găsim pentru viteza de lansare

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{v_0^2}{2g}} = v_0.$$

b) În mișcarea ascendentă (fig. 11.6, *c*) ecuația de mișcare este

$$m\ddot{y} = -mg - mk\dot{y}$$

sau

$$\ddot{y} + k\dot{y} = -g.$$

Ecuația admite soluția

$$y = C_1 + C_2e^{-kt} - \frac{g}{k}t.$$

Condițiile inițiale ale problemei sînt: $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = v_0$, deci

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0\right),$$

astfel încît

$$y = \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$$

$$\dot{y} = \left(v_0 + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia mişcării se mai poate scrie sub forma

$$\frac{dv}{dt} + kv = -g$$

sau

$$\frac{dv}{g + kv} = -dt.$$

care, integrată, duce la soluţia

$$\frac{1}{k} \ln \frac{kv + g}{kv_0 + g} = -t.$$

Punctul urcă pînă la înălţimea la care

$$v = 0 \quad \text{şi} \quad -t = \frac{1}{k} \ln \frac{g}{kv_0 + g},$$

deci

$$h = y = \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \frac{g}{kv_0 + g}\right) + \frac{g}{k^2} \ln \frac{g}{kv_0 + g}.$$

La coborîre (fig. 11.6, *d*) ecuaţia de mişcare a punctului devine

$$m\ddot{y} = mg - mk\dot{y}$$

au

$$\ddot{y} + k\dot{y} = g$$

cu soluţia

$$y = C_1 + C_2 e^{-kt} + \frac{g}{k} t.$$

Condiţiile iniţiale devin: $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$ şi constantele de integrare sînt $C_1 = -C_2 = -\frac{g}{k^2}$, deci

$$y = -\frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}) + \frac{g}{k} t.$$

Prin dezvoltarea în serie a termenului e^{-kt},

$$y = -\frac{g}{k^2}\left(1 - 1 + \frac{kt}{1} - \frac{k^2t^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right) + \frac{g}{k} t = \frac{gt^2}{2}\left(1 - \frac{kt}{3} + \ldots\right).$$

Se observă că dacă nu ar exista rezistenţa aerului $k = 0$ şi

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

Viteza cu care mobilul ajunge pe pămînt se calculează la timpul t_1 cînd y devine egal cu h. Valoarea vitezei este

$$\dot{y} = -\frac{g}{k} \cdot ke^{-kt_1} + \frac{g}{k} t_1.$$

11.7. Un punct material de masă m este lăsat să cadă fără viteză inițială, de la înălțimea H. Să se determine viteza cu care atinge pămîntul, dacă rezistența aerului este o forță direct proporțională cu pătratul vitezei.

Rezolvare. Ecuația de mișcare a punctului este

$$m\ddot{x} = mg - mk^2\dot{x}^2$$

sau

$$\ddot{x}\,dx = (g - k^2\dot{x}^2)\,dx$$

Dar

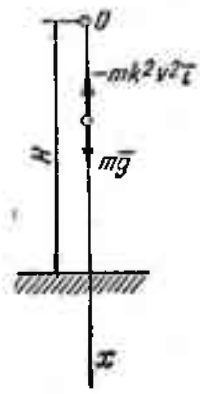


Fig. 11.7

Ecuația ia forma

$$\frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{g - k^2\dot{x}^2} = dx.$$

Prin integrare obținem soluția ei sub forma

$$-\frac{1}{2k^2}\ln(g - k^2\dot{x}^2) = x + C.$$

Condițiile inițiale fiind: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, constanta devine

$$C = -\frac{1}{2k^2}\ln g.$$

Ecuația de mișcare capătă forma

$$x = \frac{1}{2k^2}\ln\frac{g}{g - k^2x^2}$$

și

$$\dot{x} = \frac{1}{k}\sqrt{g(1 - e^{-2k^2x})}.$$

Punctul ajunge pe pămînt cînd $x = H$. Atunci viteza lui are valoarea

$$v = \dot{x}_H = \frac{1}{k}\sqrt{g(1 - e^{-2k^2H})}.$$

11.8. Să se studieze căderea unui corp de la o foarte mare înălțime (cazul meteorilor) — (Sommerfeld).

Scanned with OKEN Scanner

Se dau: a — raza pămîntului; m — masa meteorului;
M — masa pămîntului; f — constanta gravitației universale;

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{m \cdot M \cdot f}{r^2} \quad \text{(origine centrul Pămîntului)}$$

$\frac{dr}{dt} = a\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}$, special pentru suprafața Pămîntului (R — distanța la care meteorul s-ar afla în echilibru).

$$t = \frac{1}{a\sqrt{2g}}\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}}; \quad R \to \infty; \quad r = a; \quad v = \sqrt{2ga} \quad \text{care este}$$

viteza cu care sosește meteorul.
Pentru $R = a + h$, se obține aproximativ:

$$v = \sqrt{2ga}\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{a}}} = \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{a} + \ldots\right).$$

11.9. Să se studieze mișcarea rectilinie a unui mobil într-un mediu rezistent $F = kmv^n$.

Rezolvare. Ecuația de mișcare este

$$m\ddot{x} = -kmv^n$$

sau

$$\frac{dv}{dt} = -kv^n.$$

Pentru integrare se separă variabilele sub forma

$$k\,dt = -v^{-n}\,dv.$$

Pentru $n \neq 1$ soluția problemei este

$$kt = -\frac{v^{1-n}}{1-n} + C_1.$$

Cu condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $v = v_0$, viteza punctului devine

$$v^{1-n} = v_0^{1-n} + (n-1)\,kt. \qquad \text{(a)}$$

Se observă că dacă

$$n < 1, \quad v = 0 \quad \text{pentru} \quad t = \frac{v_0^{1-n}}{(1-n)\,k}$$

$$n > 1, \quad v = 0 \quad \text{pentru} \quad t \to \infty.$$

Ecuația de mișcare a punctului se mai poate scrie

$$v\frac{dv}{dx} = -kv^n$$

sau

$$v^{1-n}\,dv = -k\,dx,$$

care, integrată, dă soluția

$$v^{2-n} = v_0^{2-n} + (n-2)\,kx. \qquad \text{(b)}$$

Se observă că dacă

$$n < 2, \quad v = 0 \quad \text{pentru} \quad x = \frac{v_0^{2-n}}{(2-n)\,k}$$

$$n > 2, \quad v = 0 \quad \text{pentru} \quad x \to \infty.$$

Eliminînd pe v între ecuațiile (a) și (b) obținem legea de mișcare a punctului

$$x = \frac{1}{k(n-2)}\left[(v_0^{1-n} + (n-1)\,kt)^{\frac{n-2}{n+1}} - v_0^{2-n}\right].$$

În concluzie, pentru

$n > 2$, mișcare continuă pînă la infinit,

$1 < n < 2$, $v \to 0$ pentru $t \to \infty$ și $x \to \dfrac{v_0^{2-n}}{(2-n)\,k}$

$n < 1$, mișcarea se sfîrșește în poziția

$$x = \frac{v_0^{2-n}}{(2-n)\,k} \quad \text{și la} \quad t = \frac{v_0^{1-n}}{(1-n)\,k}.$$

11.10. Un punct material greu M se aruncă din O cu viteza inițială $\bar{v}_0$, într-o direcție care face cu axa Ox unghiul α. Un plan P, perpendicular pe planul vertical în care se află traiectoria, face cu orizontala unghiul β (fig.11.10). Mișcarea făcîndu-se în vid, se cer: a) distanța OA la care traiectoria atinge planul P; *b*) timpul necesar ca să se ajungă din O în A; c) unghiul β fiind dat, să se determine unghiul α, astfel ca distanța OA să fie maximă.

Rezolvare. Ecuația de mișcare a punctului este

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g}$$

respectiv

$$\dot{\bar{r}} = \bar{g}t + \bar{C}_1$$

$$\bar{r} = \frac{\bar{g}t^2}{2} + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2$$

unde am notat cu $\bar{r}$ vectorul de poziție al punctului M.

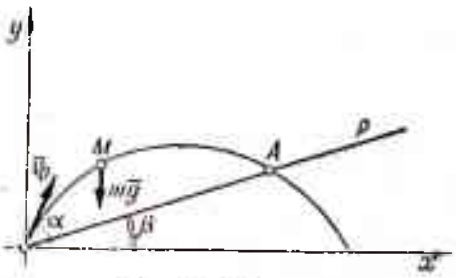


Fig. 11.10

Condițiile inițiale fiind $t = 0$, $\bar{r} = 0$ $\dot{\bar{r}} = \bar{v}_0$ constantele de integrare sînt $\bar{C}_2 = 0$, $\bar{C}_1 = \bar{v}_0$ și soluția ecuației are forma

$$\bar{r} = \frac{\bar{g}t^2}{2} + \bar{v}_0 t = v_0 t \cos\alpha \bar{i} + \left(v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)\bar{j}$$

sau

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Ecuația traiectoriei este parabola

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

a) Ecuația dreptei OP fiind

$$y = x \operatorname{tg}\beta.$$

Punctul de intersecție al curbei cu dreapta are coordonatele

$$x_A = \frac{2v_0^2}{g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\cos^2\alpha, \qquad y_A = \frac{2v_0^2}{g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\beta\cos^2\alpha.$$

Distanța OA este

$$OA = \frac{x_A}{\cos\beta} = 2\frac{v_0^2}{g\cos\beta}\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos^2\alpha\right).$$

b) Timpul necesar pentru parcurgerea distanței OA este

$$t_A = \frac{x_A}{v_0\cos\alpha} = \frac{2v_0}{g}(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha) = \frac{2v_0}{g}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}.$$

c) OA este maxim cînd $\frac{d\overline{OA}}{d\alpha} = 0$, adică

$$\cos 2\alpha - \operatorname{tg}\beta \cdot 2\cos\alpha(-\sin\alpha) = 0,$$

respectiv

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = -\operatorname{tg}\beta.$$

11.11. Să se determine traiectoria unui proiectil greu aruncat de pe pămînt, luînd în considerație variația intensității accelerației cu înălțimea (Teichmann).

$$W = g \cdot \frac{r_0^2}{r^2} \text{ (Newton)}$$

Integrînd ecuațiile de mișcare, ajungem la legea lui *Kepler* după care traiectoria este o conică care are unul din focare în centrul Pămîntului

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \beta}$$

$$p = \frac{C^2}{k}; \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{C^2}{k^2}\left(v_0^2 - \frac{2k}{r_0}\right)}$$

$$k = r_0^2 g; \quad C = r_0 v_0 \cos \alpha;$$

$$r_0 = 6\,370 \text{ km}.$$

Viteza $v^2 = v_0^2 - \frac{2k}{r_0} + \frac{2k}{r}$

$$v^2 = v_0^2 - 2k\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

$\varepsilon = 0$ cerc.; $\varepsilon < 1$ elipsă; $\varepsilon = 1$ parabolă; $\varepsilon > 1$ hyperbolă.

În cazul elipsei

$$\varepsilon < 1; \quad v_0 < \sqrt{\frac{2k}{r_0}} = \sqrt{2gr_0} = 11\,180 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Prin urmare pentru $v_0 < 11\,180 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ avem o elipsă.

Un cerc rezultă pentru

$$\varepsilon = 0; \quad 1 + \frac{r_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{k^2}\left(v_0^2 - \frac{2k}{r_0}\right) = 0.$$

$$\frac{r_0 v_0^2}{k} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}; \quad \alpha = 0, \text{ sau } \alpha = \pi; \quad v_0 = 7\,905 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

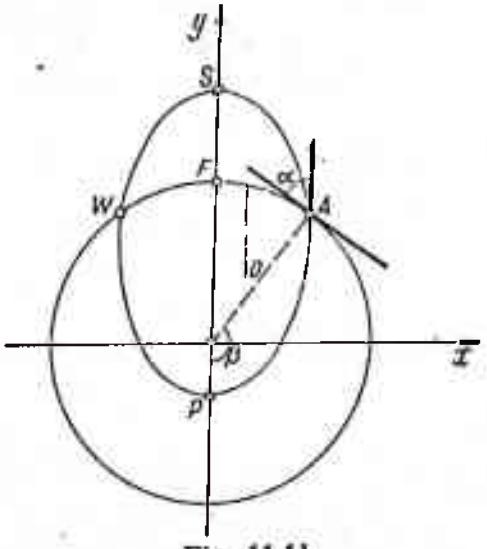


Fig. 11.11

11.12. Să se studieze mişcarea unui proiectil în vid ţinînd seama de sfericitatea Pămîntului; viteza iniţială v_0 face unghiul α cu orizontul,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\cos\varphi;\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\sin\varphi;\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(φ = latitudinea).

Se pot face simplificări observînd că x este foarte mic faţă de y, încît putem scrie:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x}{y};\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Şi întrucît $y \cong R$, fiind foarte mare, ajungem la ecuaţiile cunoscute:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0;\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

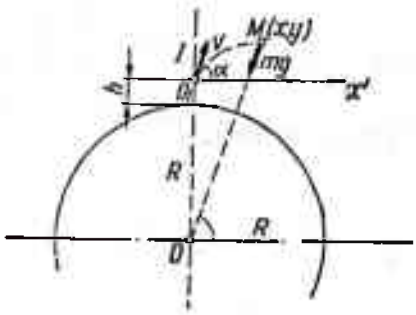


Fig. 11.12

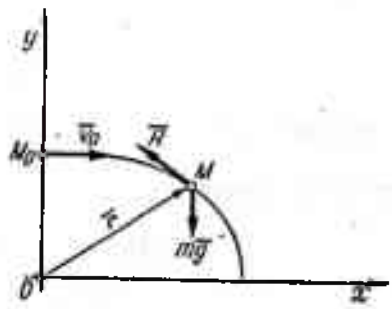


Fig. 11.13

11.13. Un punct material M, de masă m, este lansat pe orizontală de la înălţimea h deasupra pămîntului cu viteza $\bar{v}_0$ (fig. 11.13). Considerînd rezistenţa aerului ca o forţă de forma $\bar{R} = -km\bar{v}$ să se studieze mişcarea punctului.

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială a mişcării punctului este

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + \bar{R}$$

respectiv

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} - km\dot{\bar{r}}$$

sau

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{g} - k\dot{\bar{r}}.$$

Proiecţiile pe axe ale acestei ecuaţii sînt

$$\ddot{x} = -k\dot{x},\quad \ddot{y} = -g - k\dot{y}.$$

Dar $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ și din prima ecuație de proiecții obținem

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\,dt$$

sau, prin integrare,

$$\ln \dot{x} = -kt + C_1.$$

C_1 se determină cu condițiile inițiale: $t = 0$; $\dot{x} = v_0$; $C_1 = \ln v_0$ și ecuația devine

$$\ln \frac{\dot{x}}{v_0} = -kt$$

respectiv

$$\dot{x} = v_0 e^{-kt}.$$

Integrînd încă o dată obținem soluția

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2.$$

Deoarece la $t = 0$, $x = 0$ rezultă $C_2 = \frac{v_0}{k}$ și

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Pentru integrarea celei de-a doua ecuații diferențiale procedăm analog

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt},$$

respectiv

$$-\frac{d\dot{y}}{k\dot{y} + g} = dt,$$

cu soluția

$$-\frac{1}{k}\ln(k\dot{y} + g) = t + C_3.$$

Dar la $t = 0$, $\dot{y} = 0$, deci $C_3 = -\frac{1}{k}\ln g$ și avem

$$\frac{1}{k}\ln\frac{g + k\dot{y}}{g} = -t$$

de unde

$$\dot{y} = \frac{g}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Integrînd această ecuaţie obţinem soluţia

$$y = -\frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_4.$$

Pentru $t = 0$, $y = h$, deci $C_4 = h + \frac{g}{k^2}$,

respectiv

$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

Legea de mişcare a punctului M va fi dată de sistemul:

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

Eliminînd parametrul t obţinem ecuaţia traiectoriei punctului

$$y = h - \frac{g}{k^2}\ln\frac{v_0}{v_0 - kx} + \frac{gx}{kv_0}.$$

11.14. Să se determine viteza unui satelit al Pămîntului care se deplasează la înălţimea h deasupra acestuia pe o orbită circulară al cărui centru este centrul Pămîntului. Forţa de atracţie a Pămîntului este invers proporţională cu pătratul distanţei de la satelit la centrul Pămîntului şi este de forma (fig. 11.14).

$$F = \frac{km}{(R + h)^2}.$$

Aplicaţie numerică: $h = 300$ km, raza Pămîntului $R = 6370$ km, accelerraţia gravitaţiei la suprafaţa Pămîntului $g = 9{,}81$ m/s.

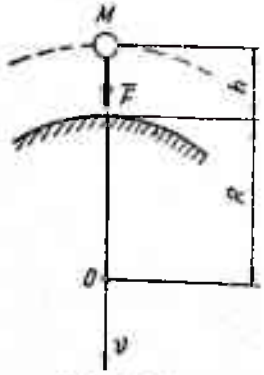


Fig. 11.14

Rezolvare. Satelitul descrie o traiectorie circulară de rază $R + h$. Accelerraţia este dirijată pe drecţia normală la traiectorie (direcţia de acţiune a forţei $\bar{F}$) şi este

$$a_n = \frac{v_M^2}{\rho} = \frac{v_M^2}{R + h}.$$

Forţa de atracţie este

$$F = \frac{km}{(R + h)^2}$$

unde k este o constantă pe care o putem determina considerînd că la suprafața Pămîntului, deci la $h = 0$, forța $\bar{F}$ devine $F = P = mg$.

$$mg = \frac{km}{R^2},$$

adică

$$k = gR^2,$$

deci

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}.$$

Ecuația de mișcare a satelitului, proiectată pe direcția normalei la traiectorie, va fi

$$m\frac{v_M^2}{R+h} = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

de unde

$$v_M = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}.$$

Înlocuind în această expresie datele problemei obținem pentru v_M valoarea

$$v_M = 6\,370\sqrt{\frac{9{,}81\ 10^{-3}}{6\,370+300}} = 7{,}72 \text{ km/s}.$$

11.15. Să se determine înălțimea H la care se ridică un proiectil M lansat de la suprafața Pămîntului cu viteza inițială v_0, sub unghiul α cu orizontala (fig. 11.15). În timpul mișcării, proiectilul este supus acțiunii forței de atracție a Pămîntului $F = \frac{km}{r^2}$. Se neglijează forțele rezistente.

Rezolvare. Proiectilul este un punct material supus acțiunii forței centrale

$$F = \frac{km}{r^2}.$$

Știind că la suprafața Pămîntului, pentru $r = R$, $F = P = mg$, găsim pentru k valoarea

$$k = gR^2$$

astfel că

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}.$$

Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului M, proiectate pe axele sistemului de coordonate polare, sînt

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi$$

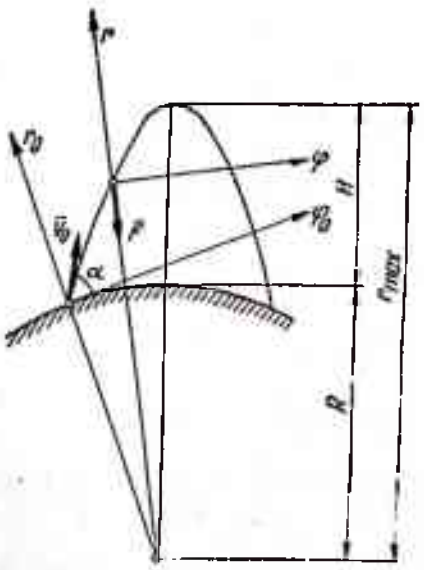


Fig. 11.15

În acest caz

$$F_r = -F = -\frac{mgR^2}{r^2}, \quad F_\varphi = 0,$$

deci

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

și rezultă

$$r^2\dot{\varphi} = C.$$

Condițiile inițiale ale problemei fiind:

$$t = 0, \quad r = r_0 = R,$$

$$\dot{r} = v_0 \sin\alpha; \quad r_0\dot{\varphi}_0 = v_0 \cos\alpha; \quad \varphi = 0.$$

Viteza areolară devine

$$r^2\dot{\varphi} = Rv_0 \cos\alpha,$$

respectiv

$$\dot{\varphi} = \frac{Rv_0 \cos\alpha}{r^2}$$

Înlocuind această expresie în ecuație pentru $\ddot{r}$ obținem

$$\ddot{r} - \frac{R^2v_0^2 \cos^2\alpha}{r^3} = -\frac{gR^2}{r^2}.$$

Prin integrare se ajunge la soluția

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{R^2v_0^2 \cos^2\alpha}{2r^2} = \frac{gR^2}{r} + C$$

Cu condițiile inițiale $t = 0$, $r = r_0 = R$, $\dot{r} = v_0 \sin\alpha$, constanta C este

$$C = -\frac{2gR - v_0^2}{2}.$$

Deci

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{R^2v_0^2 \cos^2\alpha}{2r^2} = \frac{gR^2}{r} - \frac{2gR - v_0^2}{2}.$$

Știind că în cel mai înalt punct al traiectoriei proiecția vitezei pe axa Or este nulă, pentru $r = r_{max}$, $\dot{r} = 0$, deci

$$(2gR - v_0^2)\, r_{max}^2 - 2gR^2 r_{max} + R^2v_0^2 \cos^2\alpha = 0$$

sau

$$r_{max} = \frac{gR \pm \sqrt{g^2R^2 - (2gR - v_0^2)\, v_0^2 \cos^2\alpha}}{2gR - v_0^2} R.$$

Se observă că pentru $v_0^2 = 2gR (v_0 = \sqrt{2gR} = 11{,}2$ km/s), $r_{max} = \infty$, deci proiectilul nu se întoarce pe Pămînt.

Pentru a reveni pe Pămînt trebuie ca

$$2gR - v_0^2 > 0, \quad \text{deci} \quad v_0 < \sqrt{2gR}.$$

Înălțimea maximă la care se ridică proiectilul este

$$H = r_{max} - R = \frac{-gR + v_0^2 + \sqrt{g^2R^2 - (2gR - v_0^2)\, v_0^2 \cos^2\alpha}}{2gR - v_0^2} R.$$

11.16. Să se determine legea de atracție a planetelor de către Soare, considerînd cunoscute legile lui Kepler (fig. 11.16).

Rezolvare. a) Planetele se mișcă pe elipse, Soarele găsindu-se în unul din focare.

Ecuația orbitei planetei este

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

unde $p = \frac{b^2}{a}$ este parametrul elipsei, iar $e = 0{,}0167$ excentricitatea elipsei.

b) Viteza areolară a planetelor este constantă

$$r^2\dot{\varphi} = C.$$

Forța centrală de atracție a Soarelui care acționează asupra punctului de masă m are în coordonate polare proiecțiile

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$$

$$F\varphi = 0.$$

Din prima lege a lui Kepler rezultă

$$\dot{r} = \frac{pe\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}}{(1 + e\cos\varphi)^2} = \frac{pe\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2}\frac{C}{r^2} = \frac{Ce}{p}\sin\varphi$$

$$\ddot{r} = \frac{Ce}{p}\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{Ce}{p}\cos\varphi \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{C^2e}{p}\frac{\cos\varphi}{r^2},$$

deci forța este

$$F_r = -\frac{mC^2}{pr^2},$$

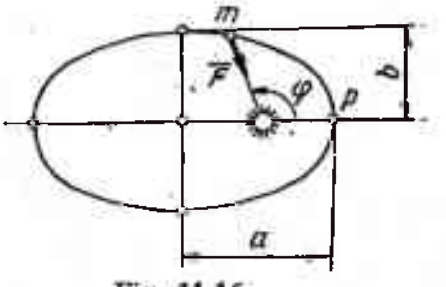


Fig. 11.16

adică planeta se mişcă sub acţiunea forţei de atracţie a Soarelui, proporţională cu masa planetei şi invers proporţională cu pătratul distanţei sale la Soare, τ fiind perioada de rotaţie a planetei în jurul Soarelui, iar πab suprafaţa elipsei.

Constanţa vitezei areolare se exprimă prin

$$\frac{1}{2} C\tau = \pi ab$$

şi

$$\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\tau^2 \frac{b^2}{a}} = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}$$

deci

$$F = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2} \frac{m}{r^2}.$$

c) Raportul $\frac{a^3}{\tau^2}$ este constant pentru toate planetele din sistemul solar.

Presupunînd masa Soarelui M şi identificînd forţa de atracţie $F = f\frac{Mm}{r^2}$ cu expresia de mai sus se obţine

$$\frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2} = fM$$

unde f este un coeficient de proporţionalitate care nu depinde nici de masa planetei, nici de aceea a Soarelui şi are valoarea $f = 6{,}664 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{s}^2}$.

11.17. În cazul atracţiei universale $F = k\ \text{mm}_1/r^2$ se consideră cazul particular cînd centrele de atracţie formează o suprafaţă sferică omogenă de rază R. Fie M un punct la o distanţă u de centrul sferei, supus

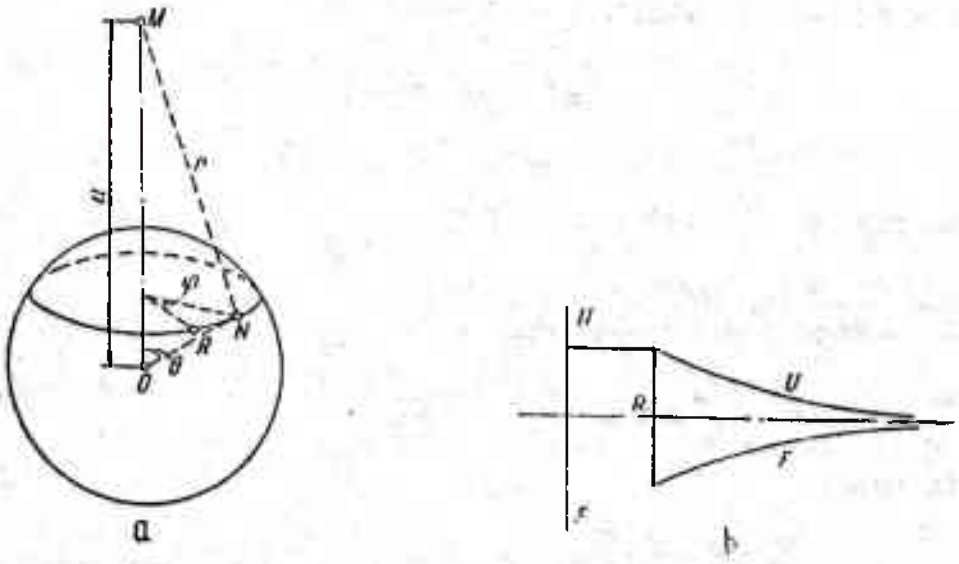


Fig. 11.17

acţiunilor simultane ale tuturor punctelor de pe sferă. Se cere expresia lui F cînd punctul M s-ar găsi în exteriorul sau în interiorul sferei.

$$\delta = C; \quad U = fm\delta \int \frac{d\sigma}{r}$$

$$d\sigma = R \sin\theta \, d\varphi \cdot R d\theta = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi;$$

$$\int \frac{d\sigma}{r} = R^2 \iint \frac{\sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi}{r} = 2\pi R^2 \int \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{r}$$

$$r^2 = R^2 + u^2 - 2Ru\cos\theta;$$

$$\int \frac{d\sigma}{r} = 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{\sqrt{R^2 + u^2 - 2Ru\cos\theta}} =$$

$$= \frac{2\pi R}{u}\left[\sqrt{R^2 + u^2 + 2Ru} - \sqrt{R^2 + u^2 - 2Ru}\right] = \frac{2\pi R}{u}\left[(R + u) - (R - u)\right].$$

Pentru

$$u > R \ldots \int \frac{d\sigma}{r} = 4\pi \frac{R^2}{u} \ldots U_{ext} = fm\delta \frac{4\pi R^2}{u} = \frac{fmM}{u}; \; F_{ext} = -\frac{fmM}{u^2}.$$

Pentru

$$u < R \ldots \int \frac{d\sigma}{r} = 4\pi R \ldots U_{int} = \frac{fmM}{R} = C \ldots F_{int} = 0.$$

11.18. Să se studieze traiectoria unui punct material M de masă m atras de originea O cu o forţă F invers proporţională cu cubul distanţei $OM = r$.

Rezolvare. Forţa centrală F are expresia

$$F = -m\frac{\lambda^2}{r^3}.$$

Se aplică formula lui Binet:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$$

care dă:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{c^2 - \lambda^2}{c^2} \cdot \frac{1}{r} = 0,$$

ecuaţia diferenţială a traiectoriei punctului M.

Scanned with OKEN Scanner

Se notează coeficientul lui $1/r$ cu:

$$\pm k^2 = \frac{c^2 - \lambda^2}{c^2}$$

și integrala ecuației diferențiale va fi de forma

$$\frac{1}{r} = A \cos k(\theta - \alpha),$$

în cazul cînd k^2 are semnul plus, sau de forma

$$\frac{1}{r} = Ae^{k\theta} + Be^{-k\theta},$$

în cazul cînd coeficientul k^2 este negativ.

În cazul în care $k = 0$, adică $c^2 - \lambda^2 = 0$, integrala ecuației diferențiale are forma $\frac{1}{r} = A\theta + B$.

În celelalte două cazuri traiectoria poate fi o spirală logaritmică, iar în ultimul caz traiectoria este o spirală hiperbolică sau un cerc.

11.19. Un punct material M, de masă m, este atras de centrul O cu o forță $F = -\frac{km}{r^5}$, unde r este distanța OM și k o constantă cunoscută. Ce viteză inițială $\bar{v}_0$, paralelă cu axa Oy, trebuie să se imprime punctului M în A pentru ca el să descrie un cerc de diametru OA (se va exprima aceasta în funcție de k și R) (fig. 11.19). După cît timp ajunge mobilul în O?

Aplicăm ecuația lui Binet

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2}$$

unde, $r = 2R \cos\theta$, $C = 2Rv_0$, obținem

$$\frac{1}{2R}\,\frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \frac{1}{2R\cos\theta} = \frac{k}{(2R\cos\theta)^5\,(2Rv_0)^2}$$

de unde rezultă

$$v_0^2 = \frac{k}{32R^4}$$

și

$$t = \frac{A}{\Omega} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{1}{Rv_0} = \frac{\pi R}{2v_0}.$$

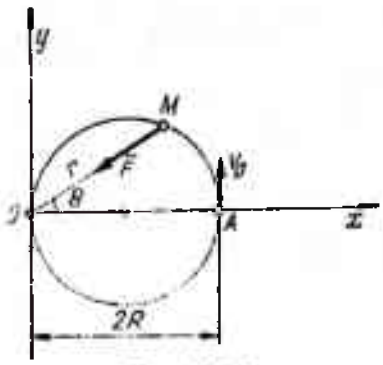


Fig. 11.19

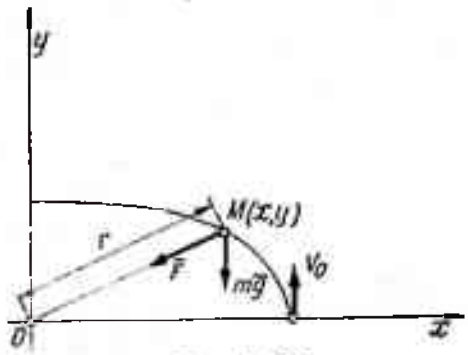


Fig. 11.20

11.20. Un punct material M, de masă m, se deplasează sub acțiunea unei forțe centrale $\bar{F} = -k^2m\bar{r}$, proporțională cu vectorul de poziție al punctului la centrul fix (fig. 11.20).

Să se studieze mișcarea cunoscînd poziția $M_0\left(a, \frac{-g}{k^2}\right)$ în momentul inițial și viteza $\bar{v} = v_0\bar{j}$ în același moment.

Rezolvare. Ecuația diferențială a mișcării punctului M este

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + \bar{F}$$

sau

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{g} - k^2\bar{r}.$$

Proiectată pe axe, ecuația devine

$$\ddot{x} + k^2x = 0$$

$$\ddot{y} + k^2y = -g.$$

Integrînd aceste ecuații obținem sistemul de soluții

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{g}{k^2}.$$

Componentele vitezei punctului vor fi

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$$

$$\dot{y} = -kC_3 \sin kt + kC_4 \cos kt.$$

Constantele se determină punînd condițiile inițiale $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$, $y = -\frac{g}{k^2}$, $\dot{y} = v_0$ și rezultă $C_1 = a$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = \frac{v_0}{k}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile mișcării punctului material sînt

$$x = a \cos kt$$

$$y = \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{g}{k^2}.$$

Pentru determinarea traiectoriei punctului se elimină parametrul t între aceste ecuații

$$\cos kt = \frac{x}{a}$$

$$\sin kt = \frac{k}{v_0}\left(y + \frac{g}{k^2}\right).$$

Ridicînd la pătrat și adunînd cele două ecuații obținem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{g}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = 1.$$

Traiectoria este deci o elipsă cu centrul în punctul de coordonate $\left(0, -\frac{g}{k^2}\right)$.

11.21. Un punct material de masă m este lansat din poziția M_0 $(0, a)$ cu viteza $\bar{v}_0$ paralelă cu dreapta $x = y$, fiind în același timp atras de axa Oy proporțional cu distanța la acea axă (fig. 11.21). Să se studieze mișcarea punctului.

Rezolvare. Forța de atracție $\bar{F}$ este

$$\bar{F} = -kx\bar{i}.$$

Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului, proiectate pe axele Ox și Oy, sînt

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{y} = -mg.$$

Prin integrare obținem sistemul de soluții

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4$$

unde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Condiţiile iniţiale fiind:

$t = 0,\ x = 0,\ \dot{x} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2},\ y = a,\ \dot{y} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$, rezultă $C_1 = 0,\ C_2 = \frac{v_0\sqrt{2}}{2}$,

$$C_3 = \frac{v_0\sqrt{2}}{2},\ C_4 = a.$$

Astfel, soluţiile devin

$$x = \frac{v_0\sqrt{2}}{2} \sin \omega t$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \frac{v_0\sqrt{2}}{2} t + a.$$

Componentele vitezei punctului sînt

$$\dot{x} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2} \omega \cos \omega t$$

$$\dot{y} = -gt + \frac{v_0\sqrt{2}}{2}$$

iar componentele acceleraţiei

$$\ddot{x} = -\frac{v_0\sqrt{2}}{2} \omega^2 \sin \omega t$$

$$\ddot{y} = -g.$$

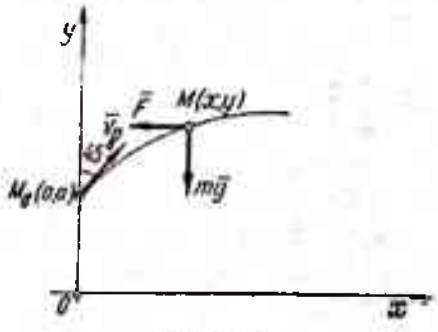


Fig. 11.21

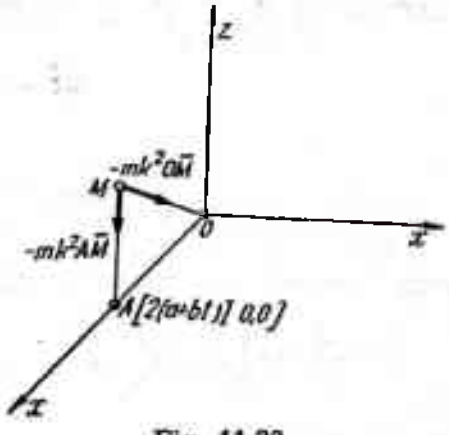


Fig. 11.22

11.22. Un punct M este atras de două centre fixe O şi A cu forţe proporţionale cu distanţele (coeficient de proporţionalitate k^2) (fig. 11.22). Distanţa dintre cele două centre este $OA = 2(a + bt)$.

Cunoscînd condiţiile iniţiale: $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$, $\dot{\mathbf{r}} = b\mathbf{i} + b\mathbf{k}$ să se studieze mişcarea.

Există relația

$$\bar{r} = \overline{OA} + \overline{AM}$$

deci

$$\overline{AM} = \bar{r} - \overline{OA} = \bar{r} - 2(a + bt)\,\bar{i}.$$

Forțele care acționează asupra punctului sînt

$$\bar{F}_1 = -mk^2 \cdot \overline{OM} = -mk^2\bar{r}$$

$$\bar{F}_2 = -mk^2 \cdot \overline{AM} = -mk^2[\bar{r} - 2(a + bt)\,\bar{i}].$$

Ecuația diferențială a mișcării punctului este

$$m\ddot{\bar{r}} = -mk^2\bar{r} - mk^2[\bar{r} - 2(a + bt)\,\bar{i}]$$

sau

$$\ddot{\bar{r}} = -2k^2\bar{r} + 2k(a + bt)\,\bar{i}.$$

Prin integrare se obține soluția

$$\bar{r} = \bar{C}_1 \cos k\sqrt{2}t + \bar{C}_2 \sin k\sqrt{2}t + \frac{(a + bt)}{k^2}\,\bar{i}$$

și

$$\dot{\bar{r}} = k\sqrt{2}(-\bar{C}_1 \sin k\sqrt{2}t + \bar{C}_2 \cos k\sqrt{2}t) + \frac{b}{k^2}\,\bar{i}.$$

Cu condițiile inițiale se obțin relațiile

$$a\bar{i} + a\bar{j} = \bar{C}_1 + \frac{a}{k^2}\,\bar{i}$$

$$b\bar{i} + b\bar{k} = k\sqrt{2}\bar{C}_2 + \frac{b}{k^2}\,\bar{i}$$

de unde rezultă valorile constantelor

$$\bar{C}_1 = \left(a - \frac{a}{k^2}\right)\bar{i} + a\bar{j}, \quad \bar{C}_2 = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left[\left(b - \frac{b}{k^2}\right)\bar{i} + b\bar{k}\right].$$

Astfel, expresia lui $\bar{r}$ devine

$$\bar{r} = \bar{i}\left[\left(a - \frac{a}{k^2}\right)\cos k\sqrt{2}t + \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(b - \frac{b}{k^2}\right)\sin k\sqrt{2}t + \frac{a + bt}{k^2}\right] +$$

$$+ \bar{j}a \cos k\sqrt{2}t + \bar{k}\frac{b}{k\sqrt{2}} \sin k\sqrt{2}t,$$

relaţie care, proiectată pe axe, conduce la ecuaţiile parametrice ale traiectoriei

$$x = a\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\cos k\sqrt{2}t + \frac{b}{k\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\sin k\sqrt{2}t + \frac{a + bt}{k^2}$$

$$y = a\cos k\sqrt{2}t$$

$$z = \frac{b}{k\sqrt{2}}\sin k\sqrt{2}t.$$

Punctul descrie o elice înfăşurată pe un cilindru avînd ca axă, axa Ox şi ca bază o elipsă de ecuaţie

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{\frac{b^2}{2k^2}} = 1.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

11.23. Un punct material de greutate Q execută o mişcare pe o dreaptă după legea $x = r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)$.

Să se determine cea mai mare valoare a forţei F, forţă sub acţiunea căreia punctul execută mişcarea.

R. $F = \frac{Q}{g} r\omega^2\left(l + \frac{r}{l}\right)$.

11.24. Un punct de masă m cade pe verticală de la înălţimea h fără viteză iniţială, fiind respins de un plan orizontal cu o forţă proporţională cu distanţa de la punct la plan (coeficient k^2). Să se determine legea de mişcare a punctului.

R. $y = \left(\frac{g}{k^2} - h\right)(ch\,kt - 1)$.

11.25. Un corp cade pe Pămînt de la înălţimea h, fără viteza iniţială. Neglijînd rezistenţa aerului şi considerînd forţa de atracţie a Pămîntului invers proporţională cu pătratul distanţei de la corp la centrul Pămîntului, să se determine timpul T după care corpul ajunge la suprafaţa Pămîntului şi viteza v pe care o are în acel moment. Raza Pămîntului este R, accelerаţia gravitaţiei la suprafaţa lui g.

R. $v = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R + h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R + h}{2}\arccos\frac{R - h}{R + h}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

11.26. O piatră de greutate P este aruncată cu viteza v_0 într-un bazin. Considerînd rezistența apei ca o forță $R = -kmx$ și cunoscînd timpul T în care piatra ajunge la fund, să se determine adîncimea h a bazinului.

R. $h = \frac{g}{h} T - \frac{g - kv_0}{k^2} (1 - e^{-kT})$.

11.27. Un punct M de masă m este lansat din A de la o înălțime h deasupra pămîntului cu o viteză inițială $\bar{v}_0$ înclinată cu unghiul α față de orizontală (fig. 11.27). Să se determine viteza punctului v_B în momentul cînd acesta revine pe pămînt.

R. $v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

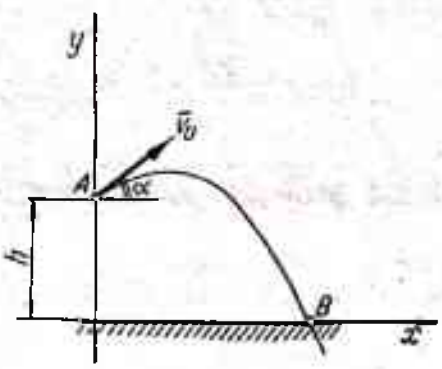


Fig. 11.27

11.28. Să se găsească într-un plan vertical o curbă AMB pe care trebuie să se miște un punct material greu, care suportă din partea aerului o rezistență mkv^2, pentru ca, lansat din punctul A cu o viteză determinată, să ajungă într-un punct oarecare M al acestei curbe, cu o viteză egală aceleia pe care ar dobîndi-o atunci cînd cade vertical, în același mediu, de la o înălțime egală cu arcul MB (W. Walton).

R. Dacă se ia punctul A ca origine, curba este definită de ecuația: $k(x + s) = 1 - e^{-2kx}$.

11.29. Un punct de masă $m = 20$ g descrie sub acțiunea unei forțe centrale ce-l atrage după legea lui Newton, o elipsă de semiaxe 10 cm și 8 cm în 50 s. Să se determine forța de atracție maximă și minimă.

R. $F_{max} = 19.7$ dyn, $F_{min} = 1.2$ dyn.

11.30. Un punct material de masă m este lansat de la înălțimea h deasupra pămîntului cu viteza inițială v_0 orizontală. Considerînd rezistența aerului $R = kmv^2$ să se determine traiectoria punctului.

R. $y = h + \frac{g}{2kv_0^2} x + \frac{g}{4k^2v_0^2} (1 - e^{2kx})$.

11.31. Un punct M este respins de un centru fix O cu o forță $\bar{R} = mk^2\bar{r}$ (fig. 11.31). În momentul inițial $t = 0$, $\bar{r}_0 = a\bar{i}$, $\dot{\bar{r}}_0 = v_0\bar{j}$. Să se studieze mișcarea, să se determine traiectoria descrisă de punct.

R. Hiperbola: $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2y^2}{v_0^2}$.

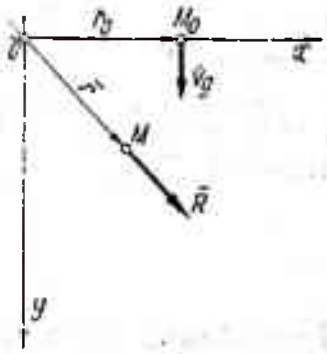


Fig. 11.31

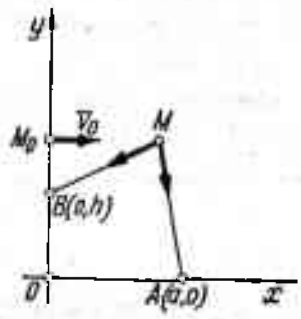


Fig. 11.32

11.32. Un punct M de masă m se mișcă în planul xOy sub acțiunea unor forțe de atracție exercitate de punctele fixe $A(a, 0)$ și $B(0, h)$, constantă, mk^2 (fig. 11.32). Să se studieze mișcarea punctului M.
Condiții inițiale: $t = 0$, $\bar{r} = h\bar{j}$ și $\dot{\bar{r}} = v_0\bar{i}$.

R. $x = \frac{a}{2}(1 - \cos k\sqrt{2}t) + \frac{v_0}{k\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}kt$

$$y = \frac{1}{2}\left[\left(h - \frac{g}{k^2}\right)(1 - \cos k\sqrt{2}t)\right] + h\cos k\sqrt{2}t.$$

11.33. Doi meteoriți M_1 și M_2 descriu o elipsă în focarul căruia se află Soarele (fig. 11.33). Distanța M_1M_2 se poate aproxima cu o dreaptă. Se cunoaște $M_1M_2 = a$ cînd jumătatea ei se găsea la periheliu în P. Știind că me-

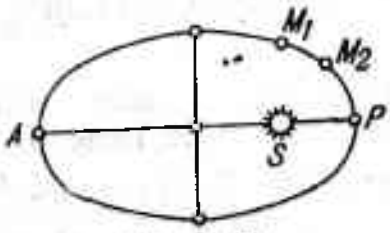


Fig. 11.33

teoriții se mișcă cu viteză areolară constantă, să se determine lungimea segmentului M_1M_2 cînd mijlocul lui se găsește la afeliu A. Se cunosc distanțele $SP = R_1$ și $SA = R_2$.

R. $M_1M_2 = \frac{R_1}{R_2}a$.

XII. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este studiul mişcării punctului material constrîns să respecte anumite condiţii restrictive ale mişcării sale, oricare ar fi forţele care îl acţionează. Pentru studiul mişcării punctului în cazul legăturilor celor mai generale se introduce o axiomă cunoscută sub numele de:

Axioma legăturilor. Pentru orice legături impuse unui punct material, există un sistem de forţe de legătură, astfel încît sub acţiunea lor şi a forţelor direct aplicate, punctul să poată fi considerat liber.

Ecuaţia mişcării punctului este

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R},$$

unde $\bar{F}$ este rezultanta forţelor aplicate, iar $\bar{R}$ rezultanta forţelor de legătură.

Formule de bază. Legăturile pot fi *fără frecare* (reacţiunea este normală la planul tangent — punct obligat să se găsească pe o suprafaţă, respectiv se găseşte în planul normal — punctul se găseşte pe o curbă) sau *cu frecare.* În cazul legăturilor cu frecare apar în plus forţe dirijate în sens opus mişcării punctului şi situate în planul tangent la suprafaţă, respectiv pe tangenta la curbă.

Utilă în aplicaţii este în special proiectarea ecuaţiei mişcării pe axele triedrului intrinsec

$$m\frac{dv}{dt} = F_{\bar{\tau}}, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_{\bar{\nu}} + R_{\bar{\nu}}, \quad 0 = F_{\bar{\beta}} + R_{\bar{\beta}},$$

unde ρ este raza de curbură a traiectoriei, $\bar{\tau}$ versorul tangentei, $\bar{\nu}$ versorul normalei principale, $\bar{\beta}$ versorul binormalei.

Probleme rezolvate

12.1. Pe un plan înclinat AB se aruncă din A în sus, paralel cu planul, un punct material cu viteza $\bar{v}_0$ (fig. 12.1). Lungimea planului înclinat, în sensul liniei de cea mai mare pantă, este $\frac{v_0^2}{g}$. În punctul B mobilul părăseşte planul pentru a cădea în C, la acelaşi nivel cu A. Să se găsească: a) viteza în B; b) reacţiunea planului înclinat; c) distanţa AC.

Rezolvare. a) Mişcarea de porţiunea AB

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha$$

$$m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + N = 0.$$

Prin integrare se obțin soluțiile

$$x = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha + C_1 t + C_2$$

$$N = mg\cos\alpha.$$

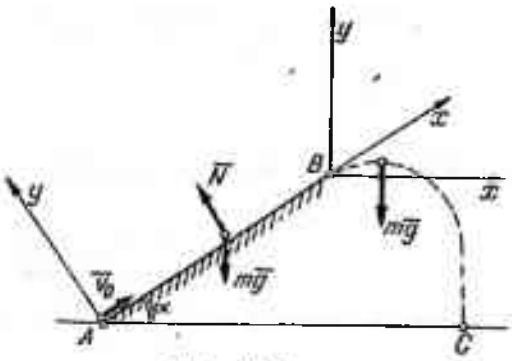


Fig. 12.1

Cu condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, constantele de integrare sînt

$$C_2 = 0, \qquad v_0\cos\alpha = C_1,$$

deci

$$x = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha + v_0 t$$

$$\dot{x} = -gt\sin\alpha + v_0.$$

Pentru

$$x = \frac{v_0^2}{g} = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha + v_0 t = x_B,$$

$$t_B = \frac{v_0}{g\sin\alpha}[1 \pm \sqrt{1 - 2\sin\alpha}].$$

Viteza punctului B este

$$v_B = \dot{x}_B = v_0 - g\sin\alpha \cdot \frac{v_0}{g\sin\alpha}(1 \pm \sqrt{1 - 2\sin\alpha}) = v_0\sqrt{1 - 2\sin\alpha}.$$

b) Reacțiunea planului este

$$N = mg\cos\alpha.$$

c) Mișcarea pe porțiunea BC se studiază cu ecuațiile

$$m\ddot{x} = 0, \quad \dot{x} = C_1', \quad x = C_1' t + C_2'$$

$$m\ddot{y} = -mg, \quad \dot{y} = -gt + C_3', \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_3' t + C_4'.$$

Cu condițiile inițiale

$$t = 0, \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_B\cos\alpha, \quad y = 0, \quad \dot{y} = v_B\sin\alpha,$$

constantele de integrare devin

$$C_2' = C_4' = 0, \quad C_1' = v_B\cos\alpha, \quad C_3' = v_B\sin\alpha.$$

Soluția problemei este dată de ecuațiile parametrice

$$x = v_B t\cos\alpha$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_B t\sin\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd parametrul t între ecuațiile acestui sistem

$$t = \frac{x}{v_B \cos \alpha}$$

obținem ecuația traiectoriei

$$y = -\frac{gx^2}{2v_B^2(1 - 2\sin\alpha)\cos^2\alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Abscisa punctului C față de sistemul xBy este

$$x_C = \frac{v_B^2(1 - 2\sin\alpha)}{g} \cos\alpha \left[\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\sin\alpha}{1 - 2\sin\alpha}}\right].$$

Distanța AC este deci

$$x_{AC} = \frac{v_B^2 \cos\alpha}{g}\left[1 + (1 - 2\sin\alpha)\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2\sin\alpha}{1 - 2\sin\alpha}}\right)\right].$$

12.2. Să se studieze mișcarea pe un plan înclinat a unui punct material M, lansat cu viteza inițială $\bar{v}_0$ paralelă cu planul (fig. 12.2). Se cunosc coeficientul de frecare f și forța rezistentă $\bar{R} = -mgk\bar{v}$.

Rezolvare. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sînt

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - F - mgk\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + N = 0$$

și

$$F = fN = fmg\cos\alpha.$$

Ținînd seama de a doua și a treia ecuație prima devine

$$\ddot{x} + gk\dot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Integrînd-o obținem

$$x = C_1 + C_2 e^{-gkt} - \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{k}\, t$$

$$\dot{x} = -gkC_2 e^{-gkt} - \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{k}.$$

Cu condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, constantele de integrare sînt

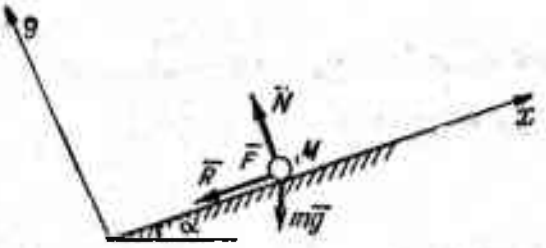


Fig. 12.2

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0 k + \sin\alpha + f\cos\alpha}{gk^2}$$

și ecuația mișcării devine

$$x = \left(\frac{v_0}{gk} + \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{gk^2}\right)(1 - e^{-gkt}) - \frac{(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,t}{k}$$

sau

$$x = \left(\frac{v_0}{gk} + \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{gk^2}\right)(1 - 1 + gkt \ldots) - \frac{(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,t}{k}.$$

Punctul urcă pe planul înclinat pînă în momentul cînd se anulează viteza sa adică la timpul

$$t_1 = \frac{v_0}{g(kv_0 + \sin\alpha + f\cos\alpha)}.$$

Spațiul parcurs în acest interval de timp este

$$x = \frac{v_0^2}{g}\,\frac{1}{kv_0 + \sin\alpha + f\cos\alpha}.$$

Se observă că pentru $k = 0$, respectiv pentru $k = 0$ și $f = 0$, se regăsesc relațiile cunoscute privind distanțele parcurse de un punct lansat cu viteză v_0 pe un plan înclinat aspru, respectiv luciu.

12.3. Printr-o scîndură care formează unghiul α cu orizontala urmează să se realizeze un canal drept AB, astfel încît un punct material lansat, fără viteză inițială la deschiderea superioară a canalului, să treacă prin scîndură în timpul cel mai scurt sub acțiunea gravitației (fig. 12.3). Neglijînd frecarea să se determine sub ce unghi φ față de verticală trebuie executat acest canal.

Rezolvare. Mișcarea punctului este dată de ecuația

$$m\ddot{x} = mg\cos\varphi$$

cu soluția

$$x = \frac{gt^2}{2}\cos\varphi$$

sau

$$t^2 = \frac{2x}{g\cos\varphi}.$$

Există relația geometrică:

$$l\sin\alpha = x_B\cos(\alpha - \varphi)$$

deci

$$t^2 = \frac{2}{g\cos\varphi}\,\frac{l\sin\alpha}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

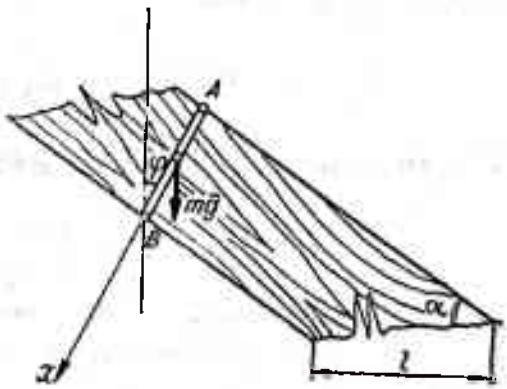


Fig 12.3

sau

$$t = \sqrt{\frac{2l\sin\alpha}{g}}\,\sqrt{\frac{1}{\cos\varphi\cos(\alpha - \varphi)}}.$$

t este minim pentru $\frac{dt}{d\alpha} = 0$, adică

$$\sin\varphi\cos(\alpha - \varphi) - \cos\varphi\sin(\alpha - \varphi) = 0.$$

ecuaţie satisfăcută pentru

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

12.4. Pe un acoperiş de deschidere $2a$ cade o picătură de ploaie de la coama C, avînd o viteză iniţială $\bar{v}_0$ după direcţia planului învelitorii (fig. 12.4). Să se determine condiţia pe care trebuie s-o îndeplinească unghiul α al învelitorii astfel ca picătura să ajungă în cel mai scurt timp la jgheabul din A, fără a ţine cont de rezistenţa aerului şi de frecare.

Rezolvare. Ecuaţiile de mişcare ale punctului sînt

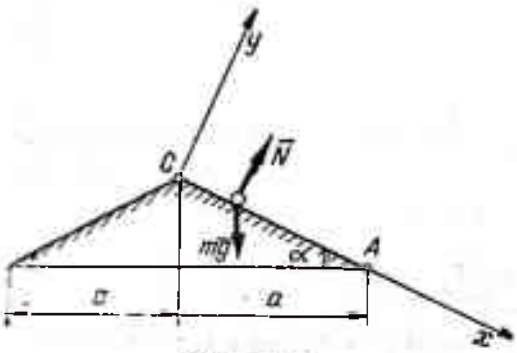


Fig. 12.4

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha$$

$$m\ddot{y} = N - mg \cos \alpha = 0.$$

Prin integrarea primei ecuaţii obţinem

$$\dot{x} = gt \sin \alpha + C_1$$

$$x = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha + C_1 t + C_2.$$

Condiţiile iniţiale fiind $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, constantele de integrare devin $C_2 = 0$, $C_1 = v_0$ şi soluţia este deci

$$x = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha + v_0 t.$$

Cînd $x = x_A$, avem

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha + v_0 t.$$

Timpul t este dat de soluţia acestei ecuaţii

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2g \sin \alpha \frac{a}{\cos \alpha}}}{g \sin \alpha}.$$

Condiţia de minim se obţine din $\frac{dt}{d\alpha} = 0$, adică

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{ga \sin \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{v_0^2 + 2ga \operatorname{tg} \alpha}} + v_0 \cos \alpha - \cos \alpha \sqrt{v_0^2 + 2ga \operatorname{tg} \alpha} = 0.$$

Unghiul α care satisface problema este soluţia ecuaţiei

$$ga \cos^2 2\alpha - v_0^2 \cos^2 \alpha \sin 2\alpha = 0.$$

12.5. Un vagonet de masă m, alunecă de la înălțimea h pe un plan înclinat, fără frecare. În prelungirea pantei se găsește o circumferință de rază R (fig. 12.5). Se cer:

a) înălțimea h pentru ca în mișcarea sa vagonetul să parcurgă întreaga circumferință;

b) înălțimea h pentru ca vagonetul să ajungă în punctul A definit de unghiul α cu verticala (să se particularizeze pentru $\alpha = 45°$);

c) să se determine variația reacțiunii N.

a) Pentru ca vagonetul să parcurgă întreaga circumferință trebuie ca în orice punct $N > 0$.

Ecuațiile de mișcare pe circumferința $BDCA$ sînt

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$mR\dot{\theta}^2 = N - mg \cos \theta.$$

Multiplicînd prima ecuație cu $\dot{\theta}$ și integrînd, obținem

$$R\dot{\theta}^2 = 2g \cos \theta + C.$$

Condițiile inițiale sînt $\theta = 0$, $R\dot{\theta} = \sqrt{2gh}$ și rezultă pentru constanta C valoarea

$$C = \frac{2gh}{R} - 2g$$

astfel încît

$$R\dot{\theta}^2 = +2g \cos \theta + \frac{2gh}{R} - 2g.$$

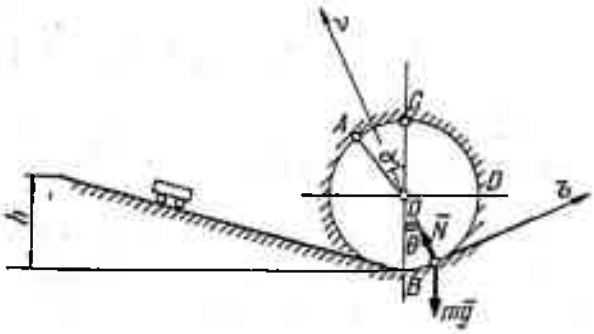


Fig. 12.5

Din a doua ecuație obținem pentru reacțiunea N valoarea

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = G\left(3 \cos \theta + \frac{2h}{R} - 2\right).$$

Punctul cel mai periculos în care vagonetul poate părăsi circumferința corespunde lui $\theta = \pi$. Pentru această valoare, deoarece $N \geqslant 0$, h trebuie să satisfacă inegalitatea

$$3 \cos \pi + \frac{2h}{R} - 2 \geqslant 0,$$

adică

$$h \geqslant 2,5R.$$

b) În punctul A trebuie ca $N \geqslant 0$. Deoarece $\theta = \pi + \alpha$,

$$N = G\left[3 \cos (\pi + \alpha) + \frac{2h}{R} - 2\right] = G\left[\frac{2h}{R} - 3 \cos \alpha - 2\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția $N \geqslant 0$ este satisfăcută pentru

$$h \geqslant \frac{R}{2}(2 + 3\cos\alpha).$$

Pentru $\alpha = 45°$

$$h \geqslant R\left(1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right) \approx 2{,}06\,R.$$

c) Variația reacțiunii $N = G\left(3\cos\theta + \frac{2h}{R} - 2\right)$ este:

— în B: $\theta = 0$, $N_B = G\left(3 + \frac{2h}{R} - 2\right) = G\left(\frac{2h}{R} + 1\right)$;

— în D: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $N_D = G\left(\frac{2h}{R} - 2\right)$;

— în C: $\theta = \pi$, $N_C = G\left(\frac{2h}{R} - 5\right)$;

— în A: $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$, $N_A = G\left(3\cos\frac{\pi}{4} + \frac{2h}{R} - 2\right) = G\left(\frac{2h}{R} - 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

12.6 În punctul fix O este fixat un fir OM de lungime l la capătul căruia se găsește greutatea M, de masă m (fig. 12.6). În momentul inițial firul formează cu verticala unghiul α și viteza greutății M este nulă. În mișcarea sa ulterioară firul întîlnește un opritor O_1, a cărui direcție este perpendiculară pe suprafața de mișcare a greutății M, iar poziția sa este definită prin $OO_1 = h$ și prin unghiul β.

Să se determine valoarea minimă a unghiului α pentru care firul OM după ce întîlnește opritorul O_1 se va înfășura. Se neglijează grosimea opritorului.

Rezolvare. Pentru a găsi viteza punctului M în momentul cînd pendulul întîlnește opritorul utilizăm teorema energiei

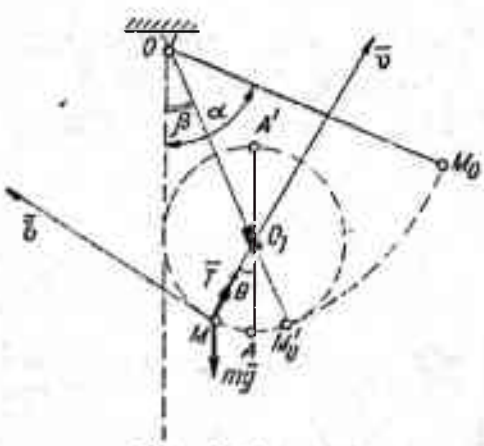


Fig. 12.6

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl(\cos\beta - \cos\alpha)$$

sau

$$v_0^2 = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha).$$

După poziția M_0', punctul execută o mișcare circulară, pe un cerc de rază $l - h$.

Ecuația diferențială a mișcării punctului material M, proiectată pe axele triedrului lui Frenet, este

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \qquad m\frac{v^2}{\rho} = T - mg\cos\theta.$$

În acest caz, $\rho = (l - h)$, $v = (l - h)\ \dot{\theta}$, deci vom avea

$$(l - h)\ \ddot{\theta} = -g \sin \theta;$$

$$m \frac{v^2}{l - h} = T - mg \cos \theta.$$

Integrînd prima ecuație, obținem

$$(l - h)\dot{\theta}^2 = 2g \cos \theta + C$$

sau

$$\frac{v^2}{l - h} = 2g \cos \theta + C.$$

Cu condițiile inițiale $t = 0$, $\theta = -\beta$
$v^2 = 2gl(\cos \beta - \cos \alpha)$, constanta de integrare este

$$C = \frac{2gl(\cos \beta - \cos \alpha)}{l - h} - 2g \cos \beta,$$

astfel că

$$\frac{v^2}{l - h} = 2g \cos \theta + \frac{2gl(\cos \beta - \cos \alpha)}{l - h} - 2g \cos \beta.$$

Din ecuația a doua a sistemului de ecuații de mișcare rezultă

$$T = m \frac{v^2}{l - h} + mg \cos \theta = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \beta + \frac{2mgl\,(\cos \beta - \cos \alpha)}{l - h}.$$

Pentru ca firul să se înfășoare trebuie ca la $\theta = \pi$, $T \geqslant 0$,
deci

$$mg(-3 - 2 \cos \beta) + \frac{2mgl\,(\cos \beta - \cos \alpha)}{l - h} \geqslant 0$$

sau

$$\cos \alpha \leqslant \frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos \beta\right) - \frac{3}{2}.$$

12.7. Un punct de masă m este suspendat cu un fir de lungime l de un punct O. Punctul este obligat să se deplaseze pe un cerc de rază r, cu viteza constantă v_φ (fig. 12.7). Care este tensiunea din fir și cu cît este egală perioada unei mișcări complete?

Rezolvare. Proiectăm ecuația de mișcare a punctului pe direcția axei verticale și pe direcția razei cercului

$$m\ddot{z} = -mg + T_1 \cos \alpha = 0,$$

deoarece punctul trebuie să se mențină în plan orizontal.

$$m \frac{v_\varphi^2}{l \sin \alpha} = T_1 \sin \alpha.$$

Rezultă

$$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha} \quad \text{şi} \quad v_0^2 = \frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Perioada mişcării este

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi \cdot l\sin\alpha}{\sin\alpha\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}},$$

$$\text{unde } \sin\alpha = \frac{R}{l}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{l^2 - R^2}{l^2}}.$$

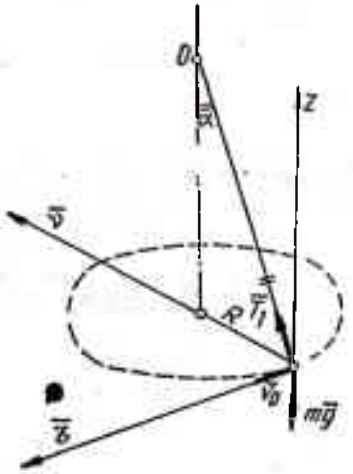


Fig 12.7

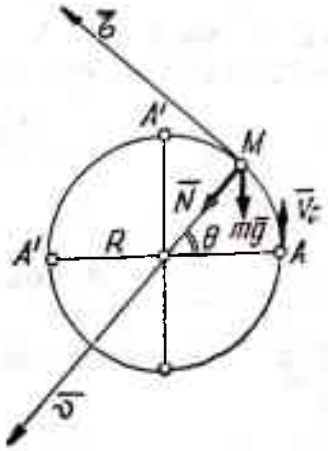


Fig. 12.8

12.8. Se lansează un punct material de masă m, cu viteză verticală $\bar{v}_0$, pe faţa interioară a unui cerc vertical (fig. 12.8). Să se studieze mişcarea. Care este limita inferioară a lui v_0 pentru ca mobilul să nu părăsească cercul înainte de a ajunge în A'?

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială a mişcării punctului M, proiectată pe axele de versori $\bar{\tau}$ şi $\bar{\nu}$, conduce la sistemul

$$mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta$$

$$mR\dot{\theta}^2 = N + mg\sin\theta.$$

Din prima ecuaţie rezultă prin înmulţire cu $\dot{\theta}$ integrala primă

$$R\dot{\theta}^2 = -2g\sin\theta + C.$$

Cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $\theta = 0$, $R\dot{\theta} = v_0$, rezultă $\frac{v_0^2}{R} = C$, deci

$$R\dot{\theta}^2 = -2g\sin\theta + \frac{v_0^2}{R}.$$

Reacţiunea curbei se obţine din ecuaţia a doua sub forma

$$N = mR\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta = m\left(-2g \sin \theta + \frac{v_0^2}{R}\right) - mg \sin \theta = -3mg \sin \theta + \frac{mv_0^2}{R}.$$

Pentru ca mobilul să nu părăsească cercul trebuie ca

$$N > 0, \quad \text{adică} \quad -3mg \sin \theta + \frac{mv_0^2}{R} > 0.$$

Rezultă condiţia

$$v_0 > \sqrt{3Rg \sin \theta}.$$

Pentru ca mobilul să ajungă în A'

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \; v_0 > \sqrt{3Rg}.$$

12.9. Printr-un tub circular, formînd periferia unui cerc de rază R, alunecă fără frecare un punct material de masă m (fig. 12.9). Să se studieze mişcarea punctului şi să se determine viteza lui ştiind că:

a) punctul este atras de diametrul vertical Oy cu o forţă $F = k^2mx$;

b) punctul este atras de A' cu forţa k^2mr, unde $r = A'M$.

Rezolvare. a) Ecuaţiile de mişcare ale punctului sînt date de sistemul

$$mR\ddot{\theta} = mg \cos \theta + F \sin \theta$$

$$mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta + N + F \cos \theta.$$

Dar

$$F = k^2mx = k^2m \cdot R \cos \theta,$$

deci

$$mR\ddot{\theta} = mg \cos \theta + k^2mR \cos \theta \sin \theta$$

$$mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta + N + k^2mR \cos^2 \theta.$$

Multiplicînd prima ecuaţie cu $\dot{\theta}$ obţinem prin integrare

$$R\dot{\theta}^2 = 2g \sin \theta - \frac{1}{2} k^2R \cos 2\theta + C.$$

Reacţiunea N va fi

$$N = 3mg \sin \theta - \frac{1}{2} k^2mR \cos 2\theta - k^2mR \cos^2 \theta + C,$$

iar viteza punctului

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 = 2gR \sin \theta - \frac{1}{2} k^2R \cos 2\theta + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) În cel de-al doilea caz, forța F are expresia

$$F = k^2 m \cdot A'M = k^2 m \cdot 2\ R \cos \frac{90 + \theta}{2}$$

și sistemul de ecuații de mișcare este

$$mR\ddot{\theta} = mg \cos \theta + 2k^2 mR \cos \frac{90 - \theta}{2} \cos \frac{90 + \theta}{2}$$

$$mR\dot{\theta}^2 = -\ mg \sin \theta + N + k^2 m 2R \cos \frac{90 + \theta}{2} \sin \frac{90 - \theta}{2}$$

sau

$$mR\ddot{\theta} = mg \cos \theta + 2k^2 mR \cdot \frac{1}{2} \cos \theta$$

$$mR\dot{\theta}^2 = -\ mg \sin \theta + N + k^2 m 2R \cdot \frac{1}{2} (1 - \sin \theta).$$

Înmulțind prima ecuație din acest sistem cu $2\dot{\theta}$ și integrînd, se obține

$$R\dot{\theta}^2 = 2g \sin \theta + 2\ k^2 R \sin \theta.$$

Reacțiunea N va fi

$$N = 3mg \sin \theta + 3mk^2 R \sin \theta - k^2 mR$$

și viteza punctului

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 = 2gR \sin \theta + 2k^2 R^2 \sin \theta.$$

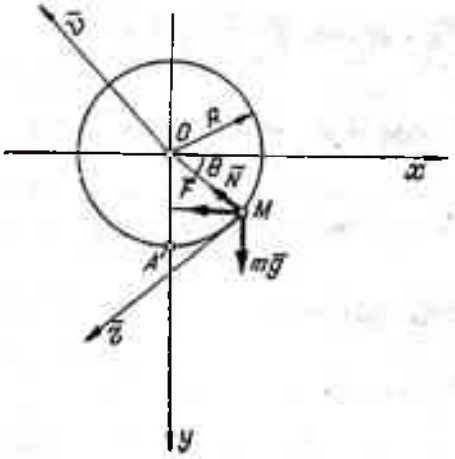


Fig 12.9

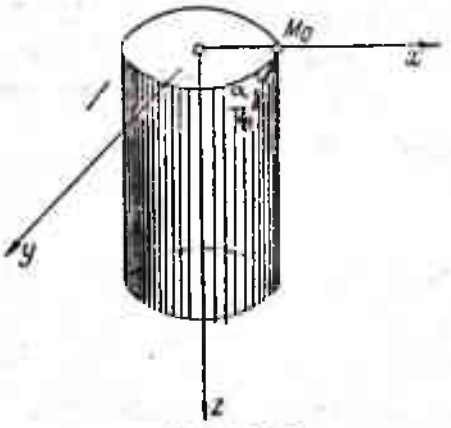


Fig. 12.10

12.10. Un punct de masă m se mișcă în interiorul suprafeței lucii a unui cilindru circular drept de rază r (fig. 12.10). Considerînd mișcarea punctului sub acțiunea greutății proprii să se determine mărimea reacțiunii $\bar{N}$. În momentul inițial punctul se găsea în M_0 și avea viteza $\bar{v}_0$, înclinată cu unghiul α față de planul orizontal.

Rezolvare. Ecuațiile parametrice ale suprafeței cilindrice sînt

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z. \tag{a}$$

Ecuațiile de mișcare ale punctului pe suprafață pot fi scrise sub forma

$$(X - m\ddot{x})\frac{\partial x}{\partial\theta} + (Y - m\ddot{y})\frac{\partial y}{\partial\theta} + (Z - m\ddot{z})\frac{\partial z}{\partial\theta} = 0$$

$$(X - m\ddot{x})\frac{\partial x}{\partial z} + (Y - m\ddot{y})\frac{\partial y}{\partial z} + (Z - m\ddot{z})\frac{\partial z}{\partial z} = 0.$$

Dar

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

iar

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg,$$

deci ecuațiile devin

$$m\ddot{x}r\sin\theta - m\ddot{y}r\cos\theta = 0$$
$$mg - m\ddot{z} = 0$$

sau

$$\ddot{x}\,\mathrm{tg}\,\theta = \ddot{y}, \quad \ddot{z} = g, \tag{b}$$

Din relațiile (a) se observă că

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{x}{y}$$

și introducînd în prima relație (b) avem

$$\ddot{x}y - x\ddot{y} = 0$$

care se mai poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}y - x\dot{y}) = 0$$

sau

$$\dot{x}y - x\dot{y} = C.$$

Constanta de integrare se determină cu condițiile inițiale $x = r$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v_0\cos\alpha$, și are expresia $C = -rv_0\cos\alpha$, deci

$$\dot{x}y - x\dot{y} = -v_0 r\cos\alpha.$$

Din ecuația curbei

$$x^2 + y^2 = r^2$$

prin derivare obținem

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultimele două relaţii rezultă

$$\dot{x} = -\frac{v_0 y \cos\alpha}{r}, \quad \dot{y} = \frac{v_0 x \cos\alpha}{r}$$

şi

$$\ddot{x} = -\frac{v_0 \cos\alpha}{r}\dot{y} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{r^2} y$$

$$\ddot{y} = \frac{v_0 \cos\alpha}{r}\dot{x} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{r^2} x. \qquad \text{(c)}$$

Ecuaţia de mişcare a punctului, proiectată pe axele Ox şi Oy, duce la

$$m\ddot{x} = N\cos\theta.$$

$$m\ddot{y} = N\sin\theta$$

de unde

$$N = m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

şi înlocuind expresiile (c) obţinem pentru reacţiunea suprafeţei

$$N = m\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{r^2}\sqrt{x^2+y^2} = m\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{r}.$$

12.11. Un punct material de masă m se mişcă pe parabola $y = \frac{x^2}{2p}$ (fig. 12.11). Să se studieze mişcarea punctului şi să se determine reacţiunea curbei, ştiind că la momentul iniţial $t = 0$, punctul se afla în vîrful parabolei şi avea viteza orizontală $\bar{v}_0$.

Rezolvare. Ecuaţiile curbei sînt

$$f_1(x, y, z) = 2py - x^2 = 0$$

$$f_2(x, y, z) = z = 0.$$

Ecuaţiile de mişcare ale punctului sînt în acest caz

$$m\ddot{x} = X + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = Y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = Z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = +2p, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1$$

$$X = 0, \quad Y = -mg, \quad Z = 0.$$

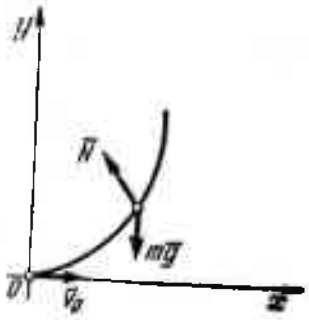


Fig 12.11

Înlocuind expresiile derivatelor parţiale în ecuaţiile de mişcare, obţinem sistemul

$$m\ddot{x} = -\lambda_1 \cdot 2x, \quad m\ddot{y} = -mg + 2\lambda_1 p, \quad m\ddot{z} = \lambda_2.$$

Soluţiile acestui sistem sînt

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{2\lambda_1}{m}}\, t + C_2 \sin\sqrt{\frac{2\lambda_1}{m}}\, t$$

$$y = \left(-g + 2\frac{\lambda_1}{m} p\right)\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$$

$$z = \frac{\lambda_2}{m}\frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Constantele de integrare se determină prin condiţiile iniţiale ale problemei $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$; prin urmare

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{2\lambda_1}{m}}}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = 0$$

şi soluţiile devin

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{2\lambda_1}{m}}} \sin\sqrt{\frac{2\lambda_1}{m}}\, t.$$

$$y = \left(-g + 2\frac{\lambda_1}{m} p\right)\frac{t^2}{2}$$

$$z = \frac{\lambda_2}{m}\frac{t^2}{2} = 0.$$

Din ultima relaţie rezultă $\lambda_2 = 0$. La primele două adăugăm ecuaţia curbei

$$2py = x^2,$$

care trebuie să fie satisfăcută de aceste soluţii. Obţinem

$$\frac{v_0^2 m}{2\lambda_1} \sin^2\sqrt{\frac{2\lambda_1}{m}}\, t = \left(-g + 2\frac{\lambda_1}{m} p\right)\frac{t^2}{2} \cdot 2p$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, dezvoltînd în serie $\sin^2\sqrt{\frac{2\lambda_1}{m}}\,t$,

$$\frac{v_0^2 m}{2\lambda_1}\left[1-\left(1-\frac{2\lambda_1}{m}\cdot\frac{t^2}{2}\right)^2\right]=\left(-g+2\frac{\lambda_1}{m}p\right)\frac{t^2}{2}\cdot 2p.$$

Printr-o grupare convenabilă a termenilor, ecuaţia devine

$$\lambda_1\left(\frac{2p^2}{m}+\frac{v_0^2t^2}{2m}\right)=v_0^2+pg,$$

de unde

$$\lambda_1=\frac{2m(v_0^2+pg)}{4p^2+v_0^2t^2}.$$

Se obţine pentru N

$$N_x=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{2m(v_0^2+pg)}{3p^2+v_0^2t^2}(-2x)=-\frac{4mx(v_0^2+pg)}{4p^2+v_0^2t^2}$$

$$N_y=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{4mp(v_0^2+pg)}{4p^2+v_0^2t^2},$$

iar

$$N=\sqrt{N_x^2+N_y^2}=\frac{4m(v_0^2+pg)}{4p^2+v_0^2t^2}\sqrt{x^2+p^2}.$$

Problema se mai poate rezolva şi în alt mod. Ecuaţia de mişcare a punctului, proiectată pe direcţiile tangentei şi normalei la curbă în punctul considerat, duce la:

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\theta$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=N-mg\cos\theta$$

unde θ este unghiul făcut de tangenta la curbă în punctul respectiv, cu axa Ox.

Existînd relaţiile:

$$\operatorname{tg}\theta=y'=\frac{x}{p};\quad \cos\theta=\frac{p}{\sqrt{p^2+x^2}};\quad \sin\theta=\frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}}$$

iar

$$\rho=\frac{1}{y''}(1+y'^2)^{3/2}=\frac{1}{p^2}\sqrt{(p^2+x^2)^3}$$

ecuaţiile de mai sus devin:

$$\frac{dv}{dt}=-g\frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}}$$

$$\frac{mp^2v^2}{\sqrt{(p^2+x^2)^3}}=N-mg\frac{p}{\sqrt{p^2+x^2}}$$

care prin integrare, cu condițiile inițiale date, duc la soluțiile:

$$v^2 = v_0^2 + 2gp - 2g\sqrt{p^2 + x^2}$$

$$N = mg\frac{p}{\sqrt{p^2+x^2}} + \frac{mp^2}{\sqrt{(p^2+x^2)^3}}(v_0^2 + 2gp - 2g\sqrt{p^2+x^2}).$$

Se obțin mărimile vitezei și reacțiunii în funcție de poziția punctului pe curbă.

12.12. Un punct de masă $m = 1$ se mișcă fără frecare pe curba strîmbă $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$, fiind solicitat de o forță ale cărei proiecții sînt: $F_x = 4k^2x$, $F_y = \frac{9}{2}k^2y$, $F_z = 2k^2(3z + a)$. La $t = 0$, $v_0 = ak$ și punctul se găsește în origine. Să se studieze mișcarea.

Rezolvare. Alegînd z ca parametru, ecuațiile curbe se scriu

$$x = \frac{z^2}{2a}, \quad y = \frac{4}{3}z\sqrt{\frac{z}{2a}}, \quad z = z.$$

Dar

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{2z}{a} + 1\right)\dot{z}^2$$

și funcția de forțe

$$U = \int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \frac{k^2}{2a^2}(z + a)^4.$$

Se scrie ecuația energiei

$$m\frac{v^2}{2} = U + h,$$

care — cu datele și condițiile inițiale ale problemei — devine

$$\left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{2z}{a} + 1\right)\dot{z}^2 = \frac{k^2}{a^2}(z + a)^4$$

sau

$$\frac{(z+a)^2}{a^2}\dot{z}^2 = \frac{k^2}{a^2}(z + a)^4$$

și

$$\dot{z} = k(z + a) \quad \text{sau} \quad \frac{dz}{k(z+a)} = dt.$$

Integrînd, rezultă

$$\frac{1}{k}\ln(z + a) = t, \quad \text{de unde} \quad z = e^{kt} - a.$$

Avem

$$x = \frac{1}{2a}(e^{kt} - a)^2$$

$$y = \frac{4}{3\sqrt{2a}}(e^{kt} - a)^{3/2}.$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării punctului de masă $m = 1$, proiectată pe axe, va fi

$$m\ddot{x} = F_x + N_x$$

$$m\ddot{y} = F_y + N_y$$

$$m\ddot{z} = F_z + N_z.$$

Rezultă pentru componentele reacţiunii curbei

$$N_x = m\ddot{x} - F_x$$

$$N_y = m\ddot{y} - F_y$$

$$N_z = m\ddot{z} - F_z,$$

deci reacţiunea curbei este

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

12.13. Un corp de greutate $\bar{P}$ alunecă pe planul înclinat AB, iar apoi parcurge distanţa BC pe planul orizontal Bx (fig. 12.13). Să se studieze mişcarea considerînd corpul că porneşte din A fără viteză iniţială şi să se determine distanţa BC, coeficientul de frecare dintre corp şi cele două planuri fiind $f = \operatorname{tg} \varphi$. Să se examineze şi cazul cînd planul BC ar fi înclinat cu unghiul β. Cît de mare este distanţa BC pe care o parcurge mobilul?

R. $BC = h_1 \dfrac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha \sin\varphi}$

$$BC' = \frac{h_1 \sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha \sin(\beta + \varphi)}.$$

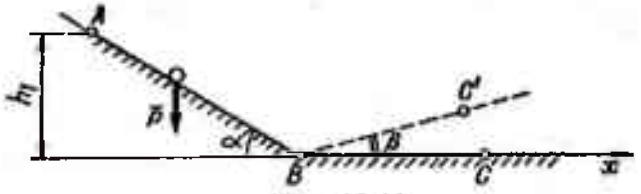


Fig. 12.13

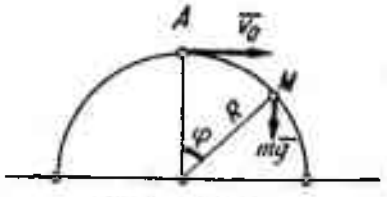


Fig. 12.14

12.14. Un punct M, de masă m, se găseşte în momentul iniţial $t = 0$ în punctul A, pe un cerc de rază R (fig. 12.14). Punctului i se imprimă o viteză orizontală $\bar{v}_0$. Sub ce unghi φ, părăseşte punctul cercul?

R. $\varphi = \arccos\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{v_0^2}{3gR}\right)$.

12.15. Un punct greu, care se mişcă în interiorul unui cerc vertical de rază R, este lansat din punctul cel mai jos al cercului cu viteza iniţială $\bar{v}_0$ (fig. 12.15). La un moment dat punctul părăseşte cercul şi continuă mişcarea descriind o parabolă. Cît trebuie să fie v_0 astfel încît parabola să treacă prin O?

R. $v_0^2 = gR(2 + \sqrt{3})$.

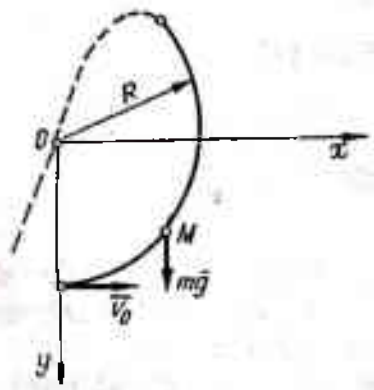


Fig. 12.15

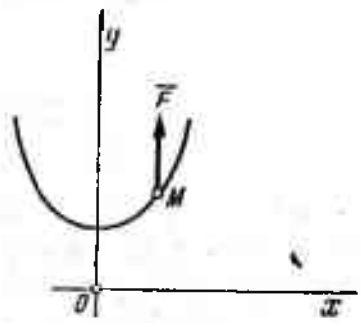


Fig. 12.16

12.16. Un punct de masă m se mişcă pe curba $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ sub acţiunea unei forţe $F = kmy$, paralelă cu axa Oy (fig. 12.16). La timpul $t = 0$, se dau:

$$x = l, \quad \dot{x} = 1 \text{ m/s}.$$

Să se determine reacţiunea curbei N şi mişcarea punctului pentru

$$k = 1 \text{ s}^{-2}, \; a = 1 \text{ m}.$$

R. $N = 0, \quad x = 1 + t$.

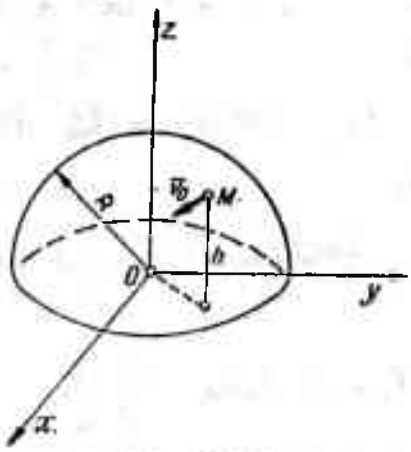


Fig. 12.17

12.17. Un punct de masă m se mişcă pe suprafaţa lucie a unei emisfere de rază R (fig. 12.17). Ştiind că punctul este supus acţiunii greutăţii

proprii şi că la momentul iniţial avea viteza $\bar{v}_0$ şi se găsea la înălţimea h_0 de la baza cupolei, să se determine reacţiunea cupolei atunci cînd punctul se va găsi la înălţimea h.

R. $N = \frac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \frac{v_0^2}{g}\right)$.

XIII. MOMENTE DE INERŢIE

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului. În acest capitol sînt cuprinse proprietăţile de bază ale momentelor de inerţie, elemente geometrice care caracterizează sistemele de puncte materiale din punct de vedere al răspîndirii masei.

Relaţii şi formule de bază. Se numeşte *moment de inerţie* al unui sistem de n puncte materiale $A_i (i = 1, ..., n)$, de mase m_i, suma

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \delta_i^2$$

unde δ_i reprezintă distanţa de la punctul A_i la un plan, o dreaptă sau un punct. După figura geometrică în raport cu care se calculează momentul de inerţie, acesta poartă respectiv numele de moment de inerţie planar, axial sau polar.

În cazul sistemului din figura XIII.1, între momentele de inerţie planare

$$I_{x_1O_1y_1} = \Sigma m_i z_{1i}^2, \quad I_{x_1O_1z_1} = \Sigma m_i y_{1i}^2, \quad I_{y_1O_1z_1} = \Sigma m_i x_{1i}^2,$$

momentele de inerţie axiale

$$I_{z_1} = \Sigma m_i (y_{1i}^2 + z_{1i}^2), \quad I_{y_1} = \Sigma m_i (x_{1i}^2 + z_{1i}^2), \quad I_{z_1} = \Sigma m_i (x_{1i}^2 + y_{1i}^2)$$

şi momentul de inerţie polar

$$I_{O_1} = \Sigma m_i (x_{1i}^2 + y_{1i}^2 + z_{1i}^2)$$

există următoarea relaţie

$$I_{O_1} = I_{x_1O_1y_1} + I_{y_1O_1z_1} + I_{x_1O_1z_1} = \frac{1}{2}(I_{x_1} + I_{y_1} + I_{z_1}).$$

Se numesc momente de inerţie centrifugale, mărimile scalare pozitive, negative sau nule avînd expresiile

$$I_{y_1z_1} = \Sigma m_i y_{1i} z_{1i} \quad I_{x_1z_1} = \Sigma m_i x_{1i} z_{1i} \quad I_{x_1y_1} = \Sigma m_i x_{1i} y_{1i}.$$

Formulele lui Steiner. Între momentele de inerție raportate la plane sau axe paralele, dintre care unele trec prin centrul de masă G al sistemului de puncte materiale, există relațiile

$$
\begin{aligned}
I_{y_1O_1z_1} &= I_{yGz} + Mx_G^2 \\
I_{x_1O_1z_1} &= I_{xGz} + My_G^2 \\
I_{x_1O_1y_1} &= I_{xGy} + Mz_G^2 \\
I_{x_1} &= I_{Gx} + M(y_G^2 + z_G^2) \\
I_{y_1} &= I_{Gy} + M(z_G^2 + x_G^2) \\
I_{z_1} &= I_{Gz} + M(x_G^2 + y_G^2) \\
I_{O_1} &= I_G + M(x_G^2 + y_G^2 + z_G^2) \\
I_{x_1y_1} &= I_{Gxy} + Mx_Gy_G \\
I_{z_1x_1} &= I_{Gyz} + My_Gz_G \\
I_{z_1x_1} &= I_{Gzx} + Mz_Gx_G,
\end{aligned}
$$

unde $M = \Sigma m_i$ este masa sistemului de puncte materiale, iar x_G, y_G și z_G sînt coordonatele centrului de masă față de sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$.

Momentul de inerție față de o axă oarecare Δ care trece prin O_1 și are cosinușii directori α, β și γ este

$$I_\Delta = I_{x_1}\cos^2\alpha + I_{y_1}\cos^2\beta + I_{z_1}\cos^2\gamma - 2I_{x_1y_1}\cos\alpha\cos\beta -$$

$$- 2I_{y_1z_1}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{z_1x_1}\cos\alpha\cos\gamma.$$

Considerînd pe axa Δ distanța $O_1P = H/\sqrt{I_\Delta}$ (fig. XIII.1), locul geometric al punctelor P cînd axa Δ ia toate pozițiile posibile este elipsoidul de inerție al sistemului, de ecuație

$$I_{x_1}x_1^2 + I_{y_1}y_1^2 + I_{z_1}z_1^2 - 2I_{x_1y_1}x_1y_1 - 2I_{y_1z_1}y_1z_1 - 2I_{z_1x_1}x_1z_1 = H^2.$$

Sistemul de axe pentru care momentele de inerție centrifugale sînt nule poartă numele de *axe principale de inerție.* Elipsoidul de inerție raportat la aceste axe are expresia

$$I_xx^2 + I_yy^2 + I_zz^2 = H^2.$$

Caz particular: placă plană. Direcția axelor principale se determină prin unghiul dat de relația

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{x_1y_1}}{I_{y_1} - I_{x_1}}$$

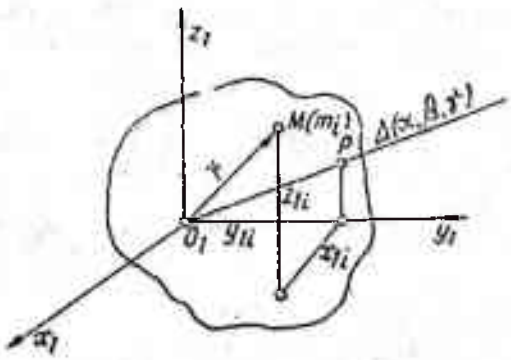


Fig. XIII.1

Momentele de inerţie în raport cu noile axe sînt date de

$$I_{xy} = \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{y_1} - I_{x_1})^2 + 4I_{x_1y_1}^2}.$$

$$I_{xy} = 0.$$

Elipsoidul de inerţie devine *elipsă de inerţie*

$$\frac{x^2}{H^2/I_x} + \frac{y^2}{H^2/I_y} = 1.$$

Notînd $H^2 = I_xI_y/M$ şi definind pentru momentele de inerţie axiale şi polare, razele de inerţie (de giraţie) ca fiind lungimile

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}, \quad i_G = \sqrt{\frac{I_G}{M}},$$

elipsa de inerţie ia forma

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1.$$

Dacă masa specifică superficială a plăcii este egală cu unitatea, rezultă $dm = dA$; momentele de inerţie mecanice devin momente de inerţie geometrice (utilizate mult în Rezistenţa materialelor).

Probleme rezolvate

13.1. Să se determine momentul de inerţie al unei bare drepte de lungime l şi masă M, în raport cu unul din capete şi în raport cu centrul de greutate al barei. Bara are greutatea de p kgf/m.

Rezolvare. $I_0 = \frac{1}{g}\int_0^l p \cdot x^2\,dx = M\frac{l^2}{3}$

$$I_G = M\frac{l^2}{3} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2.$$

S-a notat: $M = \frac{pl}{g}$

13.2. Să se determine momentele de inerție ale unui dreptunghi de laturi a, b și de masă specifică ρ în raport cu:

a) axele trecînd prin centrul de greutate al dreptunghiului (x_0Oy_0);

b) laturile AB și AD ale dreptunghiului (xAy), (fig. 13.2, a).

Să se scrie ecuația elipsei centrale de inerție și a elipsei față de punctul A.

Rezolvare. a) $I_{x_0} = \rho a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\, dy = \rho \frac{ab^3}{12} = \frac{Mb^2}{12}$

$$I_{y_0} = \frac{Ma^2}{12}, \qquad I_{x_0y_0} = 0$$

$$i_{x_0}^2 = \frac{b^2}{12}, \qquad i_{y_0}^2 = \frac{a^2}{12},$$

$$i_{x_0} = 0{,}578\,\frac{b}{2}, \qquad i_{y_0} = 0{,}578\,\frac{a}{2}.$$

Ecuația elipsei centrale de inerție (fig. 13.2, b) este

$$\frac{x_0^2}{a^2/12} + \frac{y_0^2}{b^2/12} = 1.$$

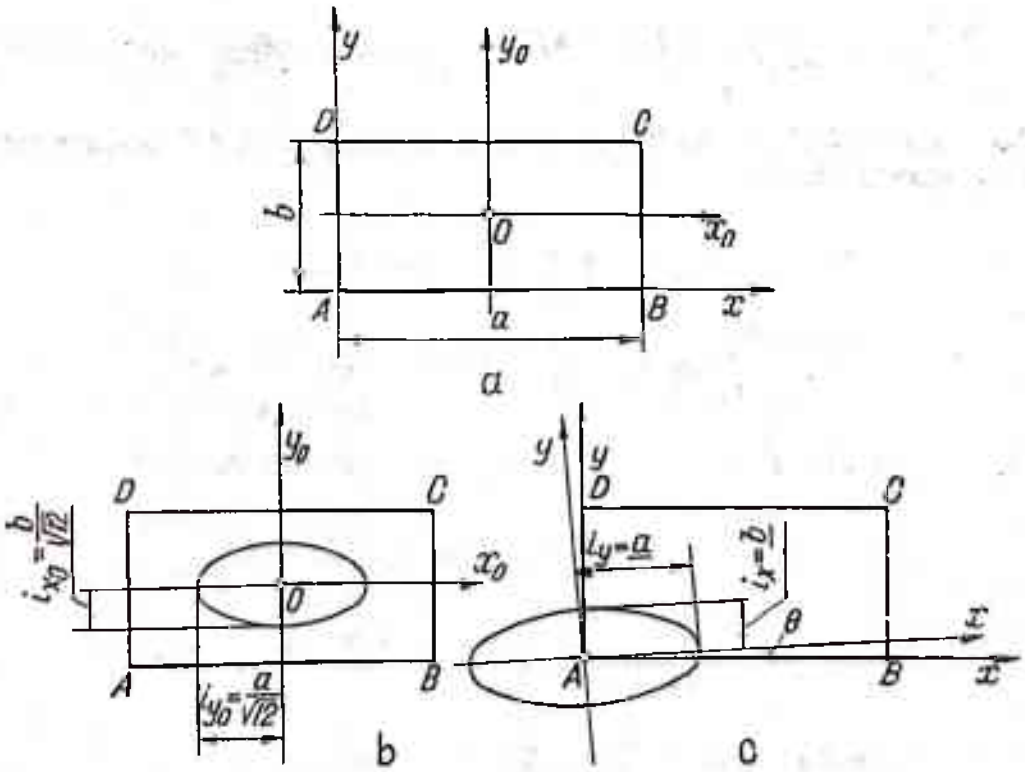


Fig. 13.2

b) $I_{AB} = I_{xo} + M\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \rho\,\frac{ab^3}{3} = \frac{Mb^2}{3} = I_x$

$$I_{AD} = \frac{\rho a^3 b}{3} = \frac{Ma^2}{3} = Iy$$

$$I_{xy} = \rho \int_0^a \int_0^b xy \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = \rho a^2 b^2/4 = \frac{Mab}{4}$$

$$I_x x^2 + I_y y^2 - 2I_{xy} xy = H^2$$

$$H^2 = M \cdot i_x^2 \cdot i_y^2 = \rho \cdot a^3 \cdot b^3/9 = \frac{Ma^2b^2}{9}.$$

Ecuaţia elipsei de inerţie în A, faţă de axele xAy va fi (fig. 13.2, *c*)

$$b^2x^2 + a^2y^2 - \frac{3}{2}\,abxy = a^2b^2/3$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}.$$

Momentele principale de inerţie se calculează conform formulei

$$I_{X,Y} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{M}{12}[2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4(a^4 + b^4) + a^2b^2}].$$

Dacă se referă elipsa de inerţie la axele principale XAY, dispare termenul în XY şi ecuaţia devine

$$\frac{X^2}{i_Y^2} + \frac{Y^2}{i_X^2} = 1$$

în care

$$i_{XY}^2 = \frac{1}{12}[2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4(a^4 + b^4) + a^2b^2}].$$

13.3. Să se afle Ix şi Iy pentru suprafaţa din figura 13.3

$$I_x = \frac{\rho}{3}\left[ah^3 + \frac{a}{2}h_1^3 + 3a \cdot h_2^3 + 2{,}5a \cdot h_3^3\right]$$

$$I_y = \frac{\rho}{3}\,ha^3 + \frac{\rho}{12}h_1\frac{a^3}{8} + \frac{\rho a}{2}h_1\left(a + \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{\rho}{12}h_2 \cdot 27\,a^3 +$$

$$+ 3ah_2\,\rho 9a^2 + \frac{1}{12}h_5\,\rho(2{,}5a)^3 + 2{,}5ah_3\,\rho(5{,}75\,a)^2$$

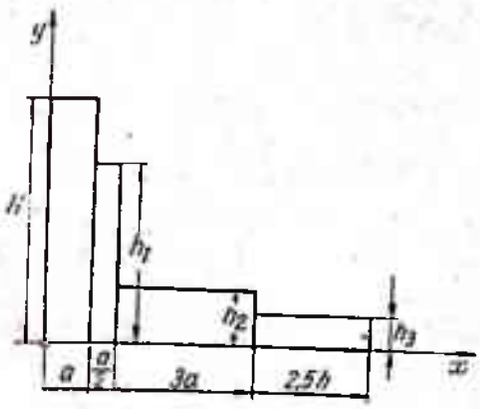


Fig. 13.3

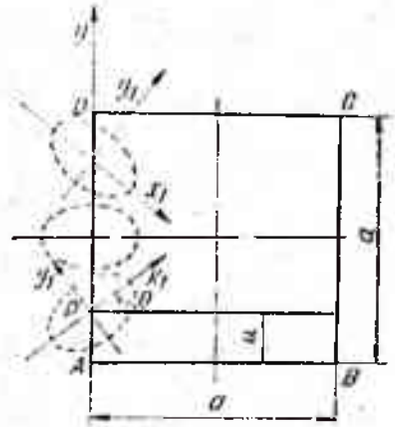


Fig. 13.4

13.4. Fie un pătrat $ABCD$ de latură a, iar P, un punct pe latura AD la distanţa $AP = u$ (fig. 13.4). Să se determine elipsa de inerţie a pătratului în raport cu P şi să se arate cum variază această elipsă de inerţie cînd P se mişcă pe AD.

Rezolvare. $I_x = a^4 \cdot \frac{\rho}{12} + a^2\rho\left(\frac{a}{2} - u\right)^2 = M\left[\frac{a^2}{12} + \left(\frac{a}{2} - u\right)^2\right]$

$$I_y = a^4 \cdot \frac{\rho}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_{xy} = \int_0^a \int_{-u}^{a-u} xy \, dx \, dy = \frac{a^3\rho(a - 2u)}{4} = \frac{M}{4} a(a - 2u)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{a(a - 2u)}{2u(a - u)}$$

$$I_{x_1} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - 2I_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$I_{y_1} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + 2I_{xy} \sin\theta \cos\theta.$$

Rezultatele calculate sînt redate în următoarea tabelă:

u	θ	I_x	I_y	I_{xy}	Valoarea lui I_{y_1}
0	45°	$\frac{M}{3}a^2$	$\frac{M}{3}a^2$	$\frac{M}{4}a^2$	(maximă) $\frac{7}{12}Ma^2$
$\frac{a}{2}$	0	$\frac{M}{12}a^2$	$\frac{M}{3}a^2$	0	(minimă) $\frac{Ma^2}{3}$
a	−45°	$\frac{M}{3}a^2$	$\frac{M}{3}a^2$	$\frac{M}{4}a^2$	(maximă) $\frac{7}{12}Ma^2$

Scanned with OKEN Scanner

13.5. Se cere momentul de inerţie în raport cu axa $X - X$ pentru platbandele găurite din figura 13.5 (secţiune simetrică faţă de axa Oy).

Rezolvare.

$$I_x = \frac{1}{12} M_1 4c^2 + M_1(y_0 + c)^2 + \frac{1}{12} M_2 c^2 + M_2\left(y_0 + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{M_1}{3}[c^2 + 3(y_0 +$$

$$+ c)^2] + \frac{M_2}{12}[c^2 + 3(2y_0 + c)^2] = M\left[\frac{c^2}{3} + (y_0 + c)^2\right] - M_2 c(y_0 + c)$$

$$M_1 = 2\rho c(b - 2d), \quad M_2 = \rho c(a - b), \quad M = M_1 + M_2.$$

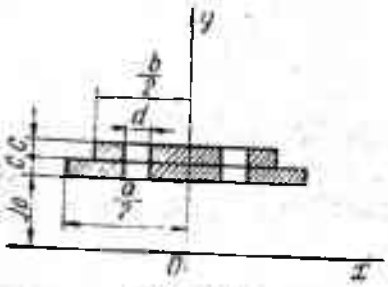


Fig. 13.5

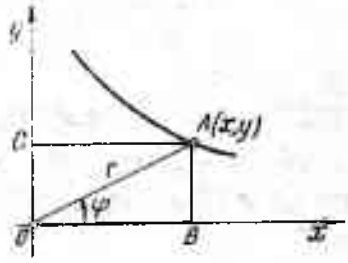


Fig. 13.6

13.6. Un dreptunghi $OBAC$, de mărime variabilă, este aşezat pe axele rectangulare xoy (fig. 13.6). Care va fi locul geometric al punctului A pentru dreptunghiurile ale căror momente de inerţie polare în raport cu originea O, sînt constante?

Rezolvare.

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{1}{3} My^2 + \frac{1}{3} Mx^2 = \frac{\rho}{3} xy(y^2 + x^2)$$

$$xy(x^2 + y^2) = \frac{3I_0}{\rho} = C.$$

Locul geometric căutat este curba

$$xy(x^2 + y^2) = C.$$

Utilizînd coordonatele polare

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

ecuaţia curbei devine

$$r^2 \sin\varphi \cos\varphi (r^2 \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\varphi) = C$$

sau

$$\frac{r^4}{2} \sin 2\varphi = C.$$

13.7. Să se determine momentul de inerție al unui triunghi isoscel (fig. 13.7) în raport cu: a) baza triunghiului, BC; b) o paralelă la Ox_0, dusă prin centrul de greutate G; c) mediana AO a triunghiului isoscel.

Să se determine punctul M de pe AO pentru care elipsa de inerție se reduce la un cerc.

Rezolvare.

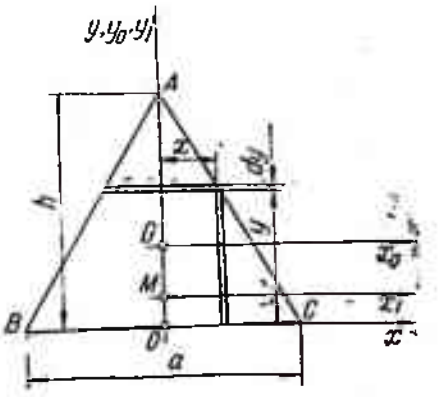


Fig. 13.7

a) $$I_{BC} = \rho\int_0^h 2xy^2\,dy = \frac{a}{h}\rho\int_0^h y^2(h-y)\,dy =$$

$$= \rho\frac{ah^3}{12} = \frac{Mh^2}{6}; \qquad \frac{2x}{a} = \frac{(h-y)}{h}.$$

b) $$I_{x_1} = \rho\frac{ah^3}{12} - \frac{1}{2}\rho ah\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \rho\frac{ah^3}{36} = \frac{Mh^2}{18}.$$

c) $$I_{AO} = I_{y_1} = \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} yx^2\,dx =$$

$$= h\rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{2x}{a}\right)x^2\,dx = \frac{a^3h}{12} = \frac{Ma^2}{6}.$$

$$\frac{y}{h} = \frac{a-2x}{a}.$$

d) $$I_{x_1} = I_y \rightarrow \begin{cases} I_{x_1} = \rho\dfrac{ah^3}{36} + \dfrac{1}{2}\rho ahy^2 \\ I_y = 2\rho\dfrac{1}{12}h\left(\dfrac{a}{2}\right)^3 = \dfrac{a^3h}{12}\rho \end{cases}$$

$$\frac{ah^3}{36} + \frac{1}{2}ahy^2 = \frac{a^3h}{12}$$

$$y = \sqrt{\frac{3a^2-h^2}{18}},\ x = 0,$$

y fiind măsurat față de axa Ox.

Soluția este posibilă cu condiția ca $a \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}h$.

13.8. Să se afle momentul de inerție polar al suprafeței unui paralelogram, în raport cu centrul său de greutate (fig. 13.8).

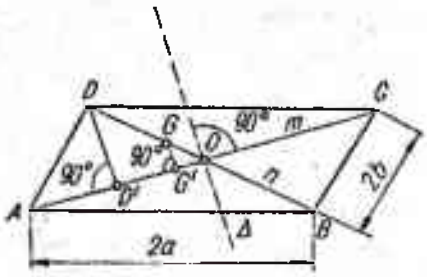


Fig. 13.8

Rezolvare. Notăm: M masa paralelogramului, $AO = OC = m$, $DO = OB = n$ şi avem

$$I_0(ABCD) = 2I_0(ABC) = 2I_0(ACD)$$

$$I_0(ACD) = I_{AC} + I_\Delta.$$

Dar

$$I_\Delta = I_G + M_{(ACD)}(G'O)^2$$

$$I_{DD'} = \frac{1}{6} M_{(AD'D)} (AD')^2 + \frac{1}{6} M_{(D'CD)} (D'C)^2.$$

Din triunghiul ADO, rezultă

$$DD' = \frac{2b}{m}\sqrt{m^2 - b^2}$$

$$AD' = \frac{2b^2}{m}.$$

Înlocuind în expresia lui $I_{DD'}$ şi I_{AC} obţinem

$$I_{DD'} = \frac{M}{3m^4}[b^6 + (m^2 - b^2)^3]$$

$$I_{AC} = \frac{1}{6}\cdot\frac{M}{2}\cdot (DD')^2 = \frac{M}{3}\frac{b^2}{m^2}(m^2 - b^2)$$

$$I_{0(ACD)} = I_{AC} + I_{DD'} + \frac{M}{2}(G'O^2 - D'G'^2).$$

Ţinînd seama că

$$G'O = \frac{1}{3} D'O = \frac{1}{3}(m - AD') \text{ şi } D'G' = 2G'O$$

rezultă

$$I_{0(ABCD)} = 2I_{0(ABC)} = \frac{2M}{3}\frac{b^2}{m^2}(m^2 - b^2) + \frac{2M}{3m^4}[b^6 + (m^2 - b^2)^3] -$$

$$- \frac{M}{3}\left(m - \frac{2b^2}{m}\right)^2.$$

În cazul rombului avem

$$I_0 = \frac{1}{6} M(m^2 + n^2).$$

13.9. Se cer momentele de inerţie ale suprafeţei rombului din figura 13.9.

Rezolvare.

$$I_x = I_{AB} = I_{AD} = \rho \int_0^{a \sin \alpha} ay^2 \, dy = \frac{\rho}{3} a(a \sin \alpha)^3 =$$

$$= \frac{M}{3} a^2 \sin^2 \alpha, \; (M = \rho a^2 \sin \alpha)$$

$$I_{xy} = \int_0^{a \sin \alpha} ay \left(y \operatorname{cotg} \alpha + \frac{a}{2} \right) dy = \frac{Ma^2}{36} \sin^2 \alpha (9 + 4 \cos \alpha)$$

$$I_{AD} = I_X = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_y = \frac{1}{\sin^2 \alpha} [I_x(1 - \cos^2 \alpha) + I_{xy} \sin 2\alpha] = I_x + 2I_{xy} \operatorname{cotg} \alpha = \frac{M}{3} a^2 \sin^2 \alpha +$$

$$+ \frac{2M}{36} a^2 \sin \alpha \cos \alpha (9 + 4 \cos \alpha).$$

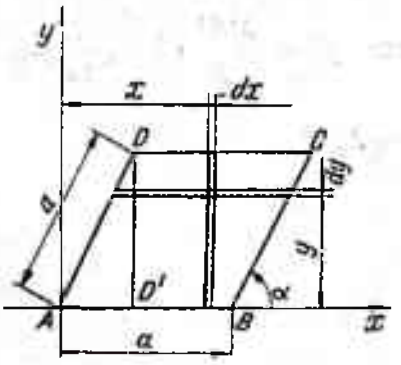


Fig. 13.9

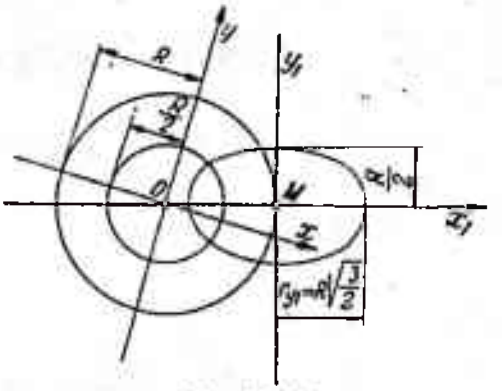


Fig. 13.10

13.10. Să se afle momentele de inerţie şi elipsa de inerţie pentru un cerc de rază R, faţă de centrul cercului şi faţă de un punct variabil M de pe circumferinţă (fig. 13.10).

Rezolvare. $I_{x_1} = I_x = I_y = \rho \frac{\pi R^4}{4} = \frac{MR^2}{4}$

$$I_{y_1} = \rho \frac{\pi R^4}{4} + \rho \pi R^2 \cdot R^2 = 5\rho \frac{\pi R^4}{4} = \frac{5}{4} MR^2$$

$$I_0 = \rho \frac{\pi R^4}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

$$i_x = i_y = \frac{R}{2}$$

$$i_{x_1} = \frac{R}{2}, \quad i_{y_1} = \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = \frac{R}{2} \sqrt{5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Elipsa de inerţie faţă de O se reduce la un cerc de rază $\frac{R}{2}$, iar faţă de un punct M de pe cerc este (fig. 13.10)

$$\frac{x_1^2}{\frac{5R^2}{4}} + \frac{y_1^2}{\frac{R^2}{4}} = 1.$$

13.11. Să se determine momentele de inerţie ale unui arc de cerc (fig. 13.11, *a*) şi ale unui sector circular (fig. 13.11, *b*) în raport cu axele Ox, Oy şi în raport cu centrul arcului O.

Rezolvare. Pentru arcul de cerc

$$I_x = 2\rho\int_0^{\varphi} R^2 \sin^2\theta R\, d\theta = R^3\rho(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) = \frac{MR^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2\varphi}\sin 2\varphi\right)$$

$$I_y = 2\rho\int_0^{\varphi} R^2 \cos^2\theta R\, d\theta = R^3\rho(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) = \frac{MR^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2\varphi}\sin 2\varphi\right)$$

$$I_0 = MR^2 \text{ cu } M = 2\rho R\varphi.$$

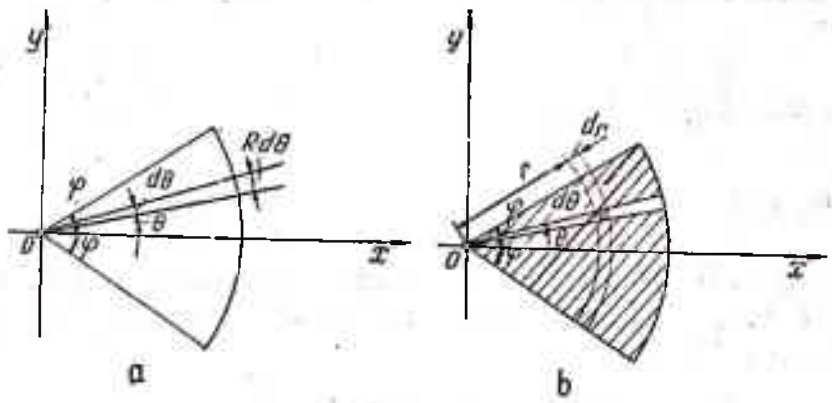


Fig. 13.11

Pentru sectorul circular

$$I_x = 2\rho\int_0^R r^3\, dr\int_0^{\varphi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{R^4}{4}\rho\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) = \frac{MR^2}{4}\left(1 - \frac{1}{2\varphi}\sin 2\varphi\right)$$

$$I_y = 2\rho\int_0^R r^3\, dr\int_0^{\varphi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{R^4}{4}\varphi\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) = \frac{MR^2}{4}\left(1 + \frac{1}{2\varphi}\sin 2\varphi\right)$$

$$I_0 = \frac{MR^2}{2} \text{ cu } M = \rho R^2\varphi.$$

13.12. Dîndu-se o placă omogenă, avînd forma unui sfert de cerc (fig. 13 12) să se determine:

a) elipsa de inerție corespunzătoare punctului O;
b) elipsa centrală de inerție;
c) punctul pentru care elipsa de inerție devine cerc.

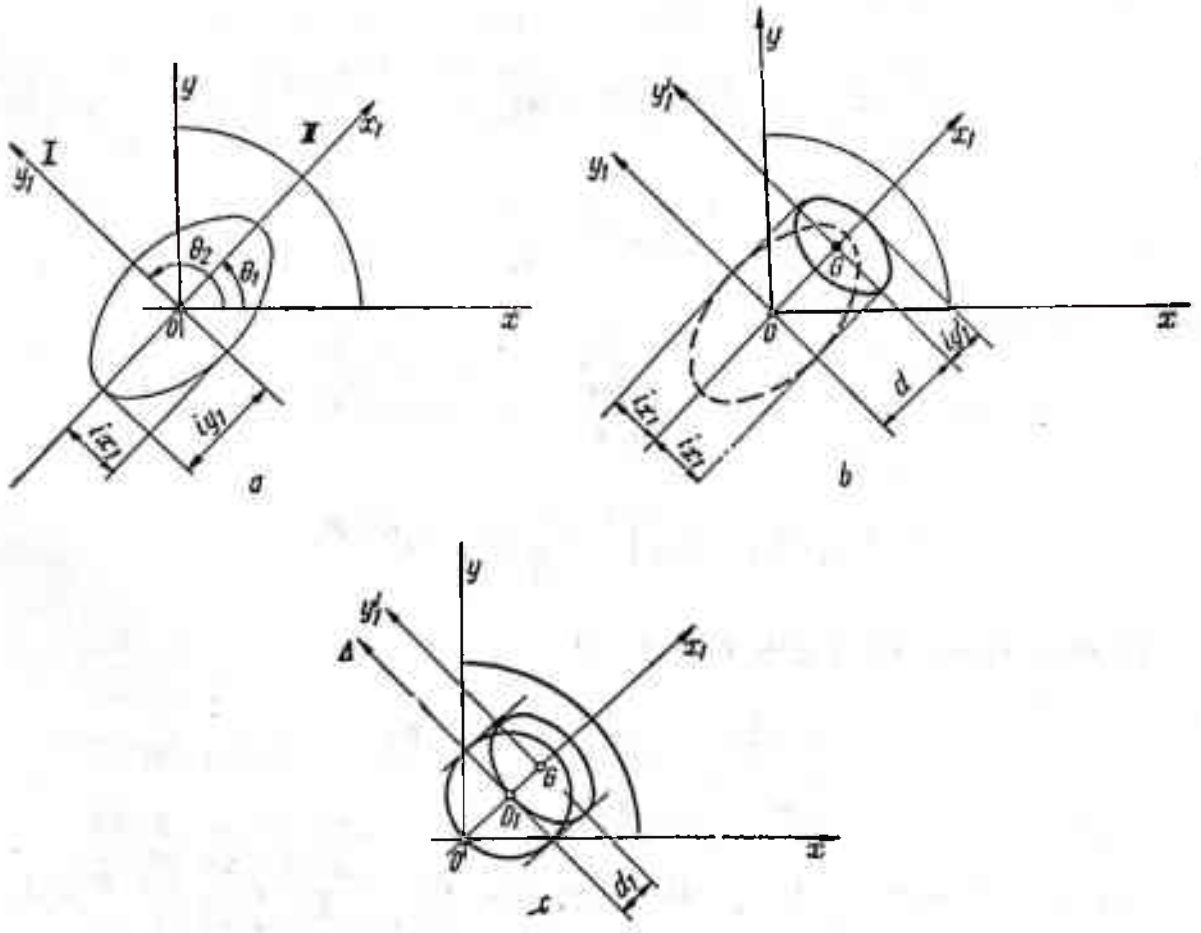


Fig. 13.12

Rezolvare.

a) Momentele axiale de inerție ale suprafeței unui sfert de cerc față de axele Ox și Oy sînt:

$$I_x = I_y = \rho \frac{\pi R^4}{16} = \frac{MR^2}{4}.$$

Momentul de inerție centrifugal al sfertului de cerc este:

$$I_{xy} = \rho \iint xy \, dA = \rho \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \rho \frac{R^4}{8} = \frac{MR^2}{2\pi}.$$

Axele principale de inerţie corespunzătoare punctului O corespund unghiurilor

$$\theta_1 = 45^\circ \text{ şi } \theta_2 = 135^\circ.$$

Momentele principale de inerţie:

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2} = I_{y_1} = \frac{MR^2(\pi + 2)}{4\pi}$$

$$I_2 = I_{x_1} = \frac{MR^2(\pi - 2)}{4\pi}.$$

Razele de inerţie:

$$i_{x_1}^2 = \frac{I_2}{A\rho} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{R^2}{4}; \quad i_{x_1} = 0{,}30\ R,$$

$$i_{y_1}^2 = \frac{I_1}{A\rho} = \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\frac{R^2}{4}; \quad i_{y_1} = 0{,}65\ R.$$

Ecuaţia elipsei de inerţie în punctul O:

$$\frac{x_1^2}{\frac{\pi + 2}{4\pi}R^2} + \frac{y_1^2}{\frac{\pi - 2}{4\pi}R^2} - 1 = 0.$$

b) Elipsa centrală de inerţie. Distanţa $OG = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R \approx 0{,}6\ R = d$. Axele principale centrale sînt Gx_1 şi Gy_1:

$$I_{x_1} = \rho\frac{\pi - 2}{16}R = \frac{MR^2(\pi - 2)}{4\pi}$$

$$I_{y_1'} = I_{y_1} - M \cdot d^2 = \rho\frac{(\pi + 2)}{16}R^4 - \rho\frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R\right)^2$$

$$I_{y_1'} = \rho\left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4.$$

Semiaxele elipsei centrale sînt:

$$i_{x_1} \cong 0{,}30\ R; \quad i_{y_1} \cong 0{,}22\ R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația elipsei centrale de inerție este:

$$\frac{x_1^2}{0{,}028\,R^2} + \frac{y^2}{0{,}090\,R^2} - 1 = 0.$$

c) Punctul pentru care elipsa de inerție devine un cerc.

Centrul O_1 al acestui cerc se află pe axa O_{x_1} la distanța d_1 de G, astfel încît $I_\Delta = I_{x_1}$.

Dar

$$I_\Delta = I_{y_1'} + \rho A_{d_1^2}$$

sau

$$\rho\frac{\pi - 2}{16}R^4 = \rho\left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4 + \rho\frac{\pi R^2}{4}d_1^2.$$

Rezultă:

$$d_1 = R.\sqrt{\frac{32}{9\pi^2} - \frac{1}{\pi}} \cong 0{,}21\ R$$

$$OO_1 = OG - O_1G \cong 0{,}386\ R.$$

Cercul are raza: $R_1 = i_{x_1} \cong 0{,}3\ R$.

13.13. Să se determine elipsa centrală de inerție a ariei unei jumătăți de cerc de rază R (fig. 13.13).

Rezolvare. Momentele de inerție față de axele Ox și Oy sînt

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$I_x = \rho\frac{\pi R^4}{8} = \frac{MR^2}{4}, \quad I_y = \rho\frac{\pi R^4}{8} = \frac{MR^2}{4}, \quad I_{xy} = 0.$$

Poziția centrului de greutate este definită de coordonatele $X_G = 0$, $Y_G = \frac{4R}{3\pi}$, deci

$$I_Y = I_y; \quad i_x^2 = \frac{I_x}{M}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{M}, \quad i_x = i_y = \frac{r}{2}.$$

Momentele de inerţie faţă de axele GX şi GY sînt

$$I_X = I_x - My_G^2 = \frac{MR^2}{4} - M\frac{16R^2}{9\pi^2} = MR^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)$$

$$I_Y = I_y = \frac{MR^2}{4}.$$

Razele de giraţie faţă de noile axe devin

$$i_X^2 = R^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right), \quad i_Y^2 = \frac{R^2}{4},$$

iar ecuaţia elipsei centrale de inerţie, raportată la sistemul XGY este

$$\frac{X^2}{i_X^2} + \frac{Y^2}{i_Y^2} = 1 \quad \text{sau} \quad 4X^2 + \frac{Y^2}{\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}} = R^2.$$

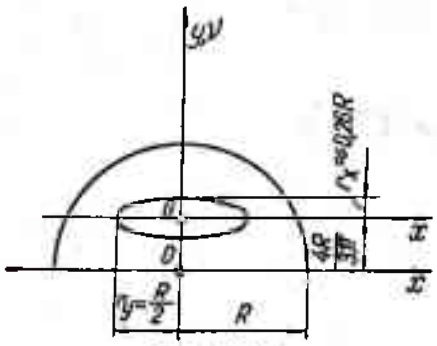


Fig. 13.13

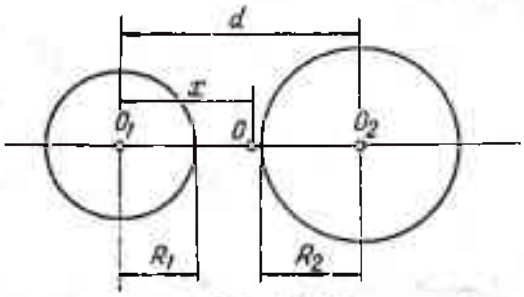


Fig. 13.14

13.14. Se dau două cercuri de raze R_1 şi R_2 şi aceeaşi masă specifică ρ, distanţa centrelor fiind $O_1O_2 = d$ (fig. 13.14).

Să se găsească un punct O pe linia centrelor, astfel încît momentele de inerţie ale cercurilor în raport cu punctul O să fie egale.

Rezolvare. Dacă notăm $x = O_1O$, egalitatea momentelor de inerţie se exprimă prin ecuaţia

$$\frac{\rho\pi R_1^4}{2} + \pi\rho R_1^2 x^2 = \frac{\rho\pi R_2^4}{2} + \rho\pi R_2^2(d - x)^2$$

sau

$$x^2 - \frac{2R_2^2 d}{R_2^2 - R_1^2}\, x + \frac{R_2^4 - R_1^4 + 2R_2^2 d^2}{2(R_2^2 - R_1^2)} = 0$$

$$x = \frac{R_2^2 d}{R_2^2 - R_1^2} \pm \sqrt{\frac{R_2^4 d^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} - \frac{R_2^4 - R_1^4 + 2R_2^2 d^2}{2(R_2^2 - R_1^2)}}$$

13.15. Se consideră porțiunea de suprafață plană mărginită de parabola $y^2 = 2px$ și segmentul $BAB' = 2b$ corespunzător abscisei $x = a$ (fig. 13.15, *a*).

Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele Ox, Oy, BB' și ecuația elipsei centrale de inerție.

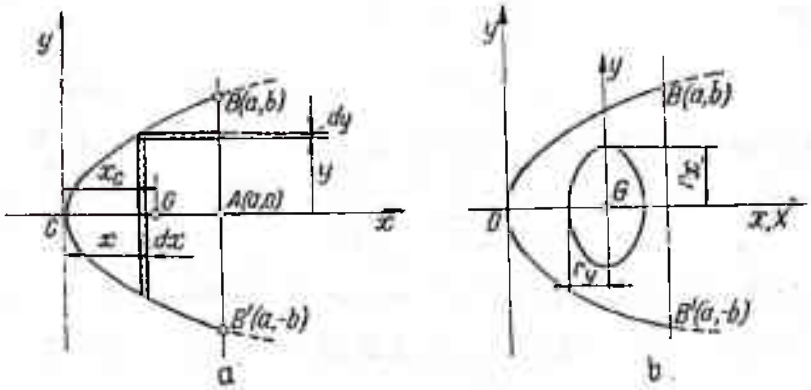


Fig. 13.15

Caz particular: A coincide cu focarul parabolei.

Rezolvare.

$$M = \frac{4ab}{3}\rho, \quad I_x = \rho\int_0^a dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y^2\,dy = \frac{4ab^3}{15}\rho = \left(\frac{4\rho ab}{3}\right)\frac{3}{15}b^2 = \frac{1}{5}Mb^2$$

$$I_y = 2\rho\int_0^a \sqrt{2px}\cdot x^2\cdot dx = \rho\frac{4a^3b}{7} = \frac{3}{7}Ma^2$$

$$I_{BB'} = 2\rho\int_0^a y\,dx(a-x)^2 = 2\rho\int_0^a (a-x)^2\cdot\sqrt{2px}\,dx = 2\rho\left[\int_0^a a^2\sqrt{2px}\,dx - \right.$$

$$-\int_0^a 2ax\sqrt{2p\cdot x}\,dx + \sqrt{2p}\int_0^a x^2\sqrt{x}\,dx = \frac{16}{106}2\rho\sqrt{2ap}a^3 =$$

$$= \frac{32}{105}\rho ba^3 = \frac{4\rho ba}{3}\cdot\frac{3}{105}\cdot\frac{32}{4}a^2 = \frac{8}{35}Ma^2$$

$$I_X = I_x = 0{,}2Mb^2, \quad I_Y = I_y - M\cdot x_G^2 = 0{,}068\,Ma^2$$

$$x_G = \frac{\rho\int_0^a x2y\,dx}{M} = \frac{2\rho}{M}\sqrt{2p}\int_0^a x^{3/2}\,dx = \frac{3}{5}a\,.$$

Ecuaţia elipsei centrale de inerţie, în raport cu sistemul de axe XGY (fig. 13.13, b) este

$$\frac{X^2}{0{,}068a^2} + \frac{Y^2}{0{,}2b^2} = 1.$$

Cazul particular ($a = p$, $b = p\sqrt{2}$):

$$I_x = \frac{2}{5}Mp^2, \quad I_y = \frac{3}{7}Mp^2, \quad I_{BB'} = \frac{8}{35}Mp^2.$$

Ecuaţia elipsei centrale de inerţie în raport cu sistemul de axe XGY este

$$\frac{X^2}{0{,}068p^2} + \frac{Y^2}{0{,}4p^2} = 1.$$

O b s e r v a ţ i e. Elipsa centrală se poate reduce la un cerc dacă

$$0{,}068\ a^2 = 0{,}2\ b^2,\ a = 5{,}9\ p.$$

13.16. Se cere momentul de inerţie polar I_0 al unei elipse de semiaxe a şi b, în raport cu centrul ei (fig. 13.16) precum şi ecuaţia elipsei centrale de inerţie.

R e z o l v a r e. Avem $M = \pi\rho ab$. Ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

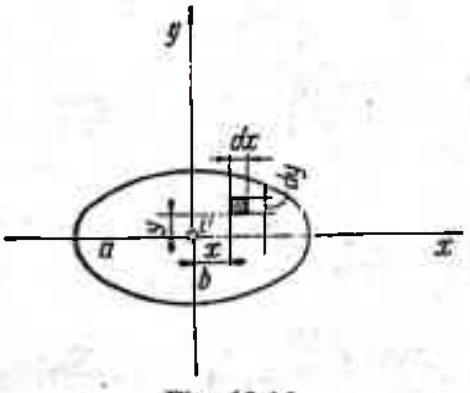


Fig. 13.16

iar momentul de inerţie polar

$$I_0 = \rho \iint_{(A)} (x^2 + y^2)\, dA.$$

Facem schimbarea de variabile

$$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$$

unde $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Elementul de suprafaţă fiind $dA = ab\, r dr d\theta$, rezultă

$$I_0 = \rho \iint_{(A)} (x^2 + y^2)\, dA = ab\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} (a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta)\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= a^2\rho ab \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta + ab\, b^2\rho \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{M}{4}(a^2 + b^2)$$

şi

$$I_x = \frac{M}{4}b^2, \quad I_y = \frac{M}{4}a^2, \quad i_x = \frac{b}{2}, \quad i_y = \frac{a}{2}.$$

Ecuaţia elipsei centrale de inerţie este

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1.$$

13.17. Să se determine elipsa centrală de inerție pentru aria unei jumătăți de hexagon regulat (fig. 13.17).

Rezolvare. Masa jumătății de hexagon regulat fiind

$M = \frac{\rho 3R^2\sqrt{3}}{4}$, momentele de inerție căutate sînt

$$I_x = I_{(BCC'B')} + 2I_{(AB'B)} = \frac{\rho}{3} R\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 2\frac{\rho}{12}\frac{R}{2}\times\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{5\rho}{12} R^4 \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{15}{96}\cdot\rho\sqrt{3}R^4 = \left(\frac{3R^2}{4}\sqrt{3}\rho\right)\cdot\frac{5}{24}R^2 = \frac{5}{24}MR^2$$

$$I_y = I_{(BCC'B')} + 2I_{(ABB')} = \frac{\rho}{12} R\frac{\sqrt{3}}{2}R^3 + 2\left[\frac{\rho}{36}\frac{R\sqrt{3}}{2}\frac{R^3}{8} + \frac{\rho R\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{4R^2}{9}\right] =$$

$$= \frac{\rho}{24}R^4\sqrt{3} + \frac{33\rho}{8\cdot 36}R^4\sqrt{3} = \frac{45}{288}\rho\sqrt{3}R^2 = \frac{15}{72}MR^2.$$

Dar

$$y_G = \frac{\frac{2}{3}M\frac{R\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3}M\frac{R\sqrt{3}}{6}}{M}, \quad y_G = \frac{2}{9}R\sqrt{3}$$

deci

$$I_X = I_x - M\,y_G^2 = MR^2\left(\frac{5}{24} - \frac{12}{81}\right) = \frac{39}{648}MR^2 = \frac{13}{216}MR^2$$

$$I_Y = I_y = \frac{15}{72}MR^2$$

$$i_X^2 = \frac{13}{216}R^2 = 0{,}060\,R^2$$

$$x_Y^2 = \frac{15}{72}R^2 = 0{,}200\,R^2.$$

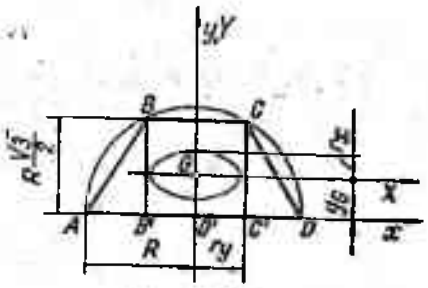


Fig. 13.17

Ecuația elipsei centrale de inerție față de sistemul XGY este

$$\frac{X^2}{0{,}200\,R^2} + \frac{Y^2}{0{,}060\,R^2} = 1.$$

13.18. Un pătrat $ABCD$, de latură a, se termină cu două jumătăți de cerc descrise pe AD și BC ca diametru. Se cere elipsa centrală de inerție (fig. 13.18).

Rezolvare.

$$I_x = \rho\frac{a^4}{12} + 2\cdot\rho\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\frac{a^4}{2^4} = \rho\cdot a^4\left(\frac{1}{12} + \frac{\pi}{64}\right) = 0{,}132\,\rho a^4$$

$$I_y = a^4\rho\left[\frac{1}{12} + \frac{\pi}{8\cdot 2}\left(\frac{5}{4} + \frac{8}{3\pi}\right)\right] = 0{,}494\,\rho a^4.$$

Dar

$$M = a^2\rho + \rho\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1{,}785\, a^2,$$

deci

$$I_x = 0{,}074\, Ma^2,\ I_y = 0{,}277\, Ma^2.$$

Elipsa centrală de inerţie este

$$i_x^2 = \frac{I_x}{M} = 0{,}074\, a^2,\ i_y^2 = \frac{I_y}{M} = 0{,}277\, a^2$$

$$\frac{x^2}{0{,}277\, a^2} + \frac{y^2}{0{,}074\, a^2} = 1.$$

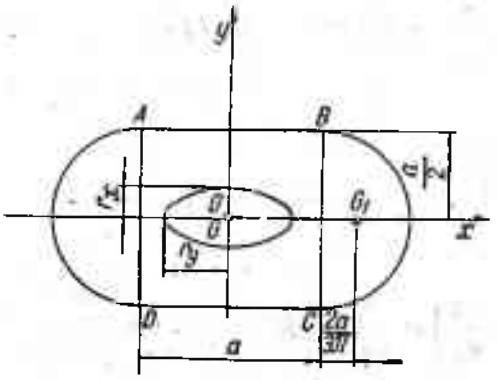


Fig. 13.18

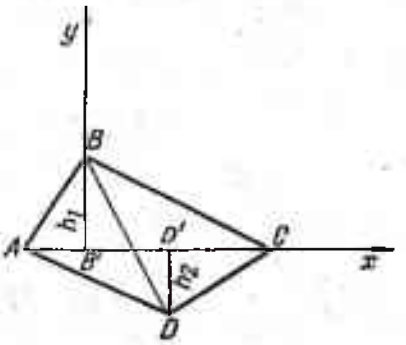


Fig. 13.19

13.19. Care este momentul de inerţie al patrulaterului $ABCD$ în raport cu diagonala AC (fig. 13.19).

Rezolvare. În triunghiul ABC:

$$I_{AC} = \frac{1}{6} M_1 h_1^2 = \frac{h_1^2}{6}\,\frac{h_1}{h_1 + h_2}\, M,\ \left(M_1 = \frac{AC \cdot h_1}{2}\right).$$

În triunghiul ACD:

$$I_{AC} = \frac{1}{6} M_2 h_2^2 = \frac{h_2^2}{6} \cdot \frac{h_2}{h_1 + h_2}\, M,\ \left(M_2 = \frac{AC \cdot h_2}{2}\right)$$

$$I_{AC} = \frac{M}{6}\left(\frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1 + h_2}\right),\quad (M = M_1 + M_2).$$

13.20. Pentru suprafaţa din figura 13.20 se cer momentele de inerţie I_x, I_y şi I_0. Arcul $A_1B_1C_1$ face parte din cercul cu centrul în O_1; arcul ABC este un semicerc; $B_1O = OO_1 = O_1B = \frac{a}{2}$.

Rezolvare. Se scriu momentele de inerție pentru semicercul ABE și pentru sectorul circular $O_1A_1B_1C_1O_1$; apoi se scad momentele de inerție pentru triunghiul $A_1O_1C_1$.

Conform rezultatelor obținute la problema (13, 11), notînd:

$$M_1 = \frac{\rho \cdot \pi a^2}{2}, \quad M_2 = \rho \frac{\pi a^2}{3}, \quad M_3 = \rho a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad M = M_1 + M_2 - M_3,$$

pentru semicercul ABC avem

$$I_x = \frac{M_1 a^2}{4}\left[1 - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{M_1 a^2}{4\pi}(\pi - 1) \approx 0{,}17\, M_1 a^2$$

$$I_y = \frac{M_1 a^2}{4\pi}(\pi + 1) \approx 0{,}33\, M_1 a^2.$$

Pentru sectorul de cerc $A_1B_1C_1$ rezultă

$$I_x = \frac{M_2 a^2}{4}\left[1 - \frac{1}{\frac{2}{3}\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{M_2 a^2}{16\pi}(4\pi - 3 \cdot \sqrt{3}) \approx 0{,}15\, M_2 a^2$$

$$I_{y_1} = \frac{M_2 a^2}{16\pi}(4\pi + 3\sqrt{3}) \approx 0{,}35\, M_2 a^2$$

$$I_y = I_G + M_2 \cdot GO^2 = I_{y_1} + (-GO_1^2 + GO^2)\, M_2 \approx 0{,}17\, M_2 a^2.$$

Pentru segmentul de cerc $A_1B_1C_1$

$$I_x = 0{,}15\, M_2 a^2 - \frac{M_3}{6} \cdot \frac{a^2 3}{4} = 0{,}15\, M_2 a^2 - 0{,}125\, M_3 a^2$$

$$I_y = 0{,}17\, M_2 a^2 - \frac{M_3}{6} \cdot \frac{a^2}{4} = 0{,}17\, M_2 a^2 - \frac{1}{24} M_3 a^2.$$

În final vom avea

$$I_x = 0{,}17\, M_1 a^2 + 0{,}15\, M_2 a^2 - 0{,}125\, M_3 a^2 \approx 0{,}18\, Ma^2$$

$$I_y = 0{,}33\, M_1 a^2 + 0{,}17\, M_2 a^2 - 0{,}04\, M_3 a^2 \approx 0{,}32\, Ma^2$$

$$I_O = I_x + I_y \approx 0{,}50\, Ma^2$$

$$I_{O_1} = I_x + I_{y_1} = 0{,}18\, Ma^2 + 0{,}35\, M_2 a^2 - \frac{1}{8} M_3 a^2 \approx 0{,}32\, Ma^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

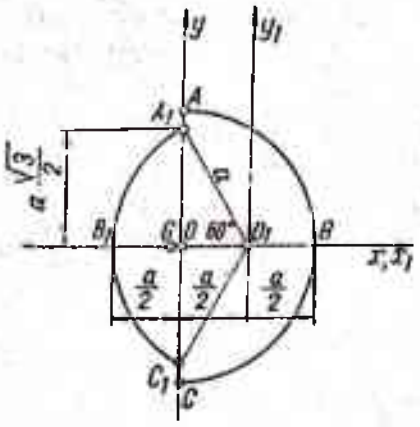


Fig. 13.20

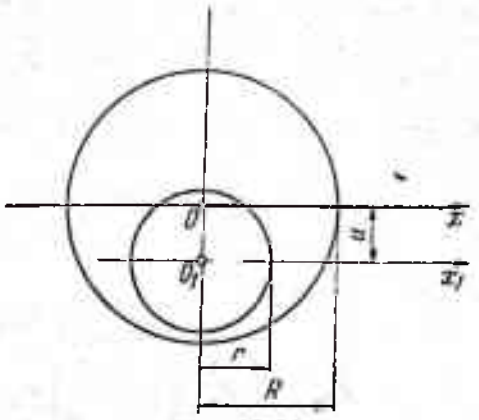


Fig. 13.21

13.21. Să se calculeze momentele de inerţie I_x, I_{x_1}, I_y, I_O, I_{O_1} ale suprafeţei cuprinse între cercurile de rază R şi r, distanţa între centrele celor două cercuri fiind a (fig. 13.21).

Rezolvare.

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}\rho - \rho\left(\frac{\pi r^4}{4} + \pi r^2 \cdot a^2\right) = \frac{M}{4}\left[r^2\left(1 - \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right) + R^2\right]$$

$$I_{x_1} = \frac{\pi R^4}{4}\rho + \rho\pi R^2 \cdot a^2 - \frac{\rho\pi r^4}{4} = \frac{M}{4}\cdot\left[R^2\left(1 + \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right) + \right.$$

$$I_y = \frac{\rho\pi}{4}\cdot(R^4 - r^4) = \frac{1}{4}M(R^2 + r^2), \quad [M = \pi\rho(R^2 - r^2)]$$

$$I_O = I_x + I_y = \frac{M}{4}\left[2R^2 + r^2\left(2 - \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right)\right]$$

$$I_{O_1} = I_{x_1} + I_y = \frac{M}{4}\left[R^2\left(2 + \frac{4a^2}{R^2 - r^2}\right) + 2r^2\right].$$

13.22. Să se calculeze momentele de inerţie ale unui paralelipiped drept de laturi a, b, c (fig. 13.22) în raport cu:

a) axele principale Ox, Oy Oz, ce trec prin centrul de greutate G;

b) o direcţie Δ făcînd cu axele Ox, Oy, Oz, unghiurile α, β, γ şi trecînd prin G;

c) axele Ox_1, Oy_1, Oz_1.

Rezolvare.

a) $$I_x = I_{xGy} + I_{xGz} = \frac{Mc^2}{12} + \frac{Mb^2}{12} = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_y = I_{xGy} + I_{yGz} = \frac{Mc^2}{12} + \frac{Ma^2}{12} = \frac{11}{12}(a^2 + c^2)$$

$$I_z = I_{xGz} + I_{yGz} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

b) $I_\Delta = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2[I_{xy}\cos\alpha\cos\beta +$
$+ I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + I_{yz}\cos\beta\cos\gamma]$

$$I_{xy} = 2\rho\iiint_{(v)} xy\,dx\cdot dy\cdot dz = 2\rho\int_0^{a/2} x\,dx\int_0^{b/2} y\,dy\int_0^{c/2} dz = 2\rho\,\frac{a^2}{8}\cdot\frac{b^2}{8}\cdot\frac{c}{2} =$$

$$= \frac{1}{64}\rho a^2b^2c = \frac{1}{64}abM$$

$$I_{xz} = \frac{1}{64}acM, \quad I_{yz} = \frac{1}{64}bcM.$$

c) $I_{x_1} = I_x + M\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right) = \frac{M}{12}(b^2 +$
$+ c^2) + \frac{M}{4}(b^2+c^2) = \frac{b^2+c^2}{12}(M+3M) =$

$$= \frac{1}{3}M(b^2+c^2) = 4I_x$$

$$I_{y_1} = 4I_y, \quad I_{z_1} = 4I_z$$

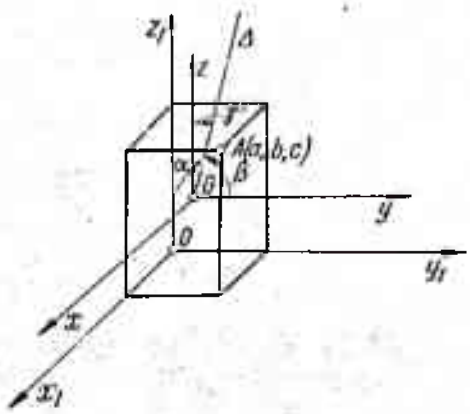


Fig. 13.22

Elipsoidul central de inerție are axele și ecuația

$$i_x^2 = \frac{b^2+c^2}{12}, \quad i_y^2 = \frac{a^2+c^2}{12}, \quad i_z^2 = \frac{a^2+b^2}{12}$$

$$\frac{x^2}{i_y i_z} + \frac{y^2}{i_x i_z} + \frac{z^2}{i_x i_y} = 1.$$

13.23. Să se determine elipsoidul central de inerție, al unui cilindru de rază R și înălțime h, în raport cu un sistem de axe rectangulare, $Oxyz$ (fig. 13.23).

Rezolvare.

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz\cdot\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho^3\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\pi\cdot hR^4 = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_y = I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz\iint(x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{MR^2}{4}.$$

Elipsoidul central de inerție va fi un elipsoid de rotație, în jurul lui Oz

$$\frac{x^2}{i_y i_z} + \frac{y^2}{i_x i_z} + \frac{z^2}{i_x i_y} = 1$$

$$i_z = \frac{R^2}{2}, \quad i_y = i_x = \frac{R^2}{4}.$$

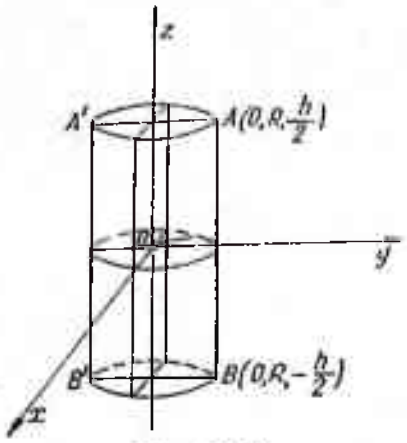


Fig. 13.23

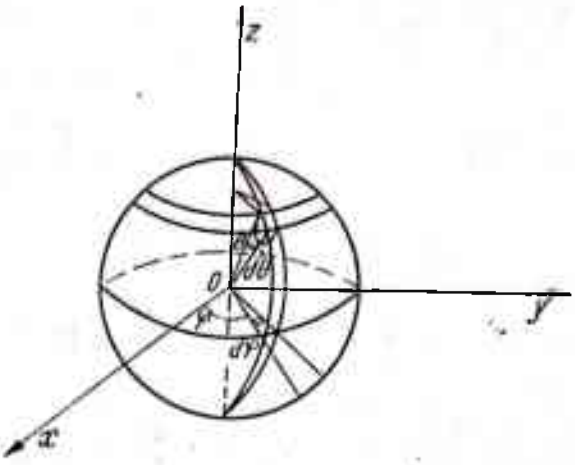


Fig.13.24

13.24. Care sînt momentele de inerţie şi elipsoidul central de inerţie la o sferă plină (fig. 13.24)?

Rezolvare.

$$I_O = \rho \iiint_{(V)} r^2 \, dV = \rho \int_0^R r^4 \, dr \int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{5} \pi\rho R^5 =$$

$$= \frac{3}{5} MR^2, \quad \left(M = \frac{4}{3} \rho\pi R^3\right)$$

$$I_{xOy} = I_{yOz} = I_{zOx} = \frac{1}{3} \iiint_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2) \, dm = \frac{1}{3} I_O = \frac{1}{5} MR^2.$$

Elipsoidul central de inerţie este o sferă cu raza $R\sqrt{\frac{1}{5}}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{5} R^2.$$

13.25. Să se determine momentul de inerţie al unui solid de rotaţie în raport cu axa Oz (fig. 13.25).

Cazuri particulare:

a) inel foarte subţire (fig. 13.25, *a*);

b) tor de secţiune dreptunghiulară (laturi b şi h; raza medie a torului a), (fig. 13.25, *b*);

c) tor de secţiune circulară (R — raza cercului de secţiune; a — raza medie a torului) (fig. 13.25, *c*).

Rezolvare.

$$I_z = \iiint_{(V)} r^2 \, dV = 2\pi\rho \iint_{(A)} r^3 \, dA.$$

a) $I_z = 2\pi a^3 \int_0^h dh = 2\pi\rho a^3 h = Ma^2, \ (M = 2\pi\rho ah)$

b) $I_z = 2\pi\rho \int r^3(h\,\mathrm{d}r) = 2\pi\rho h \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{M}{64ab}(16a^4 + 24a^2b^2 + b^4)$,

$$(M = 2\pi\rho abh)$$

c) $I_z = 2\pi\rho \int r^3 h\,\mathrm{d}r = 2\pi\rho \int_{a-R}^{a+R} r^3 \sqrt{R^2 - (r-a)^2}\,\mathrm{d}r = \frac{M}{4\pi}(4a^2 + 3R^2)$,

$$(M = 2\rho a\pi^2 R^2).$$

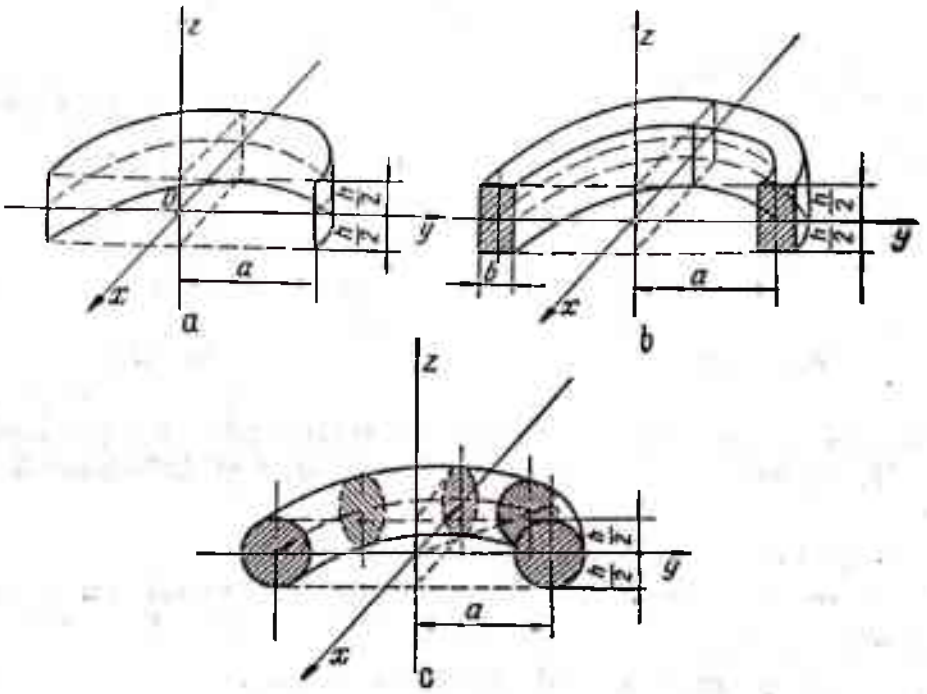


Fig. 13.25

13.26. Se dă o semisferă de rază R și se cere elipsoidul de inerție în raport cu punctul O — centrul sferei corespunzătoare (fig. 13.26).

Rezolvare. Avem

$$I_{xOy} = I_{xOz} = I_{yOz} = \frac{1}{3} I_O = \frac{1}{3}\rho \int_0^R r^2 \cdot r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2\rho R^5 \pi}{15} = \frac{MR^2}{5};$$

aici

$$M = \rho \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\rho\frac{R^3}{3}\pi.$$

Mai departe,

$$i_x^2 = i_y^2 = i_z^2 = \frac{1}{5}R^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Elipsoidul de inerţie al semisferei se reduce la o sferă cu centrul în O, de rază $R\sqrt{\frac{1}{5}}$ a cărei ecuaţie este

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{5} R^2.$$

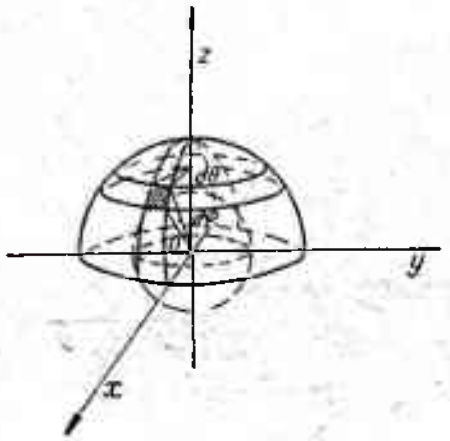


Fig. 13.26

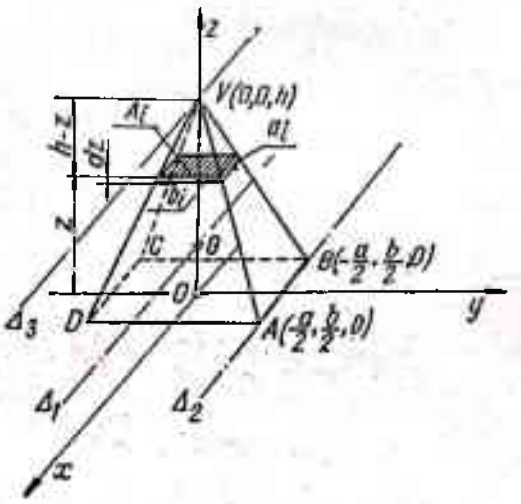


Fig. 13.27

13.27. Să se calculeze momentele de inerţie pentru o piramidă dreaptă, de masă M, cu baza un dreptunghi de laturi a, b şi înălţimea h (fig.13.27), faţă de:

a) axa geometrică a piramidei (Oz);

b) axa trecînd prin centrul de greutate şi paralelă cu muchia $a(\Delta_1)$;

c) muchia $a(\Delta_2)$;

d) paralela la muchia a, dusă prin vîrf (Δ_3).

Rezolvare. Avem

$$\frac{A_\ell}{ab} = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2, \quad A_\ell = a_\ell \cdot b_\ell$$

unde $A_\ell = \frac{ab}{h^2}(h-z)^2$. Rezultă

$$I_{zOy} = \rho \iiint z^2 \, dV = \rho \frac{ab}{h^2} \int_0^h z^2 \, dz (h-z)^2 = \frac{\rho ab}{h^2}\left[h^2 \cdot \frac{h^3}{3} - 2h\frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}\right] =$$

$$= \rho abh^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\rho}{30} abh^3 = \frac{1}{10} Mh^2.$$

Dar

$$\frac{a_\ell}{a} = \frac{h-z}{h}, \quad a_\ell = \frac{a}{h}(h-z), \quad \left(\frac{b_\ell}{b}\right)^2 = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2, \quad b_\ell^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-z)^2,$$

deci

$$I_{xOz} = \rho \int \frac{1}{12} a_i b_i^3 \, dz = \frac{\rho a b^3}{12 h^4} \int_0^h (h - z)^4 \, dz = \frac{\rho a b^3}{12 h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{\rho a b h}{3} \left(\frac{b^2}{20} \right) = \frac{1}{20} M b^2.$$

$$I_{xOz} = \frac{1}{20} M b^2.$$

Analog, obținem

$$I_{yOz} = \frac{1}{20} M a^2.$$

a) $I_{Oz} = I_{xOz} + I_{yOz} = \frac{M}{20} (a^2 + b^2).$

b) $I_{\Delta_1} = I_z - M \frac{h^2}{16} = I_{xOz} + I_{xOy} - \frac{Mh^2}{16} = \frac{Mb^2}{20} + \frac{Mh^2}{10} - \frac{Mh^2}{16} =$

$$= \frac{Mb^2}{20} + \frac{3}{80} M h^2 = \frac{M}{80} (4b^2 + 3h^2).$$

c) $I_{\Delta_2} = I_{\Delta_1} + M \frac{h^2 + 4b^2}{16} = \frac{M}{10} (3b^2 + h^2).$

d) $I_{\Delta_3} = I_{\Delta_1} + M \left(\frac{3}{4} h \right)^2 = \frac{M}{20} (b^2 + 12h^2).$

13.28. Considerînd 1/8 din elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

să se determine elipsoidul de inerție față de punctul O.

Rezolvare. Momentele de inerție planare:

$$I_{xOy} = \rho \int_0^a dx \int_0^b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dy \int_0^c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}} \, z^2 \cdot dz = \frac{\rho \pi a b c^3}{30}$$

$$I_{yOz} = \frac{\rho \pi a^3 b c}{30}$$

$$I_{xOz} = \frac{\rho \pi a^3 b c}{30}.$$

Momentele de inerție axiale:

$$I_x = I_{xOy} + I_{xOz} = \frac{\rho \pi a b c}{30} (b^2 + c^2)$$

$$I_y = I_{xOy} + I_{yOz} = \frac{\rho \pi a b c}{30} (a^2 + c^2)$$

$$I_z = I_{xOz} + I_{yOz} = \frac{\rho \pi a b c}{30} (a^2 + b^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele de inerţie centrifuge:

$$I_{yz} = \rho \iiint y \cdot z \cdot dx\, dy\, dz = \rho \int_0^a dx \int_0^b \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, y\, dy \int_0^c \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, z \cdot dz =$$

$$= \frac{\rho a b^2 c^2}{15}$$

$$I_{xz} = \frac{\rho a^2 b c^2}{15}; \quad I_{xy} = \frac{\rho a^2 b^2 c}{15}.$$

Ecuaţia elipsoidului de inerţie faţă de punctul O:

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 - 2I_{yz} YZ - 2I_{xy} XY - 2I_{zx} ZX - 1 = 0$$

care devine

$$\frac{\rho \pi a b c}{30} [(b^2 + c^2) X^2 + (c^2 + a^2) Y^2 + (a^2 + b^2) Z^2] -$$

$$- \frac{\rho \pi a b c}{15} [bcYZ + acXZ + abXY] = 1.$$

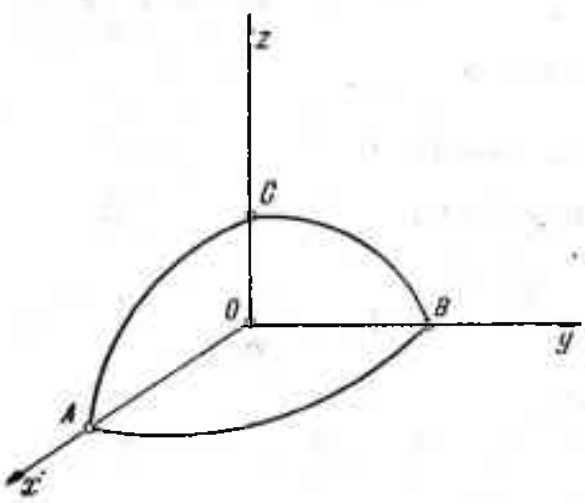


Fig. 13.28

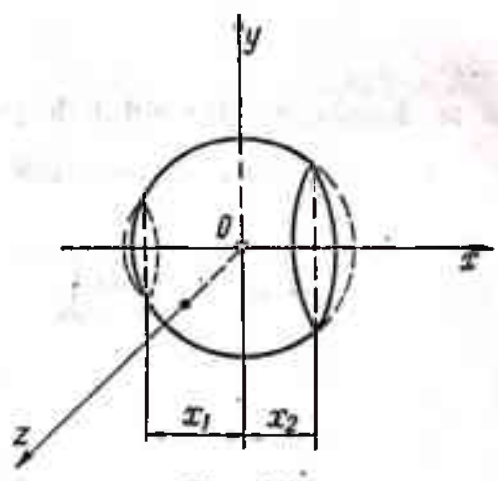


Fig. 13.29

13.29. Să se determine momentul de inerţie al unui segment sferic de rază r, faţă de axa sa.

Rezolvare. Se intersectează sfera de rază r cu planul xOy şi se obţine cercul $x^2 + y^2 = r^2$
de unde rezultă $y^2 = r^2 - x^2$.

Momentul de inerţie al segmentului sferic delimitat de planele paralele duse la distanţele x_1, x_2 este:

$$I_x = \frac{1}{2}\pi\rho\int y^4\,dx = \frac{1}{2}\pi\rho\int_{x_1}^{x_2}(r^2 - x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\pi\rho\left| r^4x - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}r^2x^3 + \frac{x^5}{5}\right|_{x_1}^{x_2}.$$

Pentru anumite valori ale lui x_1 și x_2 se obțin:

a) sfera întreagă:

$$x_1 = -r;\quad x_2 = r;\quad I_x = \frac{8}{15}\pi\rho r^5;$$

b) $x_1 = -\frac{r}{2};\quad x_2 = \frac{1}{2}r;\quad I_x = \frac{203}{480}\pi\rho r^5;$

c) $x_1 = 0;\quad x_2 = \frac{r}{2};\quad I_x = \frac{203}{960}\pi\rho r^5;$

d) pentru calota sferică cuprinsă între $x_1 = \frac{r}{2}$ și $x_2 = r$,

$$I_x = \frac{153}{320}\pi\rho r^2.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

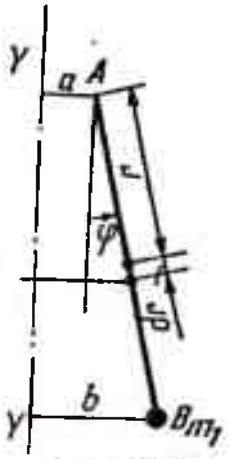


Fig. 13.30

13.30. Să se calculeze momentul de inerție față de axa $Y - Y$, pentru o bară subțire $AB = l$, de masă m, terminată în B cu o masă concentrată m_1. Bara AB se află în planul axei $Y - Y$, punctele A și B fiind la distanțele a și b de axă (fig. 13.30).

R. $M = \rho l$

$$I_x = m_1b^2 + \frac{M}{3}(a^2 + b^2 + ab).$$

13.31. Să se calculeze momentul de inerție al secțiunii omogene din (fig. 13.31) în raport cu latura AB.

R. $I_{AB} = \frac{1}{3}M_1h_1^2 + \frac{1}{18}M_2[h^2 + 2(3h_1 + h)^2] - \frac{M_3}{18}\times[(h - h_2)^2 +$

$$+ 2(3h_1 + 2h_2 + h)^2]$$

$$M_1 = \rho\cdot ah_1,\quad M_2 = \frac{1}{2}\rho bh,\quad M_3 = \frac{1}{2}\rho c(h - h_2).$$

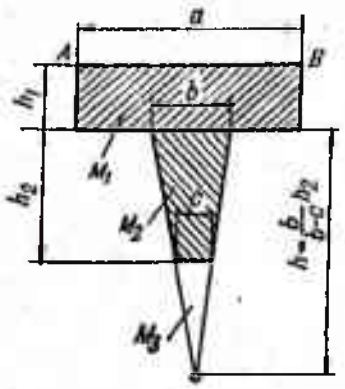


Fig. 13.31

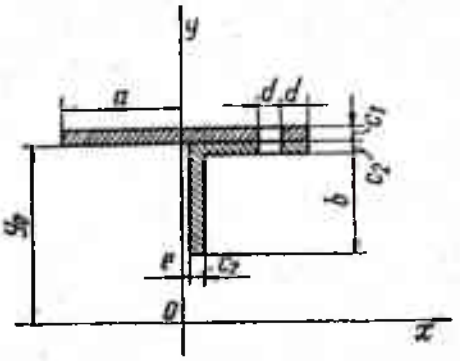


Fig. 13.32

13.32. Se cer momentele de inerţie I_x şi I_y pentru platbanda şi corniera din figura 13.32.

R. $I_x = I_{1x} + I_{2x} + I_{3x}$, $I_y = I_{1y} + I_{2y} + I_{3y}$

$$I_{1x} = \frac{M_1}{12}[c_1^2 + 3(2y_0 + c_1)^2]$$

$$I_{2x} = \frac{M_2}{12}[c_2^2 + 3(2y_0 - c_2)^2]$$

$$I_{3x} = \frac{M_3}{12}[b^2 + 3(2y_0 - 2c_2 - b)^2]$$

$$I_{1y} = \frac{1}{3}M_1a^2 - \frac{M_1'}{12}\cdot[d^2 + 3(2a - 3d)^2]$$

$$I_{2y} = \frac{1}{12}M_2(a-e)^2 + M_2\left(e + \frac{a-e}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}M_2'd^2 - M_2'\times\left(a - \frac{3d}{2}\right)^2$$

$$I_{3y} = \frac{1}{12}M_3c_2^2 + M_3\left(e + \frac{c_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M_3[c_2^2 + 3(2e + c_2)^2].$$

Aici:

$$M_1 = \rho c_1(2a - d),\ M_2 = \rho c_2(a - e - d),\ M_3 = \rho b c_2,$$

$$M_1' = \rho c_1 d,\ M_2' = \rho c_2 b.$$

13.33. Se consideră o secţiune simetrică în formă de T avînd dimensiunile din figura 13.33. Se cere să se determine elipsa centrală de inerţie a secţiunii în următoarele cazuri:

a) secţiunea este omogenă (fig. 13.33, *a*);

b) secţiunea este neomogenă; se consideră că talpa este armată cu două vergele de oţel egale, avînd diametrul $d = \frac{a}{10}$, aşezate ca în figura

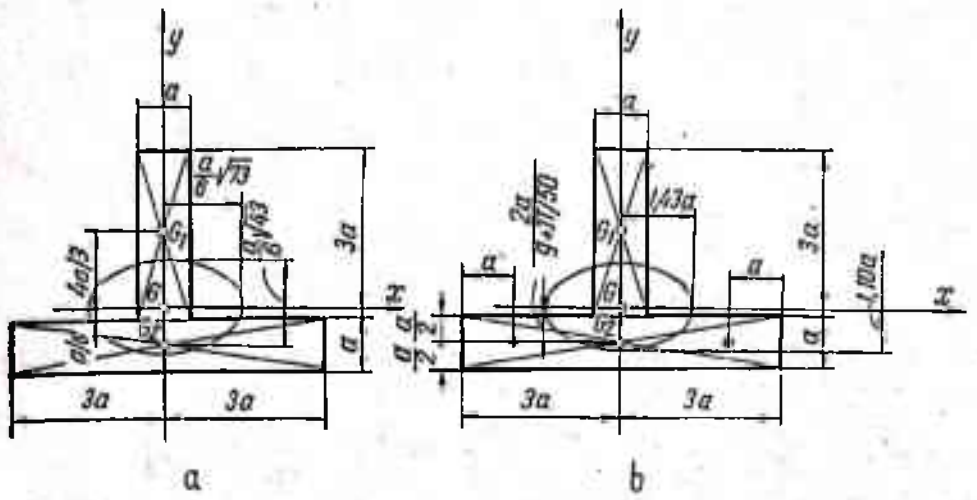


Fig. 13.33

13.33, *b*. (Se presupune că densitatea restului de material din care este făcută secțiunea este 1/4 din densitatea oțelului).

R. $I_x = \frac{43}{36} Ma^2, \quad I_{xy} = 0, \quad I_y = \frac{73}{36} Ma^2$

$$i_x^2 = \frac{43}{36} a^2, \quad i_y^2 = \frac{73}{36} a^2$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{6}\sqrt{73}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{6}\sqrt{43}\right)^2} = 1$$

$$I_x = 1{,}203\, Ma^2, \quad I_y = 2{,}060\, Ma^2, \quad I_{xy} = 0$$

$$i_x^2 = 1{,}203\, a^2, \quad i_y^2 = 2{,}060\, a^2$$

$$\frac{x^2}{2{,}060\, a^2} + \frac{y^2}{1{,}203\, a^2} = 1.$$

13.34. Să se calculeze momentele de inerție I_{x_1}, I_{y_1}, I_{xy} pentru un triunghi dreptunghic ABC, Ax și Ay avînd direcțiile catetelor (fig. 13.34). Caz particular: triunghiul ABC este triunghiul lui Pitagora ($AB = 3$ *m*, $AC = 4$ *m* și $BC = 5$ *m*). Masa specifică este ρ.

R. $I_x = \frac{Mc^2}{6}, \quad I_y = \frac{Mb^2}{6}, \quad I_{xy} = \frac{Mbc}{12},$

$$I_{BC} = \rho \frac{ah^3}{12} = 5{,}76\, \rho t \cdot m^2, \quad I_{AC} = 9 \rho t \cdot m^2,$$

$$I_{AB} = 16 \rho t \cdot m^2.$$

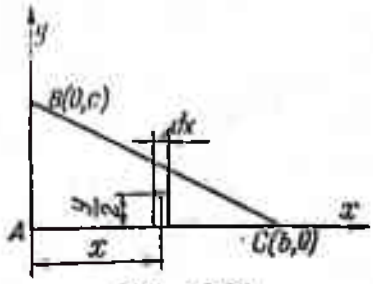


Fig. 13.34

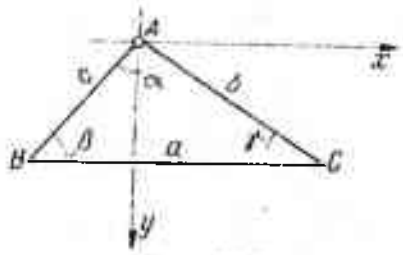


Fig. 13.35

13.35. Să se calculeze momentul de inerţie polar al unui triunghi ABC, de laturi a, b, c, în raport cu vîrful A (fig. 13.35).

R. $I_A = I_x + I_y = \frac{M}{2}\left(b^2 \sin^2 \gamma + \frac{b^3}{3a} \cos^3 \gamma + \frac{c^3}{3a} \cos^3 \beta\right)$.

13.36. Într-un disc circular de rază R se efectuează un gol de rază r (fig. 13.36). Să se determine raportul dintre razele de giraţie luate în raport cu punctul O_1 — ale discului plin şi ale discului cu gol, ştiind că distanţa $O_1O = d > R$.

R. $I_{O_1(M)} = M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right)$, $I_{O_1(m)} = m\left(\frac{r^2}{2} + d^2\right)$

unde $$M = \rho\pi R^2, \quad m = \rho\pi r^2.$$

$$I_{O_1} = M\,\frac{R^2 - r^2}{2R^2}\,(R^2 + r^2 + 2d^2)$$

$$\frac{i_{O_1(M)}}{i_{O_1}} = \sqrt{\frac{I_{O_1(M)}}{I_{O_1}}}.$$

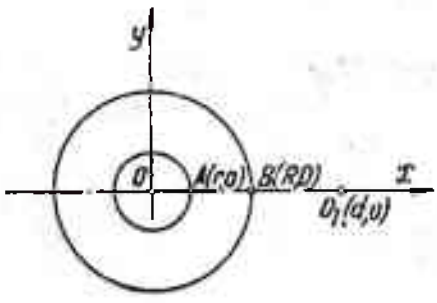


Fig. 13.36

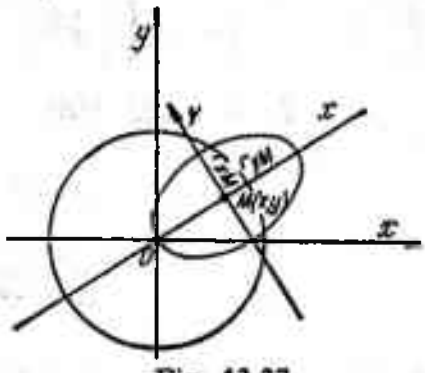


Fig. 13.37

13.37. Cum variază elementele elipsei de inerţie pentru un cerc de raza R, în raport cu diferite puncte din planul cercului (fig. 13.37)?

R. $I_X = \frac{MR^2}{4}$, $I_Y = \frac{MR^2}{4} + M(x^2 + y^2)$

$$i^2_{XM} = \frac{R^2}{4}, \quad I^2_{YM} = \frac{R^2 + 4(x^2 + y^2)}{4}$$

$$\frac{Y^2}{\frac{R^2}{4}} + \frac{X^2}{\frac{R^2 + 4(x^2 + y^2)}{4}} = 1$$

13.38. Se cer elipsele de inerție în raport cu punctul O, considerînd numai suprafețele hașurate din pătratele $OACBO$ în următoarele cazuri:

a) se înlocuiește colțul $O_1A'BC'$ cu un sfert de cerc cu centrul în O_1 și raza a (fig. 13.38, a);

b) se extrage din colțul $O_1A'BC'$ un sfert de cerc cu centrul în B și raza a (fig. 13.38, b).

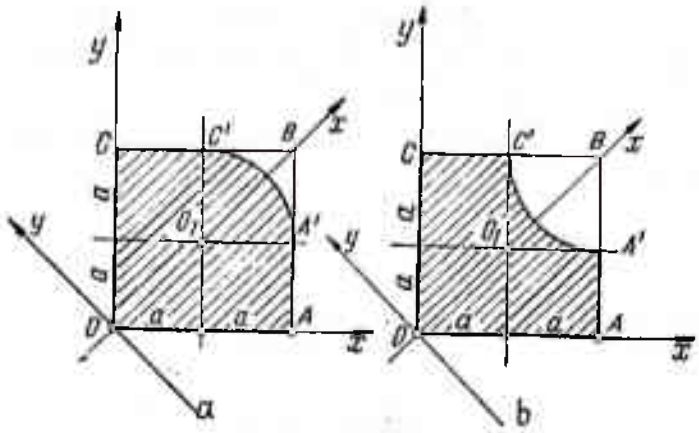


Fig. 13.38

R. a) $\dfrac{X^2}{1{,}93\,a^2} + \dfrac{Y^2}{0{,}180\,a^2} = 1, \quad i_x^2 = 0{,}180\,a^2, \quad i_y^2 = 1{,}92\,a^2;$

b) $\dfrac{X^2}{2{,}509\,a^2} + \dfrac{Y^2}{0{,}186\,a^2} = 1, \quad i_x^2 = 0{,}186\,a^2, \quad i_y^2 = 2{,}509\,a^2.$

13.39. Să se calculeze momentul de inerție polar al ariei unui poligon regulat cu n laturi, în raport cu centrul ariei (fig. 13.39).

R. $I_O' = \dfrac{n}{2} \cdot M\left(a^2 + \dfrac{l^2}{12}\right).$

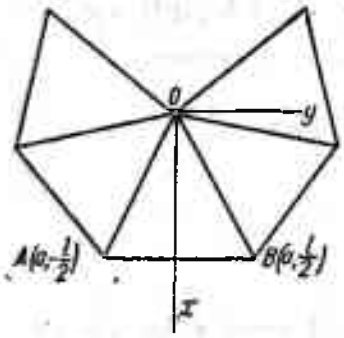


Fig. 13.39

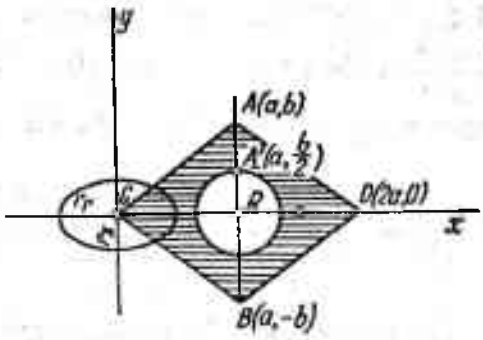


Fig. 13.40

13.40. Se dă rombul din figura 13.40, avînd diagonalele $AB = 2b$, $CD = 2a$, din care se extrage cercul de rază $\dfrac{b}{2}$. Să se determine elipsa de inerție pentru punctul C.

R. $I_x = \rho b^3\left(\dfrac{1}{3}a - \dfrac{\pi}{64}b\right), \quad I_{xy} = 0;$

$$I_y = \rho a^2\left[\frac{1}{3}ab - \frac{\pi b^4}{a^2 \cdot 64} + b\left(2a - \frac{\pi b}{4}\right)\right]$$

$$M = \frac{\rho b}{4}(8a - \pi b).$$

13.41. Se dă un con circular drept, de rază R, înălțimea H și densitate ρ. Se cere să se stabilească momentul de inerție polar al conului în raport cu vîrful său O (fig. 13.41).

Aplicație: Se va exprima rezultatul în sistemul CGS și SI pentru $R = 2$ m $H = 5$ m, $\rho = 7{,}8$ t/m³.

R. $I_O = \frac{1}{3} M \left(\frac{R^2}{2} + H^2 \right)$.

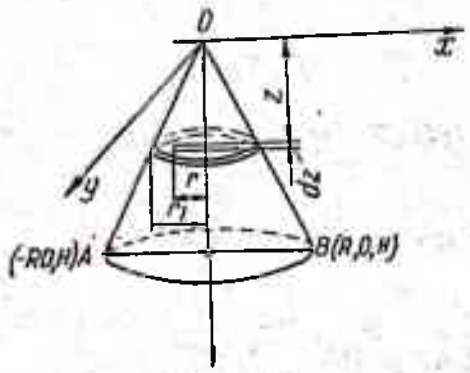


Fig. 13.41

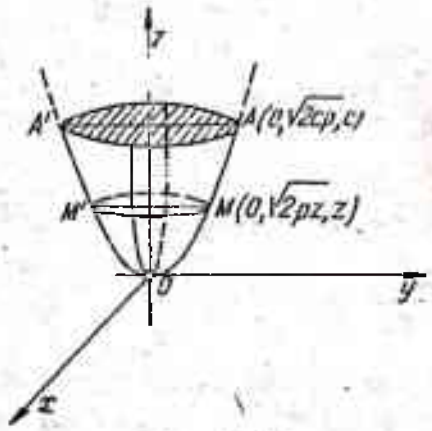


Fig. 13.42

13.42. Se dă un corp omogen de densitate ρ, mărginit de suprafața $z = \frac{x^2 + y^2}{2p}$ și de planul $z = c$ (fig. 13.42). Care este momentul de inerție I_z al acestui corp în raport cu axa Oz? Caz particular: $c = p$.

R. $I_z = \frac{M}{3} cp = \frac{M}{3} c^2$.

13.43. Să se calculeze momentul de inerție al unei sfere de rază R în raport cu: a) un plan tangent la acea sferă; b) o tangentă la sferă.

R. a) $I = \frac{6}{5} MR^2$

b) $I = \frac{7}{5} MR^2$.

13.44. Să se calculeze momentul de inerție al unui tetraedru regulat de latură a în raport cu o muchie a tetraedrului (fig. 13.44).

R. $I_a = 0{,}175\, Ma^2$.

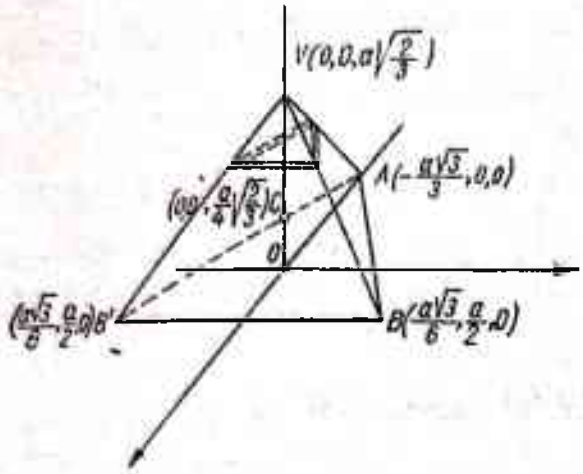


Fig. 13.44

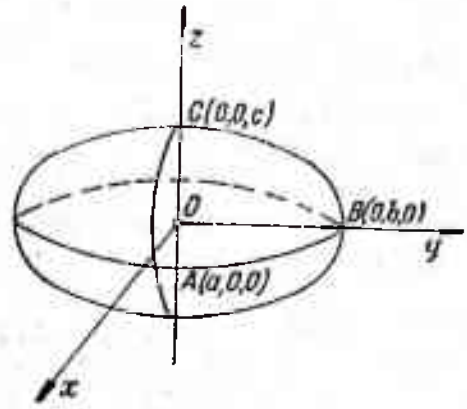


Fig. 13.45

13.45. Să se calculeze momentul de inerţie pentru un elipsoid de axe $2a$, $2b$, $2c$ faţă de axele Ox, Oy şi Oz (fig. 13.45).

R. $I_x = M\dfrac{b^2+c^2}{5}$, $I_y = M\dfrac{a^2+c^2}{5}$, $I_z = M\dfrac{a^2+b^2}{5}$.

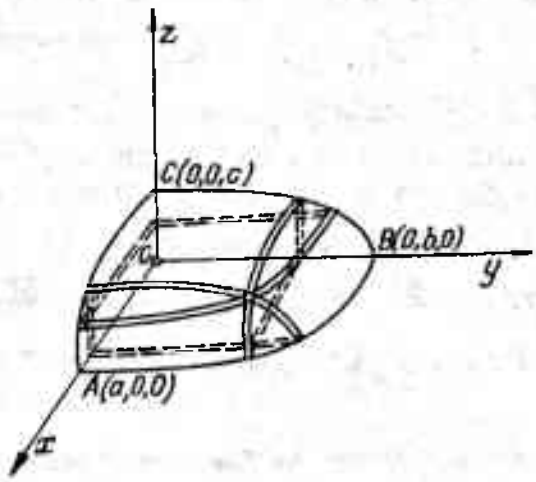


Fig. 13.46

13.46. Să se determine elipsoidul de inerţie în raport cu O pentru $\frac{1}{8}$ din elipsoidul din figura 13.46.

R. $\dfrac{\pi abc}{30}[(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2]-\dfrac{2abc}{15}[bcyz+cazx+$
$+abxy]=1.$

XIV. DINAMICA SOLIDULUI

Definiţii şi formule

Mişcarea solidului se studiază utilizînd teoremele generale din mişcarea sistemelor de puncte materiale adaptate la acest caz.

Teorema impulsului: derivata în raport cu timpul a impulsului unui solid (egal cu masa solidului multiplicată cu viteza centrului de masă $m\bar{v}_G$) este egală cu suma forţelor care acţionează asupra solidului

$$\dot{\bar{H}} = \frac{d}{dt}\,\Sigma\bar{v}_i m_i = \frac{d}{dt}\,(m\bar{v}_G) = \Sigma\bar{F}_i = \bar{R}.$$

Teorema momentului cinetic: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al solidului faţă de centrul său de masă este egală cu momentul forţelor exterioare în raport cu centrul de masă.

$$\dot{\bar{K}} = \frac{d}{dt}\,\Sigma\bar{r}_i \times m_i(\bar{\omega}\times\bar{r}_i) = \Sigma\bar{r}_i\times\bar{F}_i = \bar{M}.$$

În afara celor două teoreme care formează la un loc *teorema torsorului* se utilizează şi

Teorema energiei: variaţia energiei cinetice a unui solid în raport cu timpul, este egală cu puterea forţelor care acţionează asupra solidului

$$\dot{E} = \bar{v}_0\bar{R} + \bar{\omega}\bar{M}.$$

Aplicaţii frecvente ale teoriei generale sînt: mişcarea plan-paralelă a solidului, mişcarea solidului cu axă fixă şi mişcarea solidului cu punct fix.

Mişcarea plan-paralelă se studiază de obicei cu un sistem de ecuaţii diferenţiale de forma

$$m\ddot{x}_G = X, \quad m\ddot{y}_G = Y, \quad I_{zz}\ddot{\theta} = M_z.$$

Mişcarea solidului cu axă fixă (fig. XIV.1) se studiază cu sistemul de ecuaţii

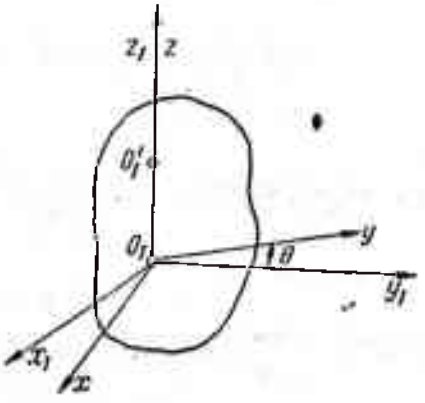


Fig. XIV.1

$$-\dot{\omega}\,my_G - \omega^2 mx_G = R_x + R_{1x} + R'_{1x}$$
$$\dot{\omega}\,mx_G - \omega^2 my_G = R_y + R_{1y} + R'_{1y}$$
$$0 = R_z + R_{1z} + R'_{1z}$$
$$-\dot{\omega}I_{zx} + \omega^2 I_{yz} = M_x - hR'_{1y}$$
$$-\dot{\omega}I_{yz} - \omega^2 I_{xz} = M_y + hR'_{1x}$$
$$I_{zz}\dot{\omega} = M_z,$$

unde am notat cu $\bar{R}(R_x, R_y, R_z)$ rezultanta forţelor exterioare, $\bar{M}(M_x, M_y, M_z)$ momentul

rezultant al forțelor exterioare, $\bar{R}_1'(R_{1x}', R_{1y}', R_{1z}')$ și $\bar{R}_1(R_{1x}, R_{1y}, R_{1z})$ reacțiunile axei în punctele fixe O' și O.

Mișcarea solidului cu punct fix se studiază cu ajutorul ecuațiilor lui Euler (dacă axele mobile legate de solid și care trec prin punctul fix sînt axe principale de inerție).

$$I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\,\omega_y\omega_z = M_x$$

$$I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x = M_y$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\,\omega_x\omega_y = M_z$$

unde ω_x, ω_y, ω_z pot fi determinate în funcție de unghiurile lui Euler φ, ψ și θ, cu ecuațiile

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\omega_y = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta.$$

Probleme rezolvate

14.1. Un tramvai este frînat brusc. La un moment dat o persoană din tramvai face un pas înainte de 0,30 m pentru ca să nu cadă jos. Ce viteză avea tramvaiul în momentul frînării știind că se oprește după ce mai merge 9,60 m?

Înălțimea centrului de greutate al persoanei = 0,9 m

Rezolvare:

$$\frac{ma}{mg} = \frac{30}{90}; \quad a = \frac{g}{3} = 3{,}27\,\frac{m}{s^2}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2; \quad v = at = \sqrt{2as} = 7{,}92\,\frac{m}{2} = 28{,}50\,\frac{km}{h}$$

$$t = \frac{7{,}92}{3{,}27} = 2{,}4\ s.$$

14.2. Pentru apărarea unui chei de loviturile remorcherelor, la abordaj se așază o grindă între stîlpi — ca în figura 14.2. Să se determine forța de abordaj a unui vas de 20 t, care are o viteză de 0,5 m/s.

Rezolvare:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Pf$$

$$f = \frac{Pl^3}{48\,EI}\text{(săgeata grinzii)}$$

$$Mv^2 = \frac{P^2l^3}{48\,EI}; \quad P^2 = \frac{48\,EIGv^2}{gl^3}$$

Scanned with OKEN Scanner

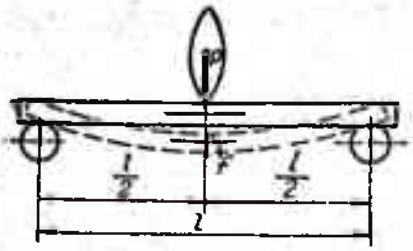


Fig. 14.2

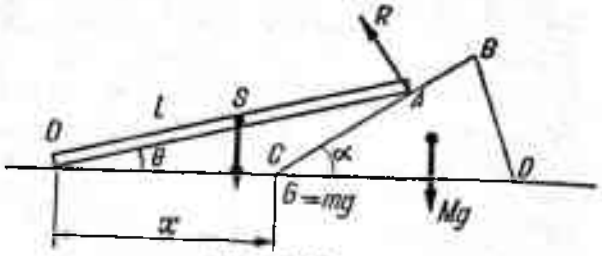


Fig. 14.3

14.3. Bara OA de lungime l și greutate mg reazemă cu capătul O pe un plan orizontal și cu capătul A pe o prismă triunghiulară de greutate Mg. Să se studieze mișcarea (Routh, Kraft).

Rezolvare. Ecuațiile mișcării sînt:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = R\sin\alpha$$

$$mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = Rl\cos(\alpha-\theta) - mg\frac{1}{2}\cos\theta,$$

cărora li se adaugă relația geometrică

$$x = \frac{l}{\sin\alpha}\sin(\alpha-\theta).$$

Diferențierea ultimei relații dă:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\frac{l}{\sin\alpha}\cos(\alpha-\theta)\frac{d\theta}{dt};\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{l}{\sin\alpha}\sin(\alpha-\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Cu prima ecuație se obține:

$$-M\sin(\alpha-\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\sin^2\alpha.$$

Din ecuațiile mișcării, multiplicînd cu $2\frac{dx}{dt}$ și cu $2\frac{d\theta}{dt}$, se obține:

$$2M\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}\cdot R\sin\alpha$$

$$2mk^2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2Rl\cos(\alpha-\theta)\frac{d\theta}{dt} - mgl\cos\theta\frac{d\theta}{dt}..$$

Adunînd, rezultă:

$$2M\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2mk^2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\cos\theta\frac{d\theta}{dt} +$$

$$+ 2R\left[\sin\alpha\frac{dx}{dt} + l\cos(\alpha-\theta)\frac{d\theta}{dt}\right].$$

Înlocuind pe $\sin\alpha \frac{dx}{dt} = -l\cos(\alpha-\theta)\frac{d\theta}{dt}$, se observă că paranteza se anulează și rămîne:

$$2M\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2mk^2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mk^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C - mgl\sin\theta.$$

Înlocuind din nou pe $\frac{dx}{dt}$ ecuația devine:

$$\left[M\frac{l^2}{\sin^2\alpha}\cos^2(\alpha-\theta) + mk^2\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -mgl\sin\theta + C.$$

La $t=0$, $\frac{d\theta}{dt}=0$, $\theta=\beta$; deci $C = mgl\sin\beta$,

$$\left[M\frac{l^2}{\sin^2\alpha}\cos^2(\alpha-\theta) + mk^2\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mgl(\sin\beta - \sin\theta).$$

Nu se poate integra direct mai departe și nu se poate găsi θ în funcție de timp. Dar se află viteza lui O:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -l\cos(\alpha-\theta)\sqrt{\frac{mgl(\sin\beta-\sin\theta)}{Ml^2\cos^2(\alpha-\theta)+mk^2\sin\alpha^2}}.$$

14.4. Să se studieze demararea unui vehicul automobil a cărui roată motoare este acționată de un cuplu motor M (Vilcovici).

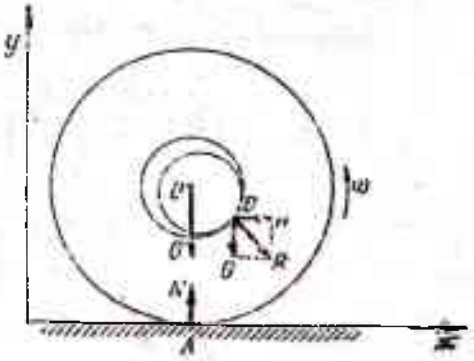


Fig. 14.4

Rezolvare. O este centrul roții motoare; N — reacțiunea solului; F — frecarea cu terenul; B — punctul de contact dintre osia vehiculului și roata motoare; G — greutatea vehiculului; H — rezistența din frecările vehiculului; G' — greutatea roții; M — cuplul motor; M' — cuplul rezistent al frecării de rostogolire; x și y — coordonatele punctului O în plan; m — masa roții motoare.

$$m\ddot{x} = F - H;\quad m\ddot{y} = N - G - G'$$

Dar

$$\ddot{y} = 0;\ N = G + G'.$$

Teorema momentului cinetic aplicată față de O:

$$I\dot{\omega} = -aF + M - M' - M''.$$

I este momentul de inerție al roții față de O; a — raza roții motoare; M'' — momentul reacțiunii R față de O;

$$\dot{x} = v = a\omega$$

$$I\dot{\omega} = -am\dot{v} - aH + M - M' - M'';$$

$$(I + ma^2)\,\dot{\omega} = M - M' - M'' - aH.$$

În perioada de demarare, ω este inițial zero și după timpul t atinge valoarea ω. Integrînd în acest interval de timp se obține: $(I + ma^2)\omega = Mt - M_r t$, unde s-a notat cu M_r momentul rezistent considerat constant în acest interval, iar cu M momentul cuplului motor $M = \frac{(I + ma^2)\,\omega}{t} + M_r$.

În perioada de oprire vom avea: $-(I + ma^2)\omega = Mt - tM_r$, iar timpul de oprire: $t = \frac{(I + ma^2)\,\dot{\omega}}{M_r}$.

14.5. Pe periferia unui disc de rază R și greutate $\bar{G}$ se deplasează un punct de greutate $\bar{P}$, cu viteza constantă $\bar{v}_0$ (fig. 14.5). Ce mișcare efectuează discul?

Rezolvare. Forțele exterioare fiind paralele cu axa $Z - Z$, momentul lor față de această axă este nul.

Teorema momentului cinetic față de axa $Z - Z$ are forma

$$\frac{dK_z}{dt} = 0$$

deci

$$K_z = \text{const.}$$

sau

$$K_z = \frac{P}{g} v_0 R + \frac{GR^2}{2g}\omega = K_{z_0}.$$

În momentul inițial $t = 0$, $\omega = 0$ deci $K_{z_0} = 0$.
Rezultă

$$\omega = -\frac{2Pv_0}{GR}.$$

Discul se rotește în sens contrar deplasării punctului cu viteza unghiulară ω determinată de această formulă.

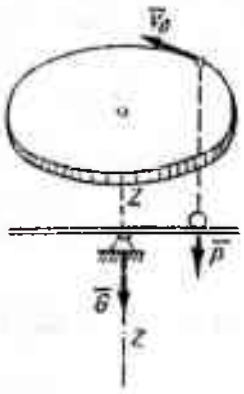


Fig. 14.5

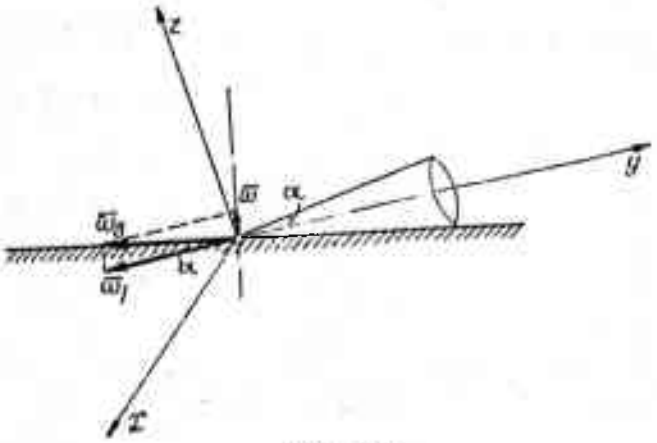


Fig. 14.6

14.6. Un con circular drept de greutate $\bar{P}$, rază $r = \frac{h}{3}$ și înălțime h, se rostogolește fără alunecare pe un plan orizontal avînd fix vîrful O (fig. 14.6). Să se determine energia cinetică a conului, dacă el efectuează în jurul axei verticale două rotații pe secundă.

Rezolvare. Energia cinetică a conului este

$$E = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)$$

unde

$$I_y = \frac{3}{10}\frac{P}{g}r^2, \quad I_x = I_z = \frac{3}{5}\frac{P}{g}\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right)$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega_a \cos\alpha, \quad \omega_z = \omega_a \sin\alpha.$$

Expresia energiei cinetice devine

$$E = \frac{1}{2}\left[+\frac{3}{10}\frac{P}{g}r^2\omega_a^2\cos^2\alpha + \frac{3}{5}\frac{P}{g}\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right)\omega_a^2\sin^2\alpha\right];$$

dar

$$\omega_a = \omega \operatorname{cotg}\alpha,$$

deci

$$E = \frac{3}{20}\frac{P}{g}\omega^2\cos^2\alpha\left[r^2\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \left(6h^2 + \frac{3}{2}r^2\right)\right].$$

Știind că

$$\omega = 4\pi, \quad \cos^2\alpha = \frac{h^2}{h^2 + r^2} = \frac{9}{10}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{10},$$

rezultă

$$E = \frac{387}{25}\frac{P}{g}\pi^2h^2.$$

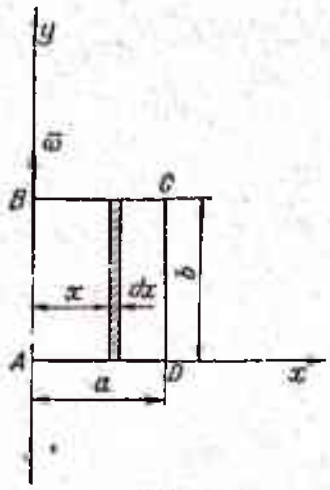


Fig. 14.7

14.7. O placă dreptunghiulară $ABCD$, de greutate P şi suprafaţă ab se roteşte în jurul axei verticale AB cu viteza unghiulară iniţială ω_0 (fig.14.7). În mişcarea sa fiecare element al plăcii întîmpină o rezistenţă din partea aerului direct proporţională cu suprafaţa şi cu pătratul vitezei sale şi de direcţie perpendiculară pe suprafaţa elementului. Factorul de proporţionalitate este k. După cît timp viteza unghiulară a plăcii se reduce la jumătate?

Rezolvare. Rezistenţa aerului pe o suprafaţă elementară va fi:

$$dF = kv^2\,dA \qquad (a)$$

unde

$$v = x\omega \text{ şi } dA = b\,dx.$$

Introducînd aceste valori în (a) obţinem pentru forţa rezistentă elementară expresia

$$dF = kx^2\omega^2 b\,dx.$$

Rezistenţa aerului care acţionează asupra întregii suprafeţe este

$$F = \int_0^a kx^2\omega^2 b\,dx = \frac{kba^3}{3}\omega^2$$

şi se aplică în punctul de coordonate

$$x_0 = \frac{\Sigma x_i F_i}{\Sigma F_i} = \frac{\int_0^a x\,dF}{\int_0^a dF} = \frac{kb\frac{a^4}{4}\omega^2}{kb\frac{a^3}{3}\omega^2} = \frac{3}{4}a$$

$$y_0 = \frac{b}{2}.$$

Pentru studiul mişcării în jurul axei AB scriem teorema momentului cinetic în raport cu această axă

$$\frac{d}{dt}(I_{AB}\omega) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Pa^2}{3g}\omega\right) = -\frac{kba^3}{3}\omega^2 \cdot \frac{3}{4}a$$

sau

$$\frac{P}{3g}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{kba^2}{4}\omega^2.$$

Separăm variabilele şi integrăm

$$-\frac{P}{3g}\frac{1}{\omega} = -\frac{kba^2}{4}t + C.$$

Cu condițiile inițiale $t = 0$, $\omega = \omega_0$ rezultă valoarea constantei de integrare:

$$C = -\frac{P}{3g\omega_0},$$

deci soluția ecuației este

$$-\frac{P}{3g}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}\right) = \frac{kba^2}{4}t.$$

Pentru $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ obținem valoarea timpului t căutat

$$\frac{P}{3g\omega_0} = \frac{kba^2}{4}t$$

sau

$$t = \frac{4P}{3gkba^2\omega_0}.$$

14.8. Un disc de greutate $\bar{Q}$ și rază r se rostogolește fără alunecare pe un plan orizontal sub acțiunea unei forțe $\bar{F}$, aplicate în centrul O (fig. 14.8). Cunoscînd legea de mișcare a acestuia $x_0 = \frac{at^2}{2}$, să se determine mărimea forței $\bar{F}$, a reacțiunii planului și a coeficientului de frecare f dintre disc și plan.

Rezolvare. Mișcarea discului se studiază aplicînd teorema mișcării centrului de masă și teorema momentului cinetic în mișcarea discului în jurul centrului de masă

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{g}\bar{v}_0\right) = \Sigma\bar{F}$$

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \Sigma\bar{M}_0.$$

Poriectăm aceste ecuații pe axe și obținem sistemul

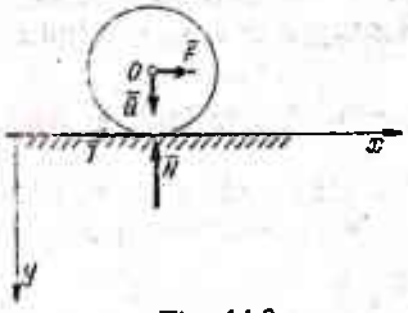


Fig. 14.8

$$\frac{Q}{g}\ddot{x}_0 = F - T \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{Q}{g}\ddot{y}_0 = Q - N$$

$$\frac{Qr^2}{2g}\ddot{\theta} = Tr. \qquad \text{(b)}$$

Dar

$$y_0 = -r,$$

deci

$$\ddot{y}_0 = 0 \text{ și } Q = N \qquad \text{(c)}$$

$$\dot{x}_0 = r\dot{\theta},$$

deci

$$\ddot{x}_0 = r\ddot{\theta}$$

și rezultă

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_0}{r} = \frac{a}{r}.$$

Din ecuația (b) obținem

$$T = \frac{Qa}{2g}. \qquad \text{(d)}$$

Ținînd seama de relațiile (c) și (d) ecuația (a) conduce la valoarea forței F

$$F = \frac{Qa}{g} + \frac{Qa}{2g} = \frac{3Qa}{2g},$$

iar coeficientul de frecare este

$$f = \frac{T}{N} = \frac{a}{2g}.$$

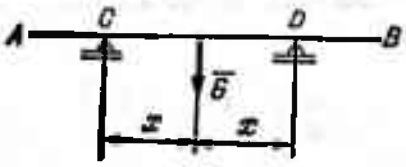


Fig. 14.9

14.9. O grindă AB, de lungime l și greutate $\vec{G}$, este așezată pe două reazeme C și D situate la distanța $CD = 2x$ (fig. 14.9). Care este valoarea lui x astfel încît dacă dispare brusc reazemul B, reacțiunea în C să rămînă neschimbată în primul moment?

Rezolvare. Aplicăm teorema momentului cinetic față de reazemul C

$$I_C\ddot{\theta} = Gx$$

sau

$$I_C = \frac{G}{g}\left(\frac{l^2}{12} + x^2\right)$$

$$\frac{G}{g}\left(\frac{l^2}{12} + x^2\right)\ddot{\theta} = Gx.$$

Dar

$$\frac{G}{g}\ddot{y}_G = G - N_C = \frac{G}{2}$$

și deoarece

$$y_G = x\theta$$

rezultă

$$x\ddot{\theta} = \frac{g}{2}.$$

Din a treia relație și din ultima obținem

$$\frac{1}{g}\left(\frac{l^2}{12} + x^2\right)\frac{g}{2x} = x$$

sau

$$\frac{l^2}{12} + x^2 = 2x^2.$$

Rezultă valoarea x căutată

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

14.10. Sistemul din figura 14.10 este format din trei discuri coaxiale, unul de rază r_2 și celelalte două — dispuse simetric — de raze r_1. Pe acestea din urmă sînt înfășurate două fire. Sistemul are greutatea $\bar{P}$ și raza de inerție ρ în raport cu axul perpendicular pe planul figurii ce trece prin C. Discul de rază r_2 se rostogolește pe un plan înclinat cu unghiul α.

Cunoscînd f, coeficientul de frecare la alunecare dintre discul r_2 și planul înclinat, să se determine tensiunea din fire și viteza centrului C.

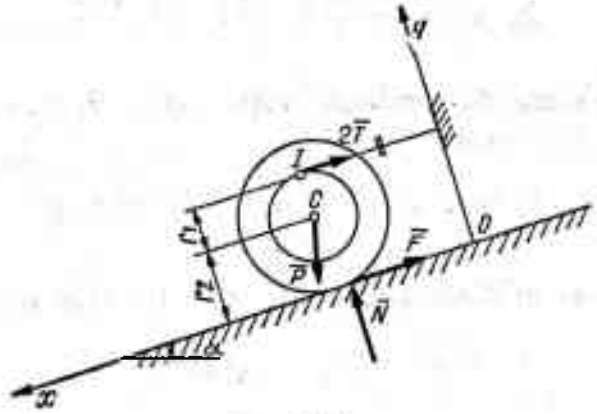


Fig. 14.10

Rezolvare. Teorema mișcării centrului de masă și teorema momentului cinetic, proiectate pe axele de coordonate, duc la ecuațiile:

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_C = P\sin\alpha - 2T - F$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_C = N - P\cos\alpha$$

$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\theta} = 2Tr_1 - Fr_2.$$

Deoarece $\ddot{y}_C = 0$ rezultă din ecuația a doua

$$N = P \cos \alpha.$$

La cele trei ecuații se adaugă relația cinematică

$$\ddot{x}_C = r_1 \ddot{\theta}.$$

Din prima, a treia și ultima ecuație se obține

$$\frac{r_1}{\rho^2} = \frac{P \sin \alpha - 2T - F}{2Tr_1 - Fr_2}$$

de unde

$$T = \frac{1}{2} \frac{F(r_1 r_2 - \rho^2) + P\rho^2 \sin \alpha}{\rho^2 + r_1^2},$$

iar

$$F = fN = fP \cos \alpha.$$

Din aceste două ecuații rezultă

$$T = \frac{P}{2} \frac{\rho^2 \sin \alpha + f(r_1 r_2 - \rho^2) \cos \alpha}{\rho^2 + r_1^2}.$$

Accelerația centrului C este

$$\ddot{x}_C = g r_1 \frac{r_1 \sin \alpha - f(r_1 + r_2) \cos \alpha}{\rho^2 + r_1^2}.$$

Integrînd și ținînd seama de condițiile inițiale ($t = 0$, $\dot{x}_C = 0$), obținem pentru viteza centrului C expresia

$$\dot{x}_C = g r_1 \frac{r_1 \sin \alpha - f(r_1 + r_2) \cos \alpha}{\rho^2 + r_1^2} t.$$

Pentru ca mișcarea să se poată produce trebuie ca

$$r_1 \sin \alpha - f(r_1 + r_2) \cos \alpha > 0,$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha > f \frac{r_1 + r_2}{r_1}$$

14.11. O bară AB de lungime $2l$ și greutate G se mișcă fără frecare în planul vertical, capătul ei A deplasîndu-se pe axa Ox, iar capătul B pe axa Oy. De capătul A al barei este prinsă printr-un fir inextensibil o greutate P, care este trasă astfel pe planul orizontal Ox, coeficientul de frecare la alunecarea acestei greutăți fiind μ. Dacă în momentul inițial bara făcea unghiul θ_0 cu verticala Oy, să se determine:

1) accelerația sistemului, aplicînd teorema energiei;
2) tensiunea din fir, prin aplicarea teoremei impulsului.

Rezolvare. 1) Centrul instantaneu de rotaţie este în I, iar:

$$v_c = IC\omega = l\omega$$

$$v_A = IA\omega = \omega \cdot 2l \cos\theta = v_P.$$

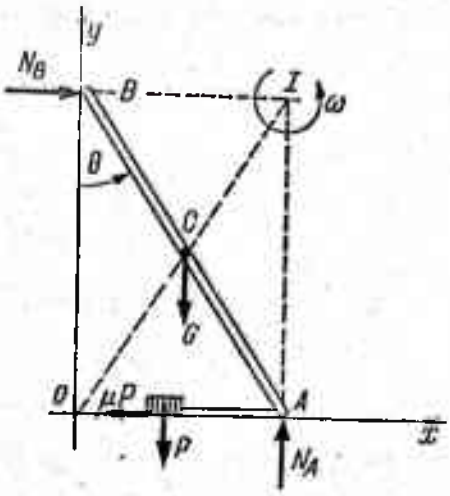
Se aplică teorema energiei $E_1 - E_0 = L_{01}$. $E_0 = 0$, deoarece bara începe să se deplaseze din repaus.

Energia la un moment dat este:

a) Prin aplicarea teoremei lui Koenig:

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_P^2$$

unde



a

Fig. 14.11 *a*

$$I_C = \frac{m(2l)^2}{12} = \frac{Gl^2}{3g}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} l^2\omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{3g} l^2\omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot l^2 \cos^2\theta \cdot \omega^2$$

$$E_1 = l^2\omega^2 \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{G}{g} + \frac{P}{2g} \cos^2\theta\right].$$

b) Considerînd rotaţia instantanee în jurul lui I

$$E_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega^2$$

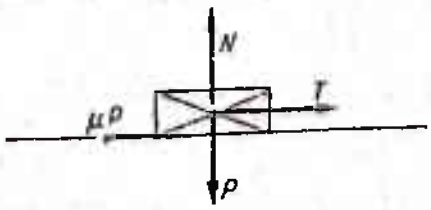
rezultă aceeaşi expresie pentru E_1.

Lucrul mecanic, din poziţia iniţială pînă în poziţia considerată, are expresia:

$$L_{01} = Gl(\cos\theta_0 - \cos\theta) - 2l\mu P(\sin\theta - \sin\theta_0).$$

Teorema energiei dă:

$$\omega^2 = \frac{G(\cos\theta_0 - \cos\theta) - 2\mu P(\sin\theta - \sin\theta_0)}{l\left[\frac{2}{3g} G + \frac{P}{g} \cos^2\theta\right]}.$$



b

Fig. 14.11 *b*

Derivînd această expresie în raport cu timpul se obține accelerația unghiulară:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{G \sin\theta - 2\mu P \cos\theta + \frac{4P}{g} l\omega^2 \sin\theta \cdot \cos\theta}{2l\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{G}{g} + \frac{2P}{g}\cos^2\theta\right)}.$$

2) Tensiunea din firul AP se află prin aplicarea teoremei impulsului

$$\frac{P}{g} v_P = T - \mu P.$$

Deci

$$T = \frac{P}{g} v_P + \mu P$$

$$T = P\left[\frac{2l}{g}(\varepsilon \cos\theta - \sin\theta \cdot \omega^2) + \mu\right]$$

14.12. O bară AB, de lungime $2l$ și greutate $\bar{P}$ alunecă în plan vertical rezemîndu-se cu capetele A și B pe două suprafețe lucii (fig. 14.12). În momentul inițial bara se găsește în repaus și face cu verticala unghiul θ_0. La ce unghi θ capătul A al barei se desprinde de perete?

Rezolvare. Se aplică teorema mișcării centrului de masă $\frac{d\bar{H}_C}{dt} = \Sigma\bar{F}$ și teorema momentului cinetic $\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \Sigma\bar{M}_C$.

Proiectate pe axe cele două teoreme devin

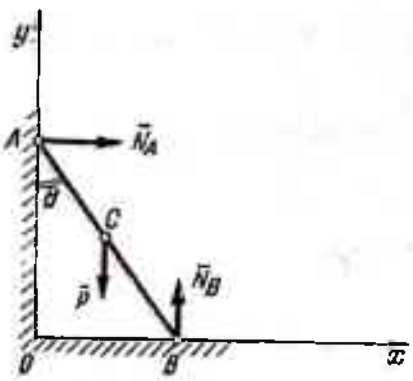


Fig. 14.12

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_C = N_A$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_C = -P + N_B$$

$$\frac{Pl^2}{3g}\ddot{\theta} = N_B l \sin\theta - N_A l \cos\theta.$$

Reacțiunile N_A și N_B rezultate din primele două ecuații introduse în ecuația a treia conduc la relația

$$\frac{l}{3}\ddot{\theta} = (\ddot{y}_C + g)\sin\theta - \ddot{x}_C \cos\theta.$$

Dar

$$x_C = l\sin\theta, \quad \dot{x}_C = l\dot{\theta}\cos\theta, \quad \ddot{x}_C = l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$y_C = l\cos\theta, \quad \dot{y}_C = -l\dot{\theta}\sin\theta, \quad \ddot{y}_C = -l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste relații și din cea precedentă obținem

$$\frac{l}{3}\ddot{\theta} = -l\ddot{\theta}\sin^2\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta + g\sin\theta - l\ddot{\theta}\cos^2\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta$$

sau

$$\frac{2}{3}l\ddot{\theta} = g\sin\theta, \text{ respectiv } \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta.$$

Înmulțind cu $2\dot{\theta}$ și integrînd obținem

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{l}\cos\theta + C.$$

Ținînd seama de condițiile inițiale $t = 0$, $\theta = \theta_0$ și $\dot{\theta} = 0$, rezultă pentru constantă expresia $C = \frac{3g}{l}\cos\theta_0$,

deci

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Valoarea reacțiunii din A se anulează pentru

$$\ddot{x}_C = 0,$$

adică pentru

$$l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

Valorile rezultate din integrarea ecuațiilor în $\ddot{\theta}$ și $\dot{\theta}$, introduse în ultima ecuație conduc la relația

$$\frac{3g}{2l}\sin\theta\cos\theta - \frac{3g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\sin\theta = 0$$

sau

$$[\cos\theta - 2(\cos\theta_0 - \cos\theta)]\sin\theta = 0.$$

Unghiul căutat se obține din relația

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\theta_0$$

de unde

$$\theta = \arccos\frac{2}{3}\cos\theta_0.$$

14.13. O bară AB de lungime $2l$ și greutate $\bar{P}$ alunecă fără frecare pe o semisferă cu centrul în O și rază R. Se cunosc: unghiul $AOB = 90°$ și poziția de repaus a barei în momentul inițial definită prin $\theta = 45°$. Să se determine viteza unghiulară a barei și reacțiunile din A și B (fig. 14.13).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Aplicăm teorema mişcării centrului de masă $\frac{d\bar{H}_C}{dt} = \Sigma \bar{F}$ şi teorema momentului cinetic $\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \Sigma \bar{M}_C$.

Proiectate pe axe, teoremele amintite conduc la ecuaţiile

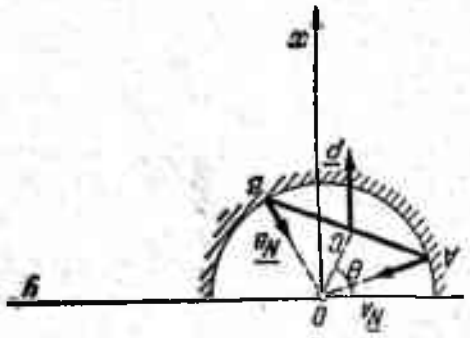


Fig. 14.13

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_C = P - N_A \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - N_B \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_C = N_A \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - N_B \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{P}{g}\frac{(2l)^2}{12}\ddot{\theta} = (N_B - N_A)\, l\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dar

$$x_C = l \sin\theta, \quad y_C = -l\cos\theta$$

$$\dot{x}_C = \dot{\theta} l \cos\theta, \quad \dot{y}_C = \dot{\theta} l \sin\theta$$

$$\ddot{x}_C = l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta),$$

$$\ddot{y}_c = l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta),$$

deci primele două ecuaţii devin

$$\frac{P}{g} l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = P - N_A \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - N_B \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{P}{g} l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = N_A \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - N_B \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Rezolvînd acest sistem obţinem

$$N_A = P\left[\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{l\sqrt{2}}{2g}(\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta})\right]$$

$$N_B = P\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{l\sqrt{2}}{2g}(\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta})\right].$$

Combinînd aceste soluţii cu ecuaţia a treia de proiecţii, găsim

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}\cos\theta,$$

care, multiplicată cu $2\dot{\theta}\,d\theta$ și integrată, dă o integrală primă de forma

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l}\sin\theta + C.$$

Cu condițiile inițiale $t = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\theta = 45°$, valoarea constantei C este

$$C = -3\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{g}{l},$$

deci

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l}\left[\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Astfel, valorile reacțiunilor devin

$$N_A = \frac{P}{8}\left[\sqrt{2}\,(10\sin\theta - \cos\theta) - 6\right]$$

$$N_B = \frac{P}{8}\left[\sqrt{2}\,(10\sin\theta + \cos\theta) - 6\right].$$

Problema se poate rezolva și în alt mod, pornind de la expresia momentului cinetic al barei față de centrul O al semisferei

$$\frac{d}{dt}\sum\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right] = M_0;$$

dar

$$M_0 = Pl\cos\theta,$$

deci coordonatele unui punct O' situat la distanța r de C sînt

$$x_{O'} = x_C - r\cos\theta = l\sin\theta - r\cos\theta$$

$$y_{O'} = -(y_C + r\sin\theta) = -l\cos\theta - r\sin\theta$$

și componentele vitezei

$$\frac{dx_{O'}}{dt} = \dot{\theta}\,(l\cos\theta + r\sin\theta)$$

$$\frac{dy_{O'}}{dt} = \dot{\theta}(l\sin\theta - r\cos\theta).$$

Introducînd aceste valori în expresia momentului cinetic, obținem

$$\frac{d}{dt}\sum\{m\,[\dot{\theta}(l\sin\theta - r\cos\theta)^2 + \dot{\theta}\,(l\cos\theta + r\sin\theta)^2]\} = Pl\cos\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\frac{d}{dt}\Sigma\left[m\dot{\theta}(l^2+r^2)\right]=Pl\cos\theta.$$

Ţinînd seama de faptul că $\Sigma ml^2=\frac{P}{g}l^2$ şi $\Sigma mr^2=\frac{P}{g}\frac{(2l)^2}{12}$, ecuaţia aceasta devine

$$\ddot{\theta}\left[l^2\cdot\frac{P}{g}+\frac{P}{g}\frac{(2l)^2}{12}\right]=Pl\cos\theta$$

respectiv

$$\ddot{\theta}=\frac{3g\cos\theta}{4l}.$$

S-a obţinut şi pe această cale ecuaţia din soluţia dată precedent.

14.14. O bară OA, de lungime l şi greutate $\bar{P}$ se roteşte în jurul unui ax perpendicular pe direcţia ei care trece prin capătul O (fig. 14.14). În momentul iniţial bara se găsea în poziţie orizontală, iar capătul A avea viteza $\bar{v}_0$. Cînd bara ajunge în poziţia verticală se desprinde din articulaţia O. Să se studieze mişcarea ulterioară a barei.

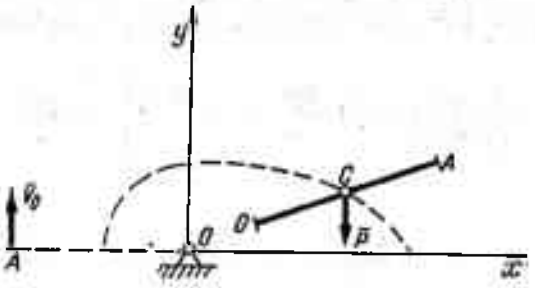


Fig. 14.14

Rezolvare. Se aplică teorema mişcării centrului de masă $\frac{d\bar{H}_C}{dt}=\Sigma\bar{F}$ şi teorema momentului cinetic în mişcarea în jurul centrului de masă $\frac{d\bar{K}_C}{dt}=\Sigma\bar{M}_C$ care, proiectate pe axe, duc la ecuaţiile

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_C=0,\quad \frac{P}{g}\ddot{y}_C=-P,\quad \frac{P}{g}\frac{l^2}{12}\ddot{\theta}=0.$$

Integrînd aceste ecuaţii obţinem

$$\dot{x}_C=C_1,\quad x_C=C_1t+C_2$$

$$\dot{y}_C=-gt+C_3,\quad y_C=-\frac{gt^2}{2}+C_3t+C_4$$

$$\dot{\theta}=C_5,\quad \theta=C_5t+C_6.$$

Pentru determinarea constantelor de integrare se pun condițiile inițiale ale mișcării. Pentru a determina ω_0 inițial al barei aplicăm teorema energiei între poziția orizontală a barei și poziția verticală.

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 - \frac{1}{2} I \frac{v_0^2}{l^2} = -P \frac{l}{2}$$

sau, înlocuind aici valoarea momentului de inerție $I = \frac{P}{g} \frac{l^2}{3}$, avem

$$\frac{P}{g} \frac{l^2}{3} \omega_0^2 - \frac{Pl^2}{3g} \frac{v_0^2}{l^2} = -Pl.$$

Rezultă

$$\omega_0 = \frac{1}{l} \sqrt{v_0^2 - 3gl}.$$

Condițiile inițiale ale mișcării vor fi:

$$t = 0, \quad x_C = 0, \quad y_C = \frac{l}{2}, \quad \dot{x}_C = \frac{1}{2} \sqrt{v_0^2 - 3gl},$$

$$\dot{y}_C = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{l} \sqrt{v_0^2 - 3gl}, \quad \theta = 0.$$

Rezultă pentru constante valorile

$$C_2 = 0, \quad C_4 = \frac{l}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{2} v_0^2 - 3gl, \quad C_3 = 0,$$

$$C_5 = \frac{1}{l} \sqrt{v_0^2 - 3gl}, \quad C_6 = 0.$$

Soluțiile devin

$$\dot{x}_C = \frac{1}{2} \sqrt{v_0^2 - 3gl}, \quad x_C = \frac{t}{2} \sqrt{v_0^2 - 3gl}$$

$$\dot{y}_C = -gt, \quad y_C = -\frac{gt^2}{2} + \frac{l}{2}$$

$$\dot{\theta} = 0, \quad \theta = \frac{t}{l} \sqrt{v_0^2 - 3gl}.$$

Traiectoria centrului de greutate al barei va fi parabola de ecuație

$$y = -\frac{2gx^2}{v_0^2 - 3gl} + \frac{l}{2}$$

14.15. O placă pătrată de latură a și greutate $M\bar{g}$ se rotește în jurul centrului său de greutate. În momentul inițial placa are o viteză unghiulară ω_0 în jurul unei axe care formează cu planul plăcii unghiul α. Să se studieze mișcarea.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Ecuațiile lui Euler sînt pentru placă

$$I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\,\omega_y\omega_z = M_x$$
$$I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\,\omega_z\omega_x = M_y$$
$$I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\,\omega_x\omega_y = M_z$$

unde

$$I_x = I_y = \frac{Ma^2}{12}, \quad I_z = \frac{Ma^2}{6};$$

ele devin

$$\frac{Ma^2}{12}\,\dot{\omega}_x + \frac{Ma^2}{12}\,\omega_y\omega_z = 0$$

$$\frac{Ma^2}{12}\,\dot{\omega}_y - \frac{Ma^2}{12}\,\omega_z\omega_x = 0$$

$$\frac{Ma^2}{6}\,\dot{\omega}_z = 0.$$

Din ultima ecuație rezultă

$$\omega_z = C.$$

Înlocuind în primele două ecuații se obține sistemul

$$\dot{\omega}_x + C\omega_y = 0$$
$$\dot{\omega}_y - C\omega_x = 0.$$

Derivînd prima ecuație din acest sistem, avem

$$\ddot{\omega}_x + C\dot{\omega}_y = 0 \quad \text{sau} \quad \ddot{\omega}_x + C^2\omega_x = 0$$

de unde

$$\omega_x = C_1 \cos Ct + C_2 \sin Ct,$$

deci avem și

$$\omega_y = -\frac{1}{C}\,\dot{\omega}_x = C_1 \sin Ct - C_2 \cos Ct.$$

Cu condițiile inițiale

$$t = 0, \quad \omega_x = \omega_0 \cos\alpha, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_0 \sin\alpha,$$

rezultă valorile constantelor:

$$C_1 = \omega_0 \cos\alpha, \quad 0 = -C_2, \quad C = \omega_0 \sin\alpha,$$

deci soluţiile de mai înainte au forma

$$\omega_x = (\omega_0 \cos \alpha) \cos (\omega_0 \sin \alpha)\, t$$

$$\omega_y = (\omega_0 \cos \alpha) \sin (\omega_0 \sin \alpha)\, t$$

$$\omega_z = \omega_0 \sin \alpha.$$

Încercînd soluţii de forma

$$\psi = At + \psi_0,\ \theta = \theta_0,\ \varphi = Bt + \varphi_0$$

şi introducîndu-le în relaţiile

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$$

se obţine

$$(\omega_0 \cos \alpha) \cos (\omega_0 \sin \alpha)\, t = A \sin \theta_0 \sin (Bt + \varphi_0)$$

$$(\omega_0 \cos \alpha) \sin (\omega_0 \sin \alpha)\, t = A \sin \theta_0 \cos (Bt + \varphi_0)$$

$$\omega_0 \sin \alpha = B + A \cos \theta_0.$$

Se observă că

$$\omega_0 \sin \alpha t = \frac{\pi}{2} - (Bt + \varphi_0);$$

prin urmare

$$\omega_0 \cos \alpha \cos (\omega_0 \sin \alpha)\, t = A \sin \theta_0 \sin Bt \cos \varphi_0 + A \sin \theta_0 \cos Bt \sin \varphi_0$$

$$\omega_0 \cos \alpha \sin (\omega_0 \sin \alpha)\, t = A \sin \theta_0 \cos Bt \cos \varphi_0 - A \sin \theta_0 \sin Bt \sin \varphi_0$$

$$\omega_0 \sin \alpha = B + A \cos \theta_0.$$

Prin identificare obţinem

$$A \sin \theta_0 \cos \varphi_0 = 0, \text{ deci } \varphi_0 = \frac{\pi}{2};$$

cum însă

$$(\omega_0 \sin \alpha)\, t = \frac{\pi}{2} - (Bt + \varphi_0)$$

rezultă

$$(\omega_0 \sin \alpha)\, t = -Bt$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$B = -\omega_0 \sin \alpha$$

și

$$\omega_0 \cos \alpha \cos (\omega_0 \sin \alpha)\, t = A \sin \theta_0 \cos (\omega_0 \sin \alpha)\, t$$

$$\omega_0 \cos \alpha \sin (\omega_0 \sin \alpha)\, t = A \sin \theta_0 \sin(\omega_0 \sin \alpha)\, t$$

$$2\omega_0 \sin \alpha = A \cos \theta_0.$$

Rezultă

$$A \sin \theta_0 = \omega_0 \cos \alpha$$

$$A \cos \theta_0 = 2\omega_0 \sin \alpha$$

de unde

$$A = \omega_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = \omega_0 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha$$

deci

$$\psi = \omega_0 t \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha} + \psi_0$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha \right)$$

$$\varphi = -\omega_0 t \sin \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

14.16. Se consideră un giroscop format dintr-un disc subțire circular, de rază r, sprijinit într-un punct O al axei de simetrie situat la distanța r de planul discului. În momentul inițial axa O_z face cu verticala unghiul θ_0, iar giroscopului i se imprimă o viteză inițială de rotație proprie ω_0 în jurul lui O_z (fig. 14.16). Să se determine variația unghiului de nutație, viteza de precesie, perioada de precesie și perioada de nutație.

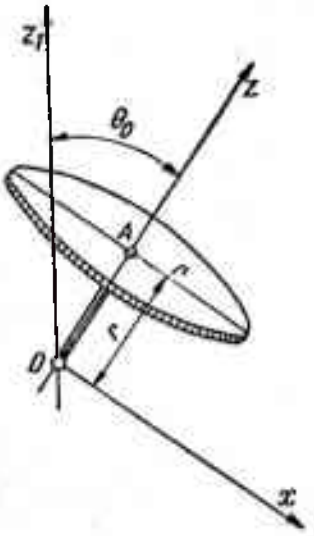


Fig. 14.16

Rezolvare. Momentele de inerție ale discului față de axele O_z și O_x sînt

$$I_z = \frac{mr^2}{2}, \quad I_x = \frac{mr^2}{4} + mr^2 = \frac{5}{4} mr^2.$$

Aplicînd formula aproximativă

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{2mgaI_x \sin \theta_0}{I_z^2 \omega_0^2}$$

rezultă

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{5g}{r\omega_0^2}.$$

Viteza de precesie este

$$\omega_1 = \frac{mgr}{I_z\omega_0} = \frac{2g}{r\omega_0}.$$

Perioada de precesie

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\pi r\omega_0}{g}.$$

Perioada de nutație

$$T_n = \frac{2\pi I_x}{I_z\omega_0} = \frac{5\pi}{\omega_0}.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

14.17. O bară omogenă AB, de lungime $2a$ și greutate $\bar{G}$, se sprijină cu capătul A pe o podea netedă, orizontală, formînd în momentul inițial unghiul α cu planul orizontal (fig. 14.17). Bara începe să cadă sub acțiunea greutății. Să se studieze mișcarea și să se determine traiectoria punctului B.

R. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$

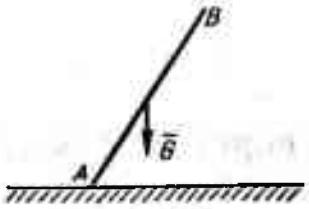


Fig. 14.17

Fig. 14.18

14.18. Un disc circular de rază R și greutate $\bar{G}$ este înfășurat de un fir fixat în A (fig. 14.18).

Să se determine accelerația $\bar{a}$ cu care se mișcă centrul O în timpul căderii și accelerația ε a discului.

R. $a = \frac{2}{3}g, \quad \varepsilon = \frac{2}{3}\frac{g}{R}.$

14.19. O placă triunghiulară de greutate $M\bar{g}$ este articulată în O și are capătul A prins cu un fir orizontal (fig. 14.19). Placa se rotește în jurul axului OA. Să se determine tensiunea $\bar{T}$ în fir știind că viteza unghiulară inițială a plăcii este ω_0. Cînd este nulă tensiunea din fir?

R. $T = Mb\left(\frac{\omega_0^2}{4} - \frac{g}{3h}\right), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4g}{3h}}.$

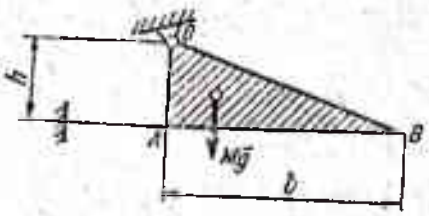


Fig. 14.19

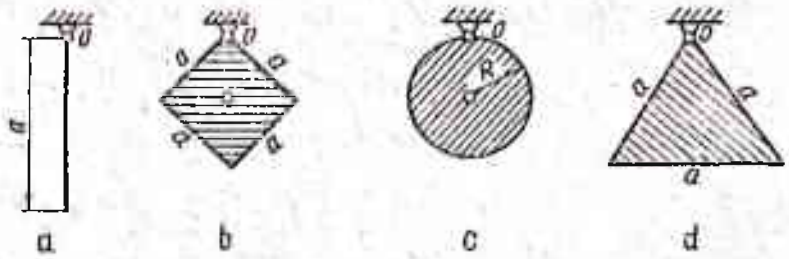


Fig. 14.20

14.20. Să se determine perioadele micilor oscilaţii pentru corpurile omogene din figura 14.20, *a*, *b*, *c*, *d*:

a) bara de lungime a;
b) placă pătrată de latură a;
c) disc de rază R;
d) placă în formă de triunghi echilateral de latură a.

R. a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$; c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$;

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a\sqrt{2}}{3g}}$; d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{5a}{4\sqrt{3g}}}$.

14.21. Să se demonstreze că în cazul cînd momentul cinetic al unui corp rigid, care se roteşte în jurul unui punct fix, este mereu perpendicular pe acceleraţia unghiulară instantanee a corpului, energia cinetică a lui este constantă.

XV. MIŞCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI MATERIAL. ECHILIBRUL RELATIV

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este studiul mişcării punctului material în sisteme de referinţă mobile. Ca un caz particular se studiază condiţiile de echilibru faţă de aceste sisteme de referinţă (echilibrul relativ).

Formule de bază. Ecuaţia fundamentală a dinamicii în mişcarea faţă de sisteme mobile este

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + (-m\bar{a}_t) + (-m\bar{a}_c)$$

sau

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c$$

unde $\bar{a}_r$ este acceleraţia relativă, $\bar{a}_t$ acceleraţia de transport, $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r$ acceleraţia Coriolis, $\bar{F}_t = -m\bar{a}_t$ forţa de transport, $\bar{F}_c = -m\bar{a}_c$ forţa Coriolis.

Dacă nu există forţe complementare, $\bar{F}_t + \bar{F}_c = 0$, ecuaţia dinamicii devine

$$m\bar{a}_r = \bar{F}.$$

Aceasta este posibil dacă sistemul mobil de referinţă este un sistem inerţial (are o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă faţă de triedrul de referinţă fix). Poziţia de echilibru relativ ($\bar{a}_r = 0$, $\bar{v}_r = 0$) se obţine pentru ecuaţia fundamentală scrisă sub forma

$$\bar{F} + \bar{F}_t = 0.$$

Condiţia de echilibru relativ este realizată între forţele exterioare date şi de legătură şi forţa de inerţie din mişcarea de transport.

Probleme rezolvate

15.1. O bară AB are la capete două greutăţi $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$. Bara este articulată în O şi se roteşte în jurul axei verticale Δ (fig. 15.1), cu viteza unghiulară ω constantă. Neglijînd greutatea barei şi cunoscînd $OA = l_1$, $OB = l_2$, să se determine unghiul φ pentru poziţia de echilibru relativ al sistemului.

Rezolvare. Forţele de inerţie provenite din mişcarea de rotaţie sînt

$$F_1 = \frac{P}{g}\omega^2 l_1 \sin\varphi$$

$$F_2 = \frac{Q}{g}\omega^2 l_2 \sin\varphi.$$

Condiţia de echilibru relativ se exprimă printr-o ecuaţie de momente în raport cu punctul O, sub forma

$$\Sigma M_0 = -F_1 l_1 \cos\varphi + Pl_1 \sin\varphi - Ql_2 \sin\varphi - F_2 l_2 \cos\varphi = 0.$$

Înlocuind valorile forţelor obţinem

$$-\frac{P}{g}\omega^2 l_1^2 \sin\varphi\cos\varphi + Pl_1 \sin\varphi - Ql_2 \sin\varphi - \frac{Q}{g}\omega^2 l_2^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

sau

$$\cos\varphi = \frac{Pl_1 - Ql_2}{\frac{P}{g}\omega^2 l_1^2 + \frac{Q}{g}\omega^2 l_2^2} = \frac{g(Pl_1 - Ql_2)}{\omega^2(Pl_1^2 + Ql_2^2)}.$$

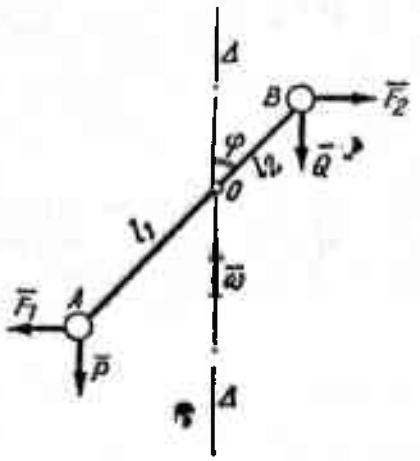


Fig. 15.1

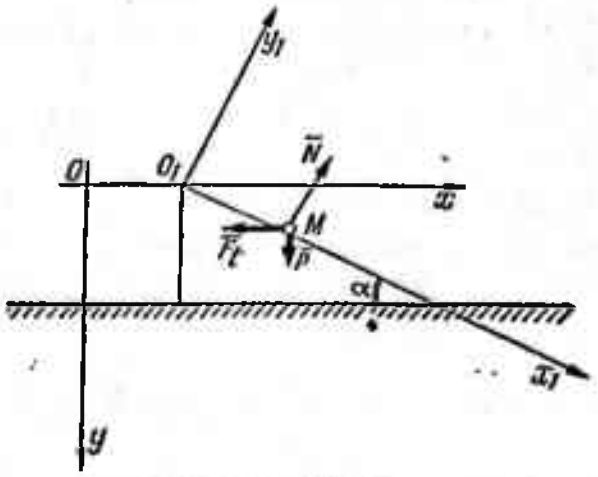


Fig. 15.2

15.2. O pană dreptunghiulară netedă, avînd unghiul α la vîrf, are o mişcare de translaţie rectilinie pe un plan orizontal, fără viteză iniţială, cu acceleraţia constantă $\bar{a}$ (fig. 15.2). Pe pană se aşază sfera M, care începe să se rostogolească pe pană. Cunoscînd greutatea $\bar{P}$ a sferei şi presupunînd că viteza ei iniţială relativă este nulă, să se afle traiectoria absolută, acceleraţiile relativă şi absolută ale sferei, precum şi reacţiunea $\bar{N}$ a penei. Să se analizeze cazurile particulare: a) $a = g \operatorname{tg} \alpha$; b) $a = -g \operatorname{cotg} \alpha$.

Rezolvare. Ecuaţia de mişcare a punctului M faţă de pană este

$$m\bar{a}_r = \bar{N} + \bar{P} + \bar{F}_t$$

$\left(\bar{F}_t\right.$ este forţa de inerţie provenită din mişcarea la transport şi este $\left.\frac{P}{g} a\right)$.

Proiectată pe axe, aceasta devine

$$\frac{P}{g} a_r = \frac{P}{g} \ddot{x}_1 = P \sin \alpha - \frac{P}{g} a \cos \alpha$$

$$O = N - P \cos \alpha - \frac{P}{g} a \sin \alpha.$$

Din prima relaţie obţinem expresia acceleraţiei relative

$$a_r = g \sin \alpha - a \cos \alpha.$$

Acceleraţia absolută va fi

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2 + 2a_r a_t \cos \alpha} = \sin \alpha \sqrt{a^2 + g^2}.$$

Reacţiunea planului are expresia

$$N = P \cos \alpha + \frac{P}{g} a \sin \alpha.$$

Mişcarea punctului M fiind compusă din mişcarea sa relativă faţă de prismă şi din mişcarea de transport a prismei, traiectoria lui absolută este dată de ecuaţiile parametrice

$$x = (g \sin \alpha - a \cos \alpha) \frac{t^2}{2} \cos \alpha + \frac{at^2}{2}$$

$$y = (g \sin \alpha - a \cos \alpha) \frac{t^2}{2} \sin \alpha.$$

Eliminînd parametrul t obţinem

$$t^2 = \frac{2y}{(g \sin \alpha - a \cos \alpha) \sin \alpha}$$

$$x = y \left[\operatorname{cotg} \alpha + \frac{a}{(g \sin \alpha - a \cos \alpha) \sin \alpha} \right]$$

sau

$$Ax - By = 0$$

ceea ce reprezintă ecuaţia unei drepte, unde am notat

$$A = (g \sin \alpha - a \cos \alpha) \sin \alpha$$

$$B = a + (g \sin \alpha - a \cos \alpha) \cos \alpha.$$

Cazurile particulare:

a) $a = g \operatorname{tg} \alpha$; rezultă

$$a_r = 0, \quad N = \frac{P}{\cos \alpha}$$

şi traiectoria

$$y = 0.$$

Pana se deplasează ducînd cu sine punctul M, care nu se deplasează pe ea.

b) $a = -g \operatorname{cotg} \alpha$; rezultă

$$x = 0, \quad N = 0.$$

Punctul părăseşte pana şi cade liber.

15.3. Două corpuri de greutăţi $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$ sînt aşezate pe o prismă triunghiulară avînd cele două feţe înclinate cu unghiurile α şi β faţă de orizontală (fig. 15.3). Cele două corpuri sînt legate printr-un fir trecut peste un scripete de greutate neglijabilă. Prisma are o mişcare uniform accelerată cu acceleraţia $\bar{a}$. Să se determine acceleraţiile greutăţilor $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$ atunci cînd ele alunecă fără frecare pe planele înclinate. Cît de mare trebuie să fie $\bar{a}$ pentru poziţia de echilibru relativ a celor două corpuri?

Scanned with OKEN Scanner

Presupunînd $|\bar{P}| > |\bar{Q}|$ ecuațiile de mișcare ale celor două puncte sînt

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_1 = -T + P\sin\alpha + \frac{P}{g}a\cos\alpha$$

$$0 = N_1 - P\cos\alpha + \frac{P}{g}a\sin\alpha$$

$$\frac{Q}{g}\ddot{x}_2 = T - Q\sin\beta + \frac{Q}{g}a\cos\beta$$

$$0 = N_2 - Q\cos\beta - \frac{Q}{g}a\sin\beta.$$

Eliminînd pe T între prima și a treia ecuație obținem relația

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_1 + \frac{Q}{g}\ddot{x}_2 = P\sin\alpha - Q\sin\beta + \frac{a}{g}(P\cos\alpha + Q\cos\beta)$$

sau

$$(P+Q)\,a_r = (P\sin\alpha - Q\sin\beta)\,g + a_t\,(P\cos\alpha + Q\cos\beta)$$

de unde rezultă pentru accelerația relativă valoarea

$$a_r = \frac{(P\sin\alpha - Q\sin\beta)\,g + a(P\cos\alpha + Q\cos\beta)}{P+Q}.$$

Poziția de echilibru relativ se realizează pentru

$$(P\sin\alpha - Q\sin\beta)g + a\,(P\cos\alpha + Q\cos\beta) = 0$$

deci pentru o valoare a accelerației $\bar{a}$ egală cu

$$a = a_t = \frac{(Q\sin\beta - P\sin\alpha)\,g}{P\cos\alpha + Q\cos\beta}.$$

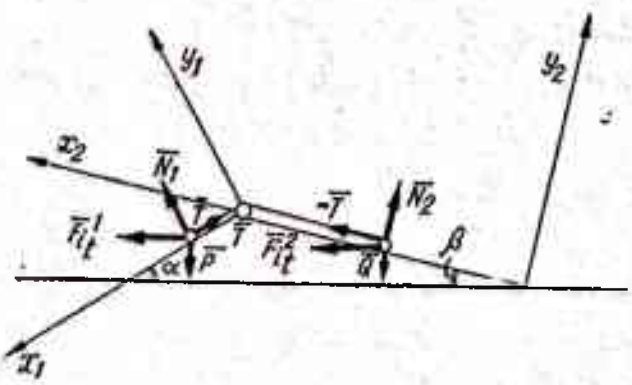


Fig. 15.3

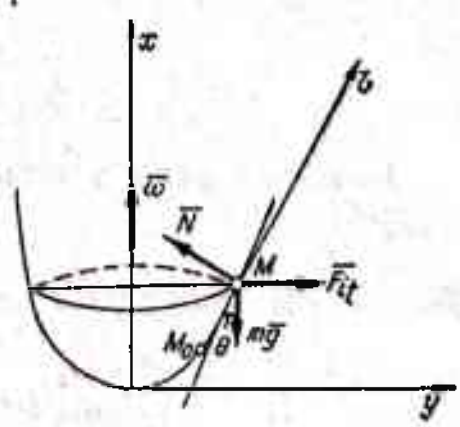


Fig. 15.4

15.4. Un punct M, de masă m se deplasează pe o parabolă de ecuație $y^2 = 2px$. Curba se rotește în jurul axei verticale Ox cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$ (fig. 15.4). Să se determine: a) viteza relativă a punctului dacă

la $t = 0$ el se găsea în punctul $M_0(x_0, y_0)$; b) pînă unde se va urca punctul M dacă la $t = 0$ se găsea în origine şi avea viteza v_0 orizontală?

Ecuaţia de mişcare a punctului M faţă de parabolă este

$$m\bar{a}_r = \bar{N} + m\bar{g} + \bar{F}_t$$

($\bar{F}_t$ este forţa de inerţie în mişcarea de transport $\bar{F}_t = m\omega^2 y\bar{j}$). Proiectînd această ecuaţie după direcţiile normalei principale şi a tangentei la curbă în punctul considerat, obţinem sistemul

$$0 = N - mg \sin\theta - m\omega^2 y \cos\theta$$

$$ma_r = -mg \cos\theta + m\omega^2 y \sin\theta$$

unde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}, \quad \sin\theta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\theta = \frac{dx}{ds}.$$

Ecuaţia a doua mai poate fi scrisă şi sub forma

$$\frac{dv_r}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = -g\frac{dx}{ds} + \omega^2 y \frac{dy}{ds}$$

sau

$$v_r \frac{dv_r}{ds} = -g\frac{dx}{ds} + \omega^2 y \frac{dy}{ds}.$$

Prin integrare obţinem

$$v_r^2 = -2gx + \omega^2 y^2 + C$$

sau ţinînd seama de ecuaţia parabolei $y^2 = 2px$, sub forma

$$v_r^2 = 2(p\omega^2 - g)\, x + C.$$

a) Cu condiţiile iniţiale: $t = 0$, $v_r = 0$, $x = x_0$ constanta de integrare C capătă valoarea

$$C = -2(p\omega^2 - g)\, x_0,$$

iar expresia vitezei relative devine

$$v_r^2 = 2(p\omega^2 - g)\,(x - x_0).$$

Pentru ca relaţia să fie posibilă trebuie ca

$$x > x_0, \quad \omega^2 > \frac{g}{p}.$$

Cazul echilibrului relativ se realizează pentru

$$\omega^2 = \frac{g}{p}.$$

b) Cu condițiile inițiale: $t = 0$, $x = 0$, $v_r = v_0$, constanta C are valoarea $C = v_0^2$,

deci

$$v_r^2 = v_0^2 + 2(p\omega^2 - g)\, x.$$

Punctul se va deplasa pe parabolă atît timp cît $v_r > 0$. El se va opri pentru

$$v_0^2 + 2(p\omega^2 - g)\, x = 0,$$

deci pentru

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2(g - p\omega^2)}.$$

Poziția de echilibru relativ corespunde valorii

$$x_{max} > 0, \quad \text{deci} \quad \omega^2 < \frac{g}{p}.$$

Pentru $\omega^2 = \frac{g}{p}$ poziția de echilibru relativ a punctului se găsește la infinit.

15.5. Un resort de lungime l_0 (în stare naturală), articulat în A, are aplicată în B o greutate $\overline{P}$. Sistemul se rotește în jurul verticalei Ay cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}$ (fig. 15.5). Să se afle poziția de echilibru relativ și alungirea resortului, știind că greutatea resortului este neglijabilă, iar alungirea lui e proporțională cu forța aplicată după AB (constanta elastică k).

Rezolvare. Condiția pentru echilibrul relativ este

$$\overline{P} + \overline{T} + \overline{F}_{tt} = 0$$

unde

$$P = mg$$

$$T = k(l - l_0)$$

$$F_{tt} = m\omega^2 l \sin\theta.$$

Proiectînd ecuația de echilibru pe direcția resortului și pe direcția normalei la resort și ținînd seama de relațiile precedente obținem

$$m\omega^2 l \sin\theta \cos\theta - mg \sin\theta = 0$$

$$k(l - l_0) - mg \cos\theta - m\omega^2 l \sin^2\theta = 0.$$

Din prima relație rezultă poziția de echilibru relativ pentru

$$\sin\theta = 0, \quad \cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Soluţia $\sin\theta = 0$ fiind banală (corespunde poziţiei de echilibru a resortului) reţinem numai soluţia $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$. Înlocuind această valoare în a doua relaţie obţinem

$$k(l - l_0) - mg\frac{g}{l\omega^2} - m\omega^2 l\left(1 - \frac{g^2}{l^2\omega^4}\right) = 0$$

de unde

$$l = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}.$$

Alungirea resortului va fi deci

$$\Delta l = l - l_0 = \frac{kl_0}{k - m\omega^2} - l_0 = l_0\frac{m\omega^2}{k - m\omega^2}.$$

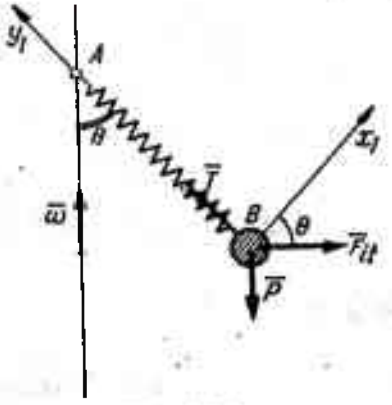


Fig. 15.5

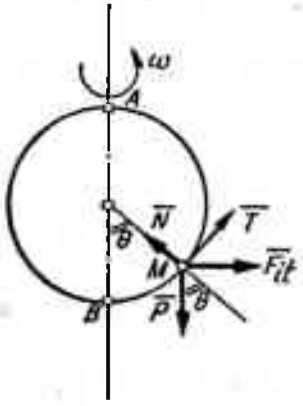


Fig. 15.6

15.6. Un cerc nedeformabil de rază R şi masă neglijabilă se roteşte în jurul diametrului vertical AB cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$ (fig. 15.6). Un inel M, de greutate $\bar{P}$, alunecă pe cerc. Să se studieze poziţia de echilibru relativ şi presiunea pe cerc; a) neglijînd frecarea între cerc şi inel; b) ţinînd seama de frecare (coeficient de frecare f).

Rezolvare. Notăm $\bar{T}$ forţa de frecare şi $\bar{F}_{it}$ forţa de inerţie din mişcarea de transport. — Condiţia de echilibru relativ a punctului M este

$$\bar{N} + \bar{T} + \bar{P} + \bar{F}_{it} = 0,$$

care, proiectată pe direcţia tangentei şi a normalei la cerc în punctul considerat, duce la următoarele relaţii

$$T + F_{it}\cos\theta - P\sin\theta = 0$$

$$N - P\cos\theta - F_{it}\sin\theta = 0$$

unde

$$T = fN, \quad F_{it} = \frac{P}{g}\omega^2 R\sin\theta.$$

Înlocuind aceste valori în sistemul de mai sus obţinem

$$fN + \frac{P}{g}\omega^2 R \sin\theta\cos\theta - P\sin\theta = 0$$

$$N - P\cos\theta - \frac{P}{g}\omega^2 R\sin^2\theta = 0.$$

Reacţiunea cercului este

$$N = P\cos\theta + \frac{P}{g}\omega^2 R\sin^2\theta,$$

iar unghiul θ pentru poziţia de echilibru relativ este dat de relaţia

$$fP\cos\theta + f\frac{P}{g}\omega^2 R\sin^2\theta + \frac{P}{g}\omega^2 R\sin\theta\cos\theta - P\sin\theta = 0$$

sau, dacă notăm $f = \operatorname{tg}\varphi$,

$$\sin(\varphi - \theta) + \frac{\omega^2 R}{g}\sin\theta\cos(\varphi - \theta) = 0.$$

Dacă neglijăm frecarea $\varphi = 0$, poziţia de echilibru relativ este dată de

$$\sin\theta = 0, \qquad \cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}.$$

15.7. Două bile, de greutăţi egale $\overline{G}$, pot aluneca fără frecare pe braţele unui volant, fiind împinse spre axul volantului de două resoarte de constantă elastică k (fig. 15.7). În poziţie de repaus bilele se găsesc la distanţa l_0 de ax. Să se studieze mişcarea bilelor atunci cînd volantul se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}$.

Rezolvare. Fie un sistem de axe $Oxyz$, axa Ox fiind dirijată după direcţia resoartelor. Proiectăm ecuaţia de mişcare a punctului pe aceste axe. Mişcarea punctului pe direcţia axei Ox reprezintă mişcarea relativă. Ecuaţiile scalare de mişcare ale punctului sînt

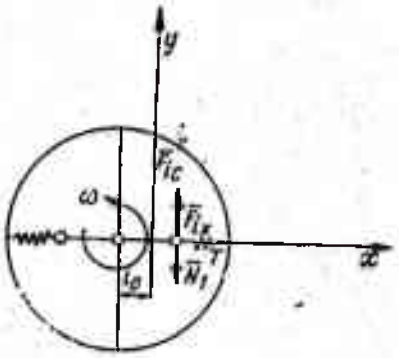


Fig. 15.7

$$\frac{G}{g}\ddot{x} = -kx + \frac{G}{g}(l_0 + x)\omega^2$$

$$0 = -N_1 + 2\frac{G}{g}\omega v$$

$$0 = N_2 - G.$$

Accelerаţia relativă a bilei este

$$\ddot{x} = (l_0 + x)\omega^2 - \frac{kg}{G}x.$$

Poziţia de echilibru relativ se realizează pentru

$$(l_0 + x)\,\omega^2 - \frac{kg}{G}\,x = 0,$$

deci pentru

$$x = \frac{\omega^2 l_0}{\frac{kg}{G} - \omega^2}.$$

Pentru ca această poziţie să fie posibilă trebuie să existe relaţia

$$\omega^2 < \frac{kg}{G} \quad \text{sau} \quad k > \frac{G}{g}\,\omega^2.$$

15.8. Un tub rectiliniu OA, articulat în O, se roteşte în jurul axei verticale Oy cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}$ (fig.15.8). Bara face cu axa Oy unghiul φ. În interiorul tubului se deplasează un punct M de masă m. Să se studieze mişcarea punctului şi să se determine reacţiunile tubului. Condiţii iniţiale: $x_1 = 0$, $\dot{x}_1 = v_0$.

Rezolvare. Ecuaţia de mişcare a punctului M este

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_{it} + \bar{F}_{ic}$$

unde

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2$$

$$F_{it} = m\omega^2 x_1 \sin\varphi$$

$$F_{ic} = 2m\omega\dot{x}_1 \sin\varphi.$$

Proiectînd ecuaţia de mişcare pe axe şi utilizînd relaţiile acestea obţinem

$$m\ddot{x}_1 = -mg\cos\varphi + m\omega^2 x_1 \sin^2\varphi$$

$$0 = N_1 - mg\sin\varphi - m\omega^2 x_1 \sin\varphi\cos\varphi$$

$$0 = 2m\omega\dot{x}_1 \sin\varphi - N_2.$$

Soluţia primei ecuaţii este de forma

$$x_1 = C_1 e^{\omega t \sin\varphi} + C_2 e^{-\omega t \sin\varphi} + \frac{g\cos\varphi}{\omega^2 \sin^2\varphi}.$$

Viteza punctului M este

$$\dot{x}_1 = \omega\sin\varphi\,(C_1 e^{\omega t \sin\varphi} - C_2 e^{-\omega t \sin\varphi}).$$

Cu condiţiile iniţiale

$$t = 0, \quad x_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = v_0,$$

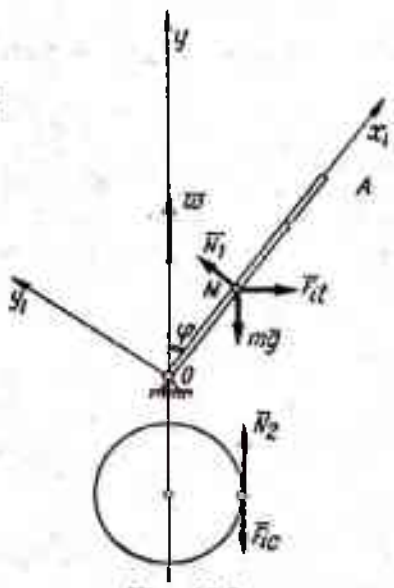


Fig. 15.8

se obţine pentru determinarea constantelor sistemul de ecuaţii

$$0 = C_1 + C_2 + \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}$$

$$v_0 = \omega \sin \varphi (C_1 - C_2)$$

din care rezultă

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\omega \sin \varphi} - \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}\right)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\omega \sin \varphi} + \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}\right).$$

Deci

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\omega \sin \varphi} - \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}\right) e^{\omega t \sin \varphi} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\omega \sin \varphi} + \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}\right) e^{-\omega t \sin \varphi} + \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}\left(v_0 - \frac{g \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}\right) e^{\omega t \sin \varphi} + \frac{1}{2}\left(v_0 + \frac{g \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}\right) e^{-\omega t \sin \varphi}$$

Din celelalte două ecuaţii de mişcare rezultă valorile reacţiunilor

$$N_1 = mg \sin \varphi + \frac{m\omega \cos \varphi}{2}\left[\left(v_0 - \frac{g \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}\right) e^{\omega t \sin \varphi} - \right.$$

$$\left. - \left(v_0 + \frac{g \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}\right) e^{-\omega t \sin \varphi} + \frac{2g \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}\right]$$

$$N_2 = m\left[(v_0 \omega \sin \varphi - g \cos \varphi) e^{\omega t \sin \varphi} + \left(v_0 \omega \sin \varphi + \frac{g \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}\right) e^{-\omega t \sin \varphi}\right]$$

Reacţiunea totală a barei este

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}.$$

15.9. Două bare OA şi OB, de greutăţi neglijabile au la capete două bile identice de greutate $\bar{G}$. Barele susţin prin intermediul altor bare CD şi DE, un manşon de greutate $\bar{Q}$ (fig. 15.9, *a*). Sistemul se roteşte în jurul axei verticale Oy cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$. Să se determine unghiul α dintre barele OA respectiv OB şi verticala Oy, pentru poziţia de echilibru relativ a sistemului. Se cunosc $OA = OB = l$, $OC = OE = CD = ED = a$.

Rezolvare. Eforturile din barele CD şi DE sînt egale cu

$$T = \frac{Q}{2 \cos \alpha}$$

(rezultat obţinut din scrierea echilibrului punctului D). Datorită simetriei figurii putem studia echilibrul relativ al unei singure bare, sub acţiunea

greutăţii $\bar{G}$, a tensiunii $\bar{T}$ şi a forţei de inerţie provenite din rotaţia sistemului în jurul axei verticale (fig. 15.9, *b*). Pentru poziţia de echilibru relativ trebuie să fie satisfăcută o ecuaţie de momente a tuturor forţelor considerate în raport cu punctul *O*

$$\Sigma M_O = -Gl \sin \alpha + \frac{G}{g} \omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{Q}{2 \cos \alpha} a \sin 2\alpha = 0$$

sau

$$-Gl \sin \alpha + \frac{G}{g} \omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha - Qa \sin \alpha = 0.$$

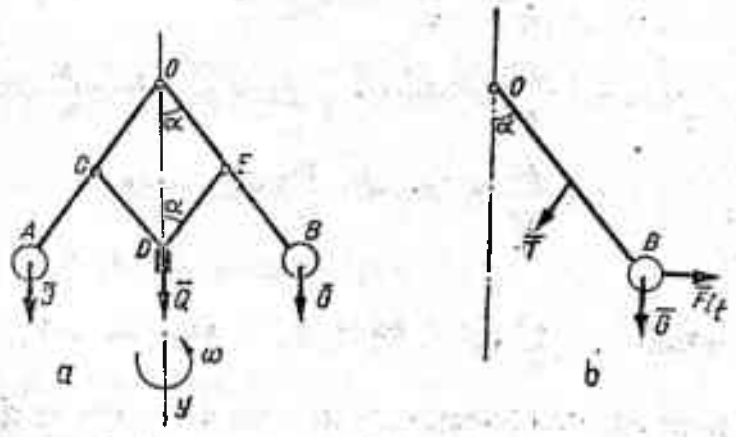


Fig. 15.9

Ecuaţia aceasta admite soluţiile

$$\sin \alpha = 0, \quad \cos \alpha = \frac{(Qa + Gl)\, g}{G\omega^2 l^2}.$$

Condiţia de existenţă a soluţiei este dată de

$$Qa + Gl \leqslant \frac{G}{g} \omega^2 l^2.$$

15.10. Două bare omogene $AO = a$ şi $BO = b$, formînd un echer (unghiul $AOB = 90°$) şi avînd greutatea p N/m, sînt articulate într-un plan vertical în punctul fix *O*. Planul are o mişcare de rotaţie în jurul verticalei OO' cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 15.10). Să se determine unghiul α pentru poziţia de echilibru relativ al sistemului. Caz particular: $a = b$.

Rezolvare. În afara forţelor aplicate apar şi forţele de inerţie datorite mişcării de rotaţie ($\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$), ale căror valori sînt date de

$$F_1 = \int_0^a \frac{p}{g} \, dx \cdot \omega^2 x \sin \alpha = \frac{pa^2}{2g} \omega^2 \sin \alpha$$

$$F_2 = \int_0^b \frac{p}{g} \, dx \cdot \omega^2 x \cos \alpha = \frac{pb^2}{2g} \omega^2 \cos \alpha.$$

Condiția pentru echilibrul relativ este

$$\bar{F} + \bar{F}_{it} = 0.$$

O proiectăm pe axele Ox și Oy. Obținem pentru reacțiunile din articulația O valorile

$$V = p\ (a + b)$$

$$H = \frac{p\omega^2}{2g}\ (a^2 \sin\alpha - b^2 \cos\alpha).$$

Scriind apoi și o ecuație de momente în punctul O, obținem condiția de echilibru relativ a sistemului sub forma

$$pa \cdot \frac{a}{2} \sin\alpha - \frac{pa^2}{2g}\omega^2 \sin\alpha \cdot \frac{2}{3} a \cos\alpha - pb \cdot \frac{b}{2} \cos\alpha +$$

$$+ \frac{pb^2}{2g}\omega^2 \cos\alpha \cdot \frac{2}{3} b \sin\alpha = 0$$

sau

$$a^2 \sin\alpha - \frac{\omega^2}{3g}(a^3 - b^3) \sin 2\alpha - b^2 \cos\alpha = 0.$$

(Se observă că punctele de aplicație ale forțelor de inerție se găsesc la $2/3\ a$ și $2/3\ b$ de punctul O; v. cap. XVII.) Dacă $a = b$, relația devine

$$\sin\alpha = \cos\alpha, \quad \text{adică} \quad \alpha = 45°.$$

În acest caz, reacțiunile din articulația O vor fi

$$V = 2pa, \quad H = 0.$$

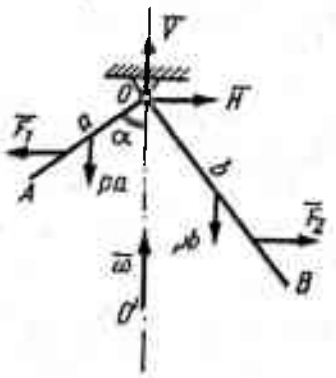


Fig. 15.10

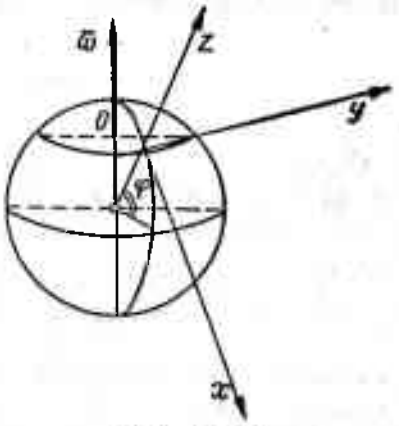


Fig. 15.11

15.11. Să se studieze mișcarea unui punct material de masă m aruncat cu o viteză $\bar{v}_0$ pe un plan orizontal neted, ținînd seama și de rotația Pămîntului (fig. 15.11).

Rezolvare. Forţa de inerţie din mişcarea de rotaţie a Pămîntului este

$$\bar{F}_i = -2m\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = -2m(\omega \sin\varphi \bar{k} - \omega\cos\varphi \bar{i}) \times (\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}) =$$
$$= -2m(\omega \sin\varphi \cdot \dot{x}\bar{j} - \omega\sin\varphi \cdot \dot{y}\bar{i} - \omega\cos\varphi \cdot \dot{y}\bar{k}).$$

Ecuaţiile de mişcare sînt

$$m\ddot{x} = 2\,m\omega \sin\varphi \cdot \dot{y}$$
$$m\ddot{y} = -2m\omega \sin\varphi \cdot \dot{x}$$
$$0 = mg - N + 2m\omega\cos\varphi \cdot \dot{y}$$

unde φ este latitudinea. Prima ecuaţie se înmulţeşte cu $\dot{x}$, iar a doua cu $\dot{y}$ şi se adună rezultatele, obţinîndu-se

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = 0.$$

Prin integrare se obţine o integrală primă de forma

$$v^2 = \text{const} = v_0^2.$$

Din integrarea primelor două ecuaţii rezultă

$$\dot{x} = 2\omega\sin\varphi \cdot y + C_1$$
$$\dot{y} = -2\omega\sin\varphi \cdot x + C_2.$$

Dar

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2.$$

adică

$$(C_2 - 2\omega\sin\varphi \cdot x)^2 + (C_1 + 2\omega\sin\varphi \cdot y)^2 = v_0^2$$

sau

$$\left(x - \frac{C_2}{2\omega\sin\varphi}\right)^2 + \left(y + \frac{C_1}{2\omega\sin\varphi}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{2\omega\sin\varphi}\right)^2.$$

Punctul va descrie în mişcare uniformă un cerc de rază

$$R = \frac{v_0}{2\omega\sin\varphi}.$$

Cum ω este mic, rezultă pentru R o valoare foarte mare — cercul se apropie de o linie dreaptă.

15.12. Un punct material greu M, de masă m, este obligat să se mişte pe un plan P care se roteşte uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unei drepte orizontale din plan (fig. 15.12). Să se studieze mişcarea. Condiţii iniţiale:

$$t = 0, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = v_0\cos\alpha, \quad \dot{y}_1 = v_0\sin\alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

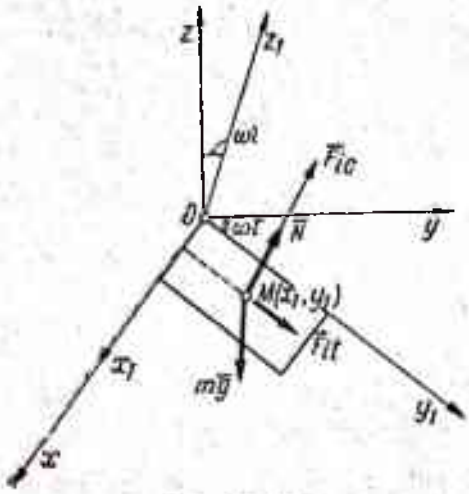


Fig. 15.12

Rezolvare. Ecuațiile de mișcare ale punctului M sînt

$$m\ddot{x}_1 = 0$$

$$m\ddot{y}_1 = my_1\omega^2 + mg \sin \omega t$$

$$0 = N - mg \cos \omega t + 2\, m\omega\dot{x}_1.$$

Integrînd primele două ecuații obținem

$$\dot{x}_1 = C_1, \quad x_1 = C_1 t + C_2$$

$$y_1 = C_3 e^{\omega t} + C_4 e^{-\omega t} - \frac{g \sin \omega t}{2\omega^2}$$

$$\dot{y}_1 = \omega(C_3 e^{\omega t} - C_4 e^{-\omega t}) - \frac{g}{2\omega} \cos \omega t.$$

Cu condițiile inițiale ale problemei avem

$$0 = C_2, \quad 0 = C_3 + C_4$$

$$v_0 \cos \alpha = C_1, \quad v_0 \sin \alpha = \omega\,(C_3 - C_4) - \frac{g}{2\omega}$$

și rezultă valorile constantelor

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{g}{4\omega^2} + \frac{v_0}{2\omega} \sin \alpha,$$

$$C_4 = -\left(\frac{g}{4\omega^2} + \frac{v_0}{2\omega} \sin \alpha\right).$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei relative devin

$$x_1 = v_0 t \cos \alpha$$

$$y_1 = \left(\frac{g}{4\omega^2} + \frac{v_0}{2\omega} \sin \alpha\right)(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) - \frac{g \sin \omega t}{2\omega^2}.$$

Viteza relativă va avea componentele

$$\dot{x}_1 = v_0 \cos \alpha$$

$$\dot{y}_1 = \left(\frac{g}{4\omega} + \frac{v_0}{2} \sin \alpha\right)(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) - \frac{g}{2\omega} \cos \omega t.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

15.13. Pe o curbă netedă de sîrmă, se poate deplasa un inel de greutate $\bar{P}$. Curba $y = f(x)$ trece prin originea sistemului de referință și se rotește în jurul axei verticale Oy, cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$ (fig. 15.13). Ce formă trebuie să aibă această curbă pentru ca inelul să se afle în echilibru

relativ, în orice poziţie, pe această curbă? Să se afle de asemenea reacţiunea N a curbei.

R. $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$, $N = P\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{2g} y^2}$.

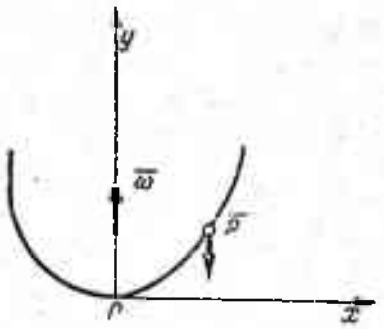


Fig. 15.13

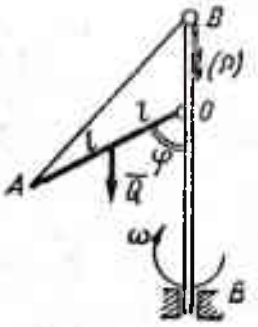


Fig. 15.14

15.14. De o bară verticală OB este fixată printr-o articulaţie tija omogenă OA de greutate $\overline{Q}$, care se poate roti în jurul punctului O (fig. 15.14). De capătul A al tijei este legat un fir, trecut peste un scripete şi avînd la capăt greutatea $\overline{P}$. Să se determine viteza unghiulară $\overline{\omega}$, de rotaţie a barei OA în jurul barei verticale OB, ştiind că în poziţia de echilibru bara OA face unghiul φ cu OB ($OA = OB = 2l$).

R. $\omega^2 = \dfrac{3\left(Q \sin\varphi - 2P \sin\frac{\varphi}{2}\right) g}{2Ql \sin 2\varphi}$.

15.15. Să se studieze mişcarea unui punct M de masă m care se mişcă pe o dreaptă Δ. Dreapta se roteşte în jurul axei ce trece prin O cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}$ (fig. 15.15). Condiţii iniţiale: a) $t = 0$, $OM = 0$, $\theta = 0$, $v_r = v_0$;

b) $t = 0$, $OM = a$, $\theta = 0$, $v_r = 0$.

R. a) $v_r = \frac{1}{2}\left(v_0 - \frac{g}{2\omega}\right)(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) + \frac{g}{2\omega} \cos \omega t$, $N = m(g \cos \omega t + 2\omega v_r)$;

b) $v_r = a \operatorname{ch} \omega t$, $N = 2am\omega^2 \operatorname{sh} \omega t$.

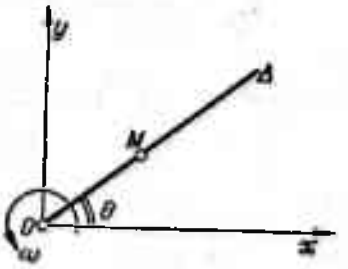


Fig. 15.15

15.16. Un pendul matematic, de lungime l, este fixat de plafonul unui lift care are o mişcare de translaţie verticală în jos, cu acceleraţia constantă $a < g$. Să se afle perioada micilor oscilaţii ale pendulului.

R. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a}}$.

15.17. Un tub neted, a cărui linie axială are forma unei curbe plane oarecare, se rotește într-un plan orizontal cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$ în jurul unui punct fix O (fig. 15.17). În tub se află sfera M; distanța ei inițială de O este r_0, iar viteza inițială relativă este zero. Să se arate că viteza relativă a sferei are expresia următoare:

$$v_r = \omega \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

unde r este distanța sferei la punctul O, la un moment dat.

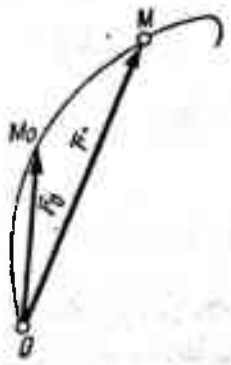


Fig. 15.17

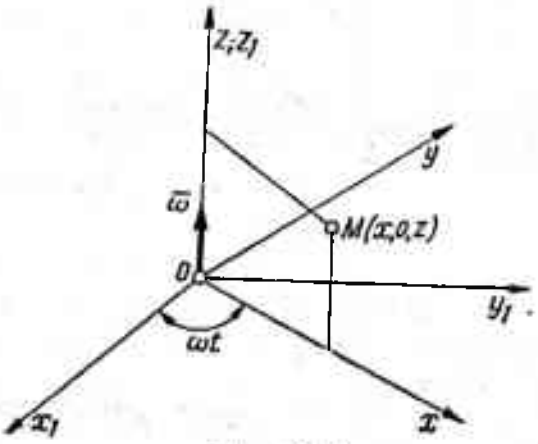


Fig. 15.18

15.18. Un punct material, de masă m, se poate mișca fără frecare în planul xOz, care se rotește în jurul axei verticale fixe Oz cu viteză unghiulară constantă ω (fig. 15.18). Să se studieze mișcarea relativă a acestui punct. Condițiile inițiale: coordonate x_0, z_0, viteza relativă zero. Să se determine și reacțiunea N a planului.

R. $x = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$, $\quad z = z_0 - \frac{gt^2}{2}$

$$N = m x_0 \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

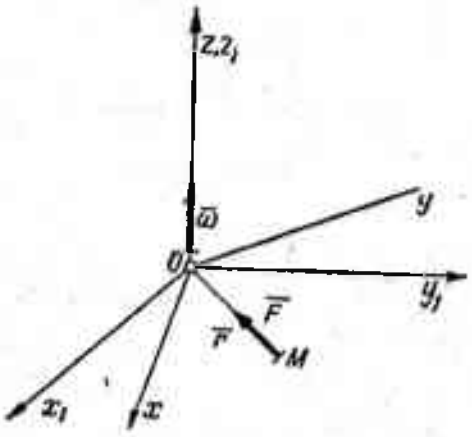


Fig. 15.19

15.19. Un punct material M, de masă m, se află pe un plan orizontal, neted, care se rotește cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$ în jurul unei axe verticale fixe, ce trece printr-un punct O al planului. Punctul material M este atras spre punctul O, de o forță de mărime $\bar{F} = -m\omega^2\bar{r}$, în care r este distanța punctului M la O (fig. 15.19). Să se arate că în mișcarea relativă, la orice condiții inițiale, punctul M descrie un cerc, cu viteza unghiulară 2ω.

XVI. MIŞCĂRI OSCILATORII

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este studiul mişcării oscilatorii a sistemelor cu un singur grad de libertate, mişcare în care parametrul geometric ce determină poziţia sistemului îşi schimbă periodic sensul variaţiei.

Mişcările oscilatorii se descriu printr-o ecuaţie diferenţială, de ordinul al doilea, de forma:

$$\ddot{q} = \frac{1}{m}\left[P(t) + R_1(q) + R(\dot{q})\right],$$

unde $q = q(t)$ este parametrul mişcării.

Ecuaţia diferenţială a mişcării poate fi liniară (sistemul oscilant are caracteristici liniare) sau neliniară (caracteristici neliniare ale sistemului oscilant).

Mişcarea oscilatorie poate fi:

1. *Mişcarea oscilatorie armonică* — este o mişcare periodică, produsă în general de acţiunea unei forţe elastice şi reprezentată prin ecuaţia:

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

unde

$$k = \frac{mg}{\delta_{st}}$$

se numeşte constanta elastică (sau rigiditatea) şi reprezintă forţa necesară unei deplasări unitare.

Soluţia ecuaţiei de mişcare este:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad \text{sau} \quad x = A \cos (\omega t - \varphi),$$

unde:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$ — se numeşte pulsaţia proprie a mişcării şi reprezintă numărul de oscilaţii efectuate în 2π secunde;

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ — este perioada mişcării oscilatorii (timpul în care se efectuează un ciclu al oscilaţiilor, sistemul revenind în poziţia iniţială);

$f = \frac{1}{T}$ — este frecvenţa proprie (numărul de oscilaţii efectuate într-o secundă);

x se numeşte elongaţie;
A este amplitudinea oscilaţiei (elongaţia maximă);
φ reprezintă unghiul de fază iniţială.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul oscilant descris mai sus este conservativ și în timpul mișcării au loc schimbări periodice de energie potențială în energie cinetică și invers:

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \sin^2 (\omega t - \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 (\omega t - \varphi).$$

Există relația:

$$E_c^{max} = E_p^{max},$$

relație care permite determinarea pulsației proprii a sistemului (metoda energetică Rayleigh).

2. *Mișcarea oscilatorie amortizată* care se exprimă prin ecuația:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0,$$

unde c este coeficientul de amortizare.

Soluția ecuației diferențiale este:

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t),$$

unde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}.$$

Pentru ca mișcarea să fie oscilatorie trebuie ca:

$$\frac{c^2}{4m} < k$$

Logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive se numește decrement logaritmic, mărime care caracterizează amortizarea.

3. *Mișcarea oscilatorie întreținută* care se exprimă prin ecuația:

$$m\ddot{x} + kx = P(t).$$

Soluția acestei ecuații depinde de natura funcției $P(t)$. Dacă $P(t) = P_0 \sin pt$ ecuația diferențială admite soluția:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{P_0 \sin pt}{m\omega^2 \left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)}.$$

Cînd pulsația p a forței perturbatoare este egală cu ω, pulsația proprie a sistemului, se produce fenomenul de rezonanță și amplitudinile cresc, teoretic, la infinit.

Scanned with OKEN Scanner

16.1. Să se studieze mişcarea unui punct material care efectuează simultan două mişcări oscilatorii armonice rectilinii:

$$y_1 = a_1 \cos \omega_1 t.$$

$$y_2 = a_2 \cos (\omega_2 t + \varphi_2).$$

Rezolvare: Legea mişcării rezultante este:

$$y = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos (\omega_2 t + \varphi_2). \tag{1}$$

Presupunînd $\omega_2 > \omega_1$ şi notînd $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$, legea (1) poate fi scrisă:

$$y = [a_1 + a_2 \cos (t\Delta\omega + \varphi_2)] \cos \omega_1 t - a_2 \sin (t\Delta\omega + \varphi_2) \sin \omega_1 t$$

sau, notînd

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_2 \sin (t\Delta\omega + \varphi_2)}{a_1 + a_2 \cos (t\Delta\omega + \varphi_2)}, \tag{2}$$

$$y = \frac{a_1 + a_2 \cos (t\Delta\omega + \varphi_2)}{\cos \varphi} (\cos \omega_1 t \cos \varphi - \sin \omega_1 t \sin \varphi).$$

Înlocuind $\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ şi ţinînd seama de relaţia (2) expresia de mai sus a lui y devine:

$$y = a \cos (\omega_1 t - \varphi) \tag{3}$$

unde:

$$a^2 = [a_1 + a_2 \cos (t\Delta\omega + \varphi_2)]^2 + [a_2 \sin (t\Delta\omega + \varphi_2)]^2. \tag{4}$$

Relaţia (3) arată că mişcarea obţinută prin suprapunerea a două mişcări oscilatorii armonice rectilinii este — în cazul general — o mişcare periodică în care atît amplitudinea cît şi defazajul φ faţă de una din mişcările componente — conform relaţiilor (3) şi (4) — variază periodic în timp cu perioada:

$$T_3 = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \tag{5}$$

Pentru ca mişcarea (3) să se poată realiza, trebuie ca perioada ei, T, să fie multiplu de perioadele T_1 şi T_2 ale celor două mişcări componente, adică:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 \tag{6}$$

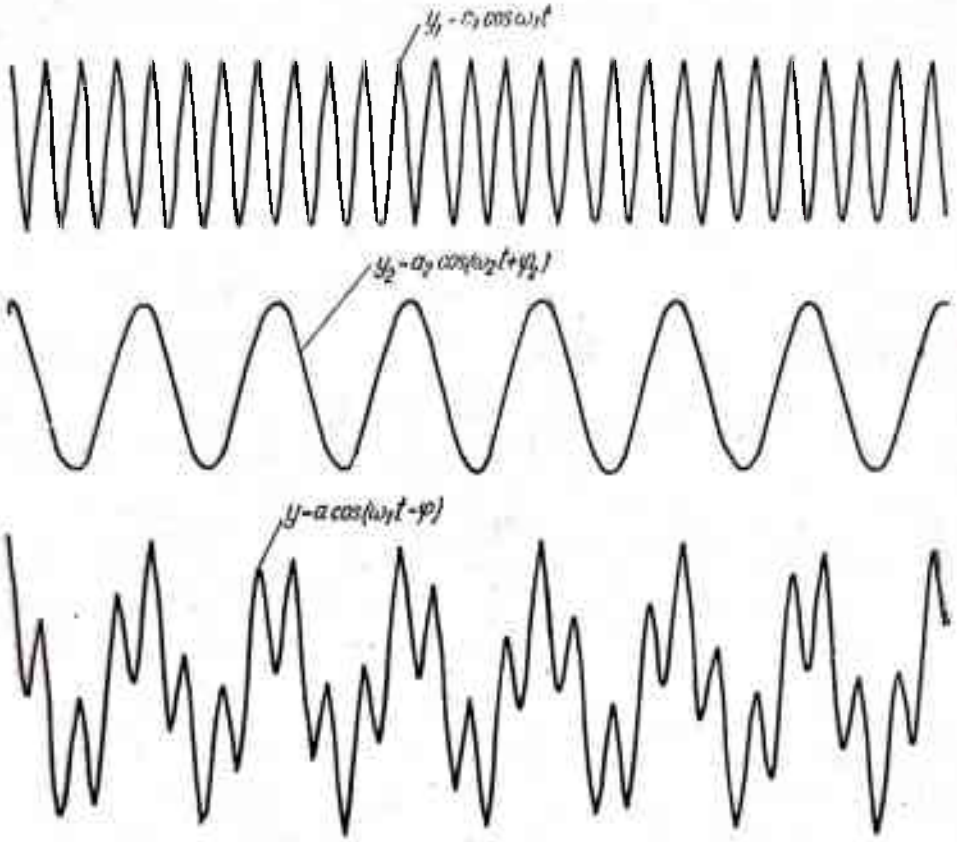
unde m_1 şi m_2 sînt numere întregi şi prime între ele, iar

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}; \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

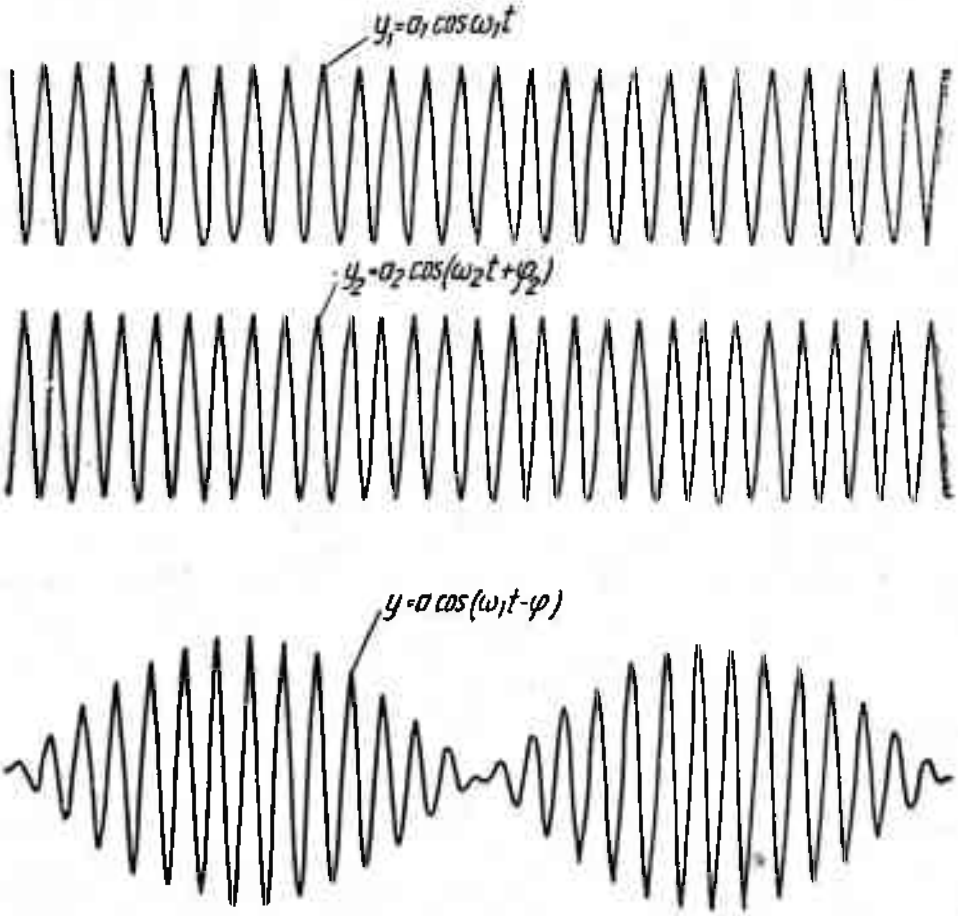
Rezultă:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m_2}{m_1} \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner



a



b

Fig. 16.1

Scanned with OKEN Scanner

Relaţia (7) arată că, pentru ca mişcarea rezultantă să fie o mişcare periodică cu perioada T, raportul pulsaţiilor mişcărilor componente trebuie să fie o fracţie raţională. În cazul studiat, cînd $\omega_2 > \omega_1$, rezultă $m_2 > m_1$. Perioada T este un multiplu şi de perioada $T_3 = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$ de variaţie a amplitudinii şi defazajului. Într-adevăr din relaţia (7) rezultă:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{m_2 - m_1}{m_1}$$

şi deci:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = (m_2 - m_1)\, T_3.$$

În figura 16.1, *a* este reprezentată o astfel de mişcare rezultantă obţinută cu ajutorul unui calculator analogic (Heath) din dotarea Catedrei de mecanică teoretică şi aplicată de la Facultatea de construcţii — Bucureşti. Înregistrările au fost făcute pe un înregistrator Honeywell 520, XY, Recorder.

Dacă $\Delta\omega$ are valoare foarte mică, adică dacă cele două pulsaţii ω_1 şi ω_2 ale mişcărilor componente sînt foarte apropiate ca valoare se poate considera că $T_1 \simeq T_2$ iar variaţia amplitudinii mişcării rezultante în decursul unei perioade T_1 (corespunzînd unei deplasări relative $T_1\Delta\omega \simeq T_2\Delta\omega$ a celor două mişcări componente) este nulă. Într-o perioadă $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ mişcarea rezultantă este reprezentată printr-o succesiune de mişcări armonice, fiecare avînd perioada $T_1 \simeq T_2$ şi amplitudini variabile cuprinse între $(a_1 + a_2)$ şi $(a_1 - a_2)$. Acest fenomen este cunoscut sub denumirea de bătăi. În figura 16.1, *b* este reprezentat acest fenomen în cazul cînd $a_1 \simeq a_2$, deci amplitudinea minimă a mişcării rezultante se apropie de zero $(a_1 - a_2 \simeq 0)$. Înregistrările au fost obţinute cu ajutorul aceloraşi aparate ca şi cele din figura 16.1, *a*.

16.2. Să se determine perioada de oscilaţie a masei m, din figura 16.2, suspendată de două resoarte de constante elastice k_1 şi k_2 aşezate în serie.

Rezolvare. Deplasările resoartelor sînt:

$$x_1 = \frac{mg}{k_1},$$

respectiv

$$x_2 = \frac{mg}{k_2}.$$

Deplasarea masei m este deci:

$$x = x_1 + x_2 = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{mg(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} = \frac{mg}{k}$$

unde s-a notat cu k o constantă elastică echivalentă cu aceea a celor două resoarte, astfel încît

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}.$$

Perioada de oscilaţie va fi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

În cazul general a n resoarte legate în serie, valoarea constantei echivalente k este dată de relaţia:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \sum_1^n \frac{1}{k_i}.$$

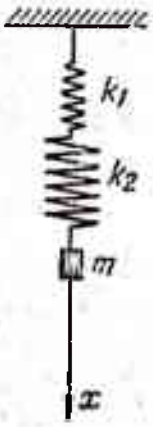


Fig. 16.2

Fig. 16.3

16.3. O greutate P este suspendată de un resort avînd constanta elastică k. Să se studieze mişcarea greutăţii, ştiind că la $t = 0$, $x = x_0$ şi $\dot{x} = 0$.

Rezolvare. Ecuaţia de mişcare a punctului este:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = -kx$$

care se poate scrie şi în următorul fel:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

unde s-a notat $\omega^2 = \frac{kg}{P} = \frac{k}{m}$.

Soluţia ecuaţiei este $x = C_1 \cos \omega t + C_1 \sin \omega t$.

Cu condiţiile iniţiale date, constantele de integrare sînt:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = 0$$

Rezultă legea de mişcare a greutăţii: $x = x_0 \cos \omega t$
unde $\omega = \sqrt{\frac{kg}{P}}$ este pulsaţia oscilaţiei armonice efectuate de greutatea P;
$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{kg}}$ — perioada acestei mişcări;
x_0 — amplitudinea oscilaţiei (constantă).

16.4. Să se determine pulsaţia micilor oscilaţii efectuate de pendulul matematic din figura alăturată, utilizînd metoda energetică (Rayleigh).

Rezolvare. Energia cinetică a masei m este

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2.$$

Considerînd cazul micilor oscilaţii, soluţia ecuaţiei de mişcare va fi:

$$\theta = \theta_0 \cos (\omega t - \varphi),$$

deci:

$$E_c = \frac{1}{2} ml^2\theta_0^2\omega^2 \sin^2 (\omega t - \varphi).$$

Energia potenţială maximă a sistemului este:

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta) \approx mgl \frac{\theta^2}{2},$$

pentru valori mici ale unghiului θ.
Deci:

$$E_p = mgl \cdot \frac{1}{2} \theta_0^2 \cos^2 (\omega t - \varphi).$$

Scriind că:

$$E_c^{max} = E_p^{max},$$

adică

$$\frac{1}{2} ml^2\theta_0^2\omega^2 = mgl \cdot \frac{1}{2} \theta_0^2,$$

rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

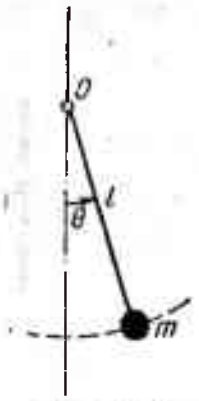


Fig. 16.4

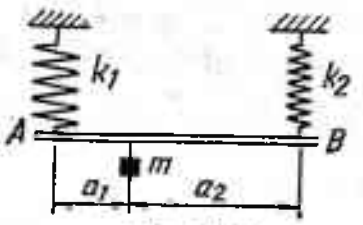


Fig. 16.5

16.5. O masă m este suspendată de două resoarte de constante elastice k_1 și k_2, prin intermediul unei bare AB (fig. 16.5). Să se determine pulsația proprie a mișcării masei m și distanțele a_1 și $a_2 (a_1 + a_2 = l)$ astfel încît, în timpul mișcării, bara să rămînă orizontală.

Deplasările resoartelor sînt:

$$x_1 = \frac{G_1}{k_1} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{G_2}{k_2}.$$

Dar $x_1 = x_2$ și $G_1 + G_2 = mg$.

Rezultă:

$$x = \frac{G_1}{k_1} = \frac{G_2}{k_2} = \frac{mg}{k_1 + k_2}.$$

Deci constanta echivalentă este: $k = k_1 + k_2$.

Pulsația mișcării masei M are valoarea:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

Condiția de plasare a sarcinii se deduce din relația: $a_1k_1 = a_2k_2$.

În cazul a n resoarte montate în paralel, constanta echivalentă este:

$$k = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

16.6. Un pendul simplu de lungime l face la suprafața Pămîntului n oscilații mici într-un timp determinat T; coborît într-o mină, pendulul efectuează în același timp T, n' oscilații mici. Să se determine adîncimea minei.

Rezolvare. Ştiind că g variază în interiorul Pămîntului după legea

$$g_y = g\left(1 - \frac{y}{R}\right),$$

unde g este accelerația gravitației, y — distanța de la suprafața Pămîntului la punctul din interior, iar R — raza pămîntului, avem

$$T = \frac{1}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = \frac{1}{n'} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_y}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1 - \frac{y}{R}\right)}}.$$

Rezultă

$$y = R\left(1 - \frac{n'^2}{n^2}\right).$$

16.7. Să se stabilească perioada de oscilație a masei m din figura 16.7, suspendată prin intermediul unei bare AB, de două resoarte de constante elastice k_1 și k_2 așezate în paralel. Masa m este așezată la jumătatea barei.

Rezolvare. Deplasările celor două resoarte sînt respectiv:

$$x_1 = \frac{mg}{2k_1} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{mg}{2k_2}.$$

Deplasarea masei m va fi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{mg(k_1 + k_2)}{4k_1k_2} = \frac{mg}{k}$$

unde s-a notat

$$k = \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2},$$

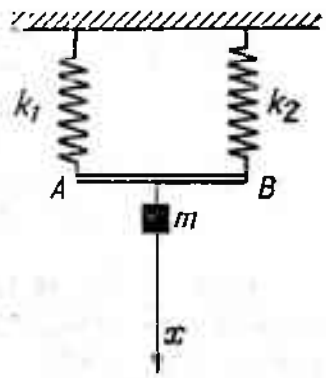


Fig. 16.7

o constantă elastică echivalentă cu aceea a resoartelor. Perioada de oscilație este în acest caz:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{4k_1k_2}} = \pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1k_2}}.$$

16.8. De capătul liber B al grinzii orizontale AB, încastrată în A, de masă neglijabilă, lungime l și rigiditate EI este fixat un resort de constantă elastică k, de care este suspendată o masă m (fig. 16.8). Să se determine pulsația oscilației masei m.

Rezolvare. Grinda AB poate fi asimilată unui resort de constantă elastică:

$$k_1 = \frac{mg}{\delta_{st}}.$$

Se ştie că săgeata în B a grinzii este:

$$\delta_{st} = \frac{mgl^3}{3EI},$$

deci:

$$k_1 = \frac{3EI}{l^3}.$$

Sistemul poate fi considerat ca alcătuit din două resoarte legate în serie. Constanta elastică echivalentă are expresia:

$$k_e = \frac{k_1 k}{k_1 + k} = \frac{3EIk}{3EI + kl^3}.$$

Rezultă pulsaţia proprie a mişcării:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{3EIk}{m(3EI + kl^3)}}.$$

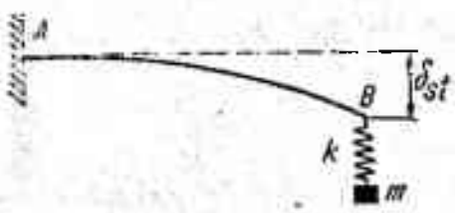


Fig. 16.8

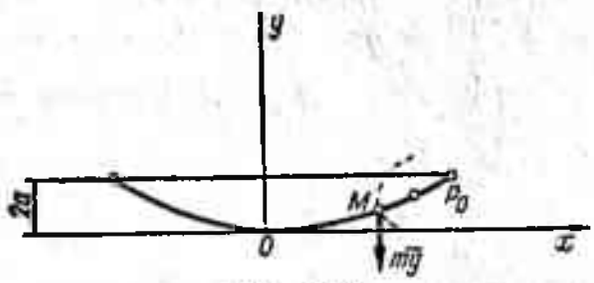


Fig. 16.9

16.9. Să se determine perioada de oscilaţie a unui pendul cicloidal. În momentul iniţial $t = 0$ punctul se găseşte în P_0 de ordonată y_0, fără viteză iniţială (fig. 16.9).

Rezolvare. Coordonatele unui punct M al cicloidei sînt

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta).$$

Pentru un punct material, care coboară pe cicloidă din punctul $P_0(y_0)$ fără viteză iniţială, teorema energiei cinetice se scrie

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

Presupunînd originea arcelor în O şi arcul s crescător cu θ, se obţine cînd punctul coboară spre O

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

Integrînd se obţine

$$t_1 = -\int_{y_0}^{0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = \int_{0}^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}.$$

Dar

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 + \cos\theta)\, d\theta^2$$

şi

$$ds = 2a \cos\frac{\theta}{2} \cdot d\theta = \sqrt{2a} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y}},$$

de unde

$$s = \sqrt{8ay}.$$

Rezultă

$$t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{y(y_0 - y)}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Se observă că t_1 este independent de y_0, deci de poziţia iniţială P_0 — proprietatea de tautocronism a cicloidei.

Pentru determinarea reacţiunii N a curbei, se ştie că

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin\theta\, d\theta}{(a + a\cos\theta)\, d\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}} = \cos\frac{\theta}{2}.$$

Proiecţia ecuaţiei vectoriale de mişcare pe direcţia normală conduce la

$$m\frac{v^2}{\rho} = N - mg\cos\varphi,$$

de unde

$$N = m\frac{2g(y_0 - y)}{4a\sin\frac{\theta}{2}} + mg\cos\frac{\theta}{2}.$$

Deoarece

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{y}{2a}, \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2a - y}{2a},$$

reacţiunea devine

$$N = \frac{mg(y_0 - y)}{2a \cdot \sqrt{\frac{y}{2a}}} + mg\sqrt{\frac{2a - y}{2a}} = mg\left[\frac{y_0 - y}{\sqrt{2ay}} + \sqrt{1 - \frac{y}{2a}}\right].$$

16.10. Să se studieze mişcarea rezultantă a unui punct material care efectuează simultan, după aceeaşi direcţie, două oscilaţii: o oscilaţie armonică şi una amortizată.

$$y_1 = a_1 \cos\omega_1 t$$
$$y_2 = a_{20} \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega_2 t - \varphi_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Folosind relațiile stabilite la problema 16.1. rezultă că legea mișcării rezultante este

$$y = a \cos (\omega_1 t - \varphi). \tag{1}$$

Ținînd seama că aici $a_2 = a_{20} e^{-\lambda t}$, rezultă:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{20} e^{-\lambda t} \sin (t\Delta\omega + \varphi_2)}{a_1 + a_{20} e^{-\lambda t} \cos (t\Delta\omega + \varphi_2)}, \tag{2}$$

$$a^2 = [a_1 + a_{20} e^{-\lambda t} \cos (t\Delta\omega + \varphi_2)]^2 + [a_{20} e^{-\lambda t} \sin (t\Delta\omega + \varphi_2)]^2. \tag{3}$$

Așa cum este cunoscut, efectul oscilației amortizate y_2 descrește în timp iar mișcarea rezultantă se confundă cu oscilația staționară y_1. Într-adevăr din relațiile (2) și (3) se observă că atunci cînd $t \to \infty$, $\operatorname{tg} \varphi = 0$ iar $a = a_1$, deci mișcarea rezultantă (1) devine:

$$y = a_1 \cos \omega_1 t.$$

Compunerea celor două mișcări de mai sus este arătată în figura 16.10. Se observă că după 10 perioade efectul oscilației amortizate y_2 dispare. Mișcarea rezultantă este arătată în figura 16.10, *d*.

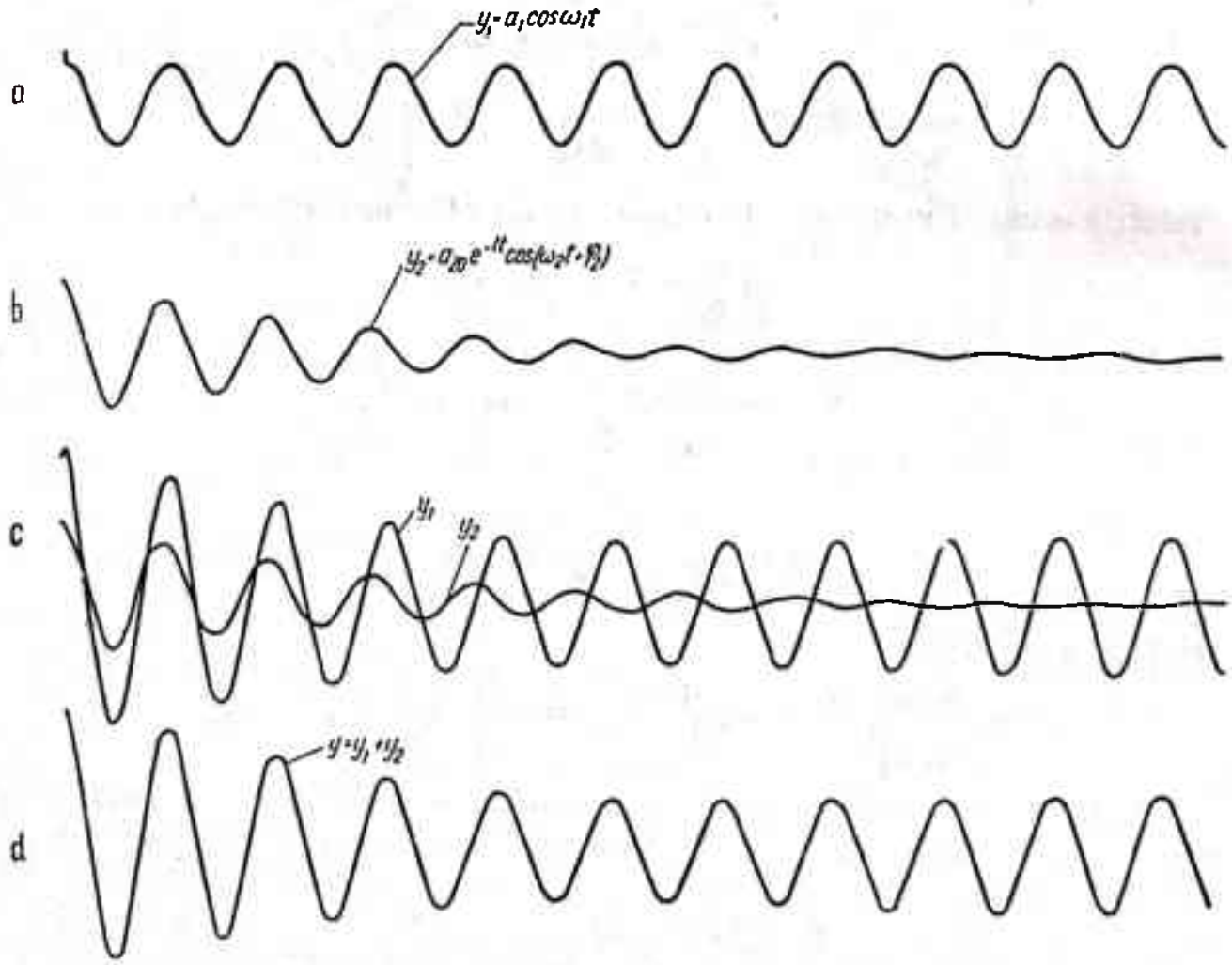


Fig. 16.10

16.11. Un cilindru de greutate P, rază r şi înălţime h este suspendat de un arc AB de constantă elastică k şi scufundat în apă (fig. 16.11). În poziţie de echilibru, cilindrul este scufundat în apă, pe jumătate din înălţimea lui.

În momentul iniţial se scufundă cilindrul cu 2/3 din înălţime, după care fără viteză iniţială începe să execute oscilaţii. Considerînd acţiunea lichidului aplicîndu-se după legea lui Arhimede (densitatea apei γ) să se studieze mişcarea cilindrului în două ipoteze:

a) se neglijează rezistenţa lichidului;

b) se consideră rezistenţa lichidului ca o forţă $F = -\alpha\vec{v}$ proporţională cu viteza (α — o constantă dată).

Rezolvare. a) Ecuaţia diferenţială a mişcării cilindrului

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = -kx - \gamma\pi r^2 x$$

sau

$$\ddot{x} + \frac{k + \gamma\pi r^2}{m}x = 0,$$

cu soluţia

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

unde

$$\omega^2 = \frac{k + \gamma\pi r^2}{m}.$$

Cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $x = \frac{1}{6}h$, $\dot{x} = 0$, constantele de integrare sînt $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{1}{6}h$ şi rezultă legea de mişcare a cilindrului

$$x = \frac{1}{6}h \cos \omega t$$

unde

$$\omega^2 = \frac{g}{P}(k + \gamma\pi r^2).$$

b) Ecuaţia diferenţială a mişcării cilindrului este

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx - \pi r^2\gamma x$$

sau

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

cu soluţia

$$x = C_1 e^{-nt} \sin(\sqrt{n^2 - \omega^2}\, t + \varphi).$$

Cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $x = \frac{h}{6}$, $\dot{x} = 0$, rezultă pentru constante valorile

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{n^2 - \omega^2}}{n}$$

$$C_1 = \frac{h}{6 \sin \varphi} = \frac{h\sqrt{2n^2 - \omega^2}}{6\sqrt{n^2 - \omega^2}}$$

şi soluţia devine

$$x = \frac{h}{6} \frac{\sqrt{2n^2 - \omega^2}}{\sqrt{n^2 - \omega^2}} e^{-nt} \sin(\sqrt{n^2 - \omega^2}\, t + \varphi)$$

în care

$$n = \frac{\alpha}{2m}, \quad m = \frac{P}{g}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} + \frac{\pi r^2 \gamma}{m}$$

Relaţia aceasta reprezintă mişcarea cilindrului cu condiţia $\omega > n$, adică

$$\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \gamma}{m}} > \frac{\alpha}{2m}.$$

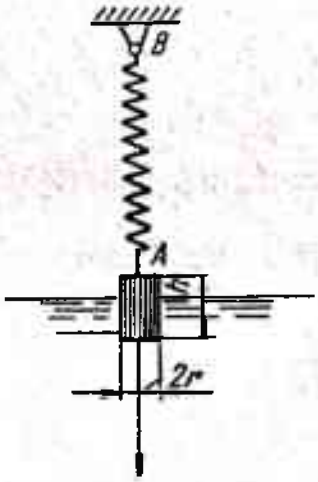


Fig. 16.11

Fig. 16.12

16.12. Asupra unui corp de greutate $G = mg$, suspendat de un resort avînd constanta elastică k, acţionează o forţă perturbatoare P verticală. Să se studieze mişcarea masei m în următoarele cazuri:

a) $P = P_0 =$ constant;

b) $P = at$;

c) $P = P_0 e^{-\alpha t}$, ştiind că în momentul iniţial masa se găsea în repaus, în poziţia de echilibru static.

Rezolvare. a) Ecuaţia de mişcare este:

$$m\ddot{x} = -kx + P_0$$

sau

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m},$$

unde s-a notat $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Ecuaţia de mişcare admite soluţia:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{P_0}{m\omega^2}.$$

Condiţiile iniţiale ale problemei sînt: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, deci:

$$C_1 = -\frac{P_0}{m\omega^2} \text{ şi } C_2 = 0,$$

astfel încît

$$x = \frac{P_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t).$$

b) Ecuaţia de mişcare este:

$$m\ddot{x} = -kx + at$$

sau

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{at}{m}.$$

Soluţia acestei ecuaţii este:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{at}{m\omega^2}.$$

Cu condiţiile iniţiale ale problemei, rezultă următoarele valori ale constantelor de integrare:

$$C_1 = 0 \text{ şi } C_2 = -\frac{a}{m\omega^3}.$$

Soluţia ecuaţiei de mişcare este:

$$x = \frac{a}{m\omega^2}(\omega t - \sin \omega t).$$

c) Ecuaţia de mişcare este:

$$m\ddot{x} = -kx + P_0 e^{-\alpha t}$$

sau

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} e^{-\alpha t}.$$

care admite soluția

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{P_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} e^{-\alpha t}.$$

Cu condițiile inițiale ale problemei, rezultă valorile constantelor de integrare:

$$C_1 = -\frac{P_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \quad \text{și} \quad C_2 = \frac{P_0 \alpha}{m\omega(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Soluția ecuației de mișcare este:

$$x = \frac{P_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \left(e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t\right).$$

16.13. Să se studieze mișcarea oscilatorie forțată a masei m, așezată la mijlocul unei grinzi simplu rezemate, de deschidere l, sub acțiunea unei forțe perturbatoare $P = P_0 \sin pt$ provenind dintr-un motor cu masă excentrică care efectuează n turații pe minut. Se cunosc: E — modulul de elasticitate al materialului din care este alcătuită grinda, I — momentul de inerție al secțiunii transversale. Se neglijează masa barei.

Aplicație numerică:

$$l = 4{,}00 \text{ m}, \quad E = 2{,}1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2, \quad I = 8\,080 \text{ cm}^4$$

$$P_0 = 1 \text{ tf}, \quad n = 500 \text{ rot/minut}, \quad G = mg = 3{,}5 \text{ tf}.$$

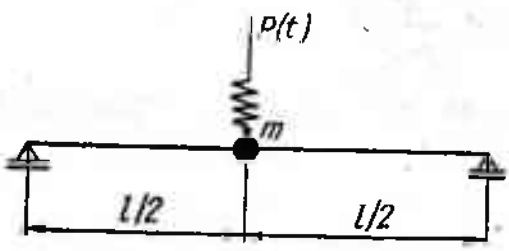


Fig. 16.13

Rezolvare. Ecuația de mișcare a masei m este:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0 \sin pt}{m}.$$

Soluția acestei ecuații, rezultă

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) + \frac{P_0}{m(\omega^2 - p^2)} \sin pt$$

unde:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{48gEI}{Gl^3}} = 59{,}7 s^{-1},$$

$$p = \frac{2\pi n}{60} = 52{,}3 \ s^{-1}.$$

Se observă că $\omega \neq p$, deci nu există pericol de rezonanță.

Pentru a se produce fenomenul de rezonanţă, trebuie să existe relaţia

$$\omega = p$$

deci

$$59{,}7 = \frac{\pi n}{30}.$$

Rezultă turaţia motorului:

$$n = \frac{59{,}7 \times 30}{3{,}14} = 568 \text{ rot/min.}$$

16.14. Asupra masei din figura 16.14, *a* acţionează forţa perturbatoare $P(t)$ a cărei diagramă în funcţie de timp este reprezentată în figura 16.14, *b*. Neglijînd rezistenţele să se studieze oscilaţiile forţate ale masei *m*.

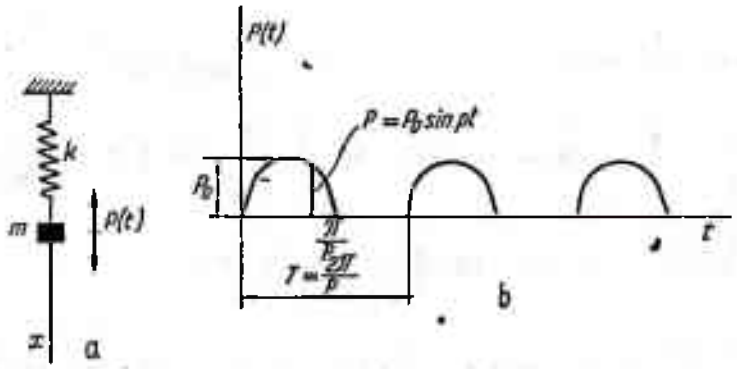


Fig. 16.14

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială a mişcării masei *m* este:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P(t)}{m}.$$

Pentru a studia oscilaţiile forţate, adică a determina soluţia particulară a ecuaţiei neomogene, se dezvoltă funcţia periodică $P(t)$ în serie Fourier:

$$P(t) = a_0 + \Sigma a_i \cos ipt + \Sigma b_i \sin ipt$$

unde:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T P(t) \cdot dt$$

$$a_i = \frac{2}{T}\int_0^T P(t) \cos ipt \cdot dt$$

$$b_i = \frac{2}{T}\int_0^T P(t) \sin ipt \cdot dt.$$

În cazul funcției $P(t)$ date, acești coeficienți sînt:

$$a_0 = \frac{p}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{p}} P_0 \sin pt \cdot dt = \frac{P_0}{\pi}$$

$$a_i = -\frac{2}{i^2-1}\cdot\frac{P_0}{\pi}, \quad \text{pentru } i = 2, 4, 6 \ldots$$

$$a_i = 0, \quad \text{pentru } i = 1, 3, 5, \ldots$$

$$b_1 = \frac{p}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{p}} P_0 \sin^2 pt \cdot dt = \frac{P_0}{2}$$

$$b_2 = b_3 = \ldots = b_i = \ldots = 0.$$

Seria Fourier devine:

$$P(t) = P_0\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin pt - \frac{3}{2\pi}\cos 3pt - \frac{2}{15\pi}\cos 4pt - \frac{2}{35\pi}\cos 6pt \ldots\right),$$

iar oscilațiile forțate se vor produce după legea:

$$x = \frac{P_0}{m\omega^2}\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\sin pt - \frac{1}{1-\left(\frac{2p}{\omega}\right)^2}\cdot\frac{2}{3\pi}\cos 2pt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1-\left(\frac{4p}{\omega}\right)^2}\cdot\frac{2}{15\pi}\cos 4pt \ldots\right].$$

Din această expresie se observă că rezonanța se va produce pentru

$$\omega = p, \quad \omega = 2p; \quad \omega = 4p \text{ etc.}$$

16.15. O bară OA de lungime l și masă neglijabilă este articulată în O și susține la capătul A o masă m. La distanța a de capătul O, se prinde un resort avînd constanta de elasticitate k (fig. 16.15). Să se determine pulsația proprie a mișcării masei m, considerînd micile oscilații ale sistemului.

Rezolvare. Teorema momentului cinetic față de axa O are forma:

$$\frac{dK_0}{dt} = \Sigma M_0,$$

unde

$$K_0 = ml^2\dot{\theta} \quad \text{şi} \quad M_0 = (mgl - ka^2 \cos\theta) \sin\theta.$$

Ecuaţia de mişcare este

$$ml^2\ddot{\theta} = (mgl - ka^2 \cos\theta) \sin\theta.$$

Pentru micile oscilaţii $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$;
deci

$$ml^2\ddot{\theta} - (mgl - ka^2)\,\theta = 0$$

sau

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\theta = 0.$$

Mişcarea este oscilatorie numai dacă

$$\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l} > 0$$

adică

$$mg < \frac{ka^2}{l}.$$

Pulsaţia proprie a mişcării este:

$$\omega = \sqrt{\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}}$$

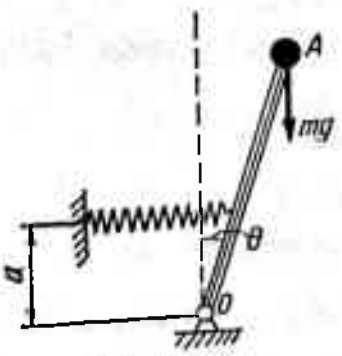


Fig. 16.15

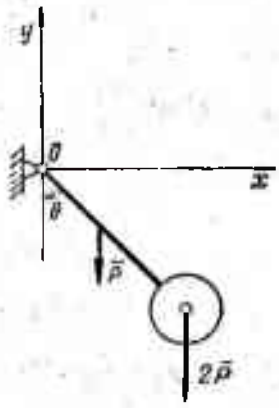


Fig. 16.16

16.16. Un pendul fizic este format dintr-o bară de lungime l şi greutate $\bar{P}$ şi un disc de rază $r = \frac{l}{6}$ şi greutate $2\bar{P}$, care se pot deplasa împreună într-un

plan vertical (fig. 16.16). Să se determine legea micilor oscilaţii ale pendulului care oscilează în jurul axei O. Se cunosc condiţiile iniţiale: la $t = 0$, $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$.

Rezolvare. Se aplică teorema momentului cinetic

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \Sigma \bar{M}_0$$

unde

$$K = I\dot{\theta}, \quad M_0 = -P\frac{l}{2}\sin\theta - 2P\left(l + \frac{l}{6}\right)\sin\theta,$$

deci

$$I_z\ddot{\theta} = -P\frac{l}{2}\sin\theta - 2P\left(l + \frac{l}{6}\right)\sin\theta$$

sau

$$I_z\ddot{\theta} = -\frac{17}{6}Pl\sin\theta$$

unde

$$I_z = \frac{Pl^2}{3g} + \frac{2P}{g}\frac{\left(\frac{l}{6}\right)^2}{2} + \frac{2P}{g}\left(l + \frac{l}{6}\right)^2 = \frac{111}{36}\frac{Pl^2}{g}.$$

Ecuaţia devine

$$\frac{111}{36}\frac{Pl^2}{g}\ddot{\theta} = -\frac{17}{6}Pl\sin\theta$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{102}{111}\frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Dar $\sin\theta \approx \theta$ şi notînd $\frac{102}{111}\frac{g}{l} = \omega^2$, ecuaţia aceasta devine

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0.$$

Soluţia ei este

$$\theta = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$

Cu condiţiile iniţiale: $t = 0$, $\theta = \theta_0$ şi $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, constantele de integrare sînt $C_1 = \theta_0$ şi $C_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}$, deci legea de mişcare a pendulului fizic este, în cazul micilor oscilaţii,

$$\theta = \theta_0\cos\omega t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\sin\omega t.$$

16.17. Bara cotită AOB din figura 16.17 avînd braţele $AO = OB = l$, greutatea $2mg$, este articulată în O şi prinsă în capătul A la un resort a cărui constantă elastică este k. În poziţia de repaus, arcul este netensionat. Pentru a pune în mişcare sistemul se dă barei o rotaţie cu un unghi mic θ_0.

Se cer: legea de mişcare a barei şi pulsaţia proprie pentru micile oscilaţii.

Rezolvare. În poziţie de repaus, centrul de greutate G al barei AOB se găseşte pe verticala ce trece prin O, la distanţa $OC = \frac{l\sqrt{2}}{4}$.

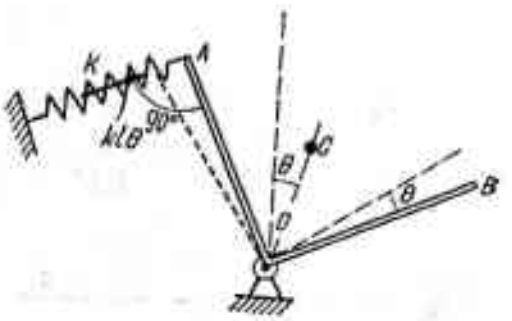


Fig. 16.17

Ecuaţia de mişcare a barei AOB este:

$$I_0\ddot{\theta} = M_0,$$

adică:

$$2\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = -kl^2\theta + 2mg\frac{l\sqrt{2}}{4}\theta,$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{3(2kl - \sqrt{2}\cdot mg)}{4ml}\theta = 0.$$

Pentru a obţine oscilaţii armonice trebuie ca $2kl > \sqrt{2}\cdot mg$.

Notînd

$$\omega^2 = \frac{3(2kl - \sqrt{2}\cdot mg)}{4ml},$$

ecuaţia diferenţială a mişcării se poate scrie:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

a cărei soluţie generală este:

$$\theta = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Condiţiile iniţiale sînt: pentru

$$t = 0 \quad \theta = \theta_0 \text{ şi } \dot{\theta} = 0.$$

Rezultă:

$$C_1 = 0 \text{ şi } C_2 = \theta_0.$$

Legea de mişcare este prin urmare:

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{3(2kl - \sqrt{2}mg)}{4ml}}\, t.$$

b) Frecvenţa proprie a mişcării este:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(2kl - \sqrt{2}mg)}{4ml}}$$

16.18. O bară cotită omogenă de lungime l şi $2l$ şi formînd un unghi drept este articulată în O (fig. 16.18). Să se determine pulsaţia micilor oscilaţii ale sistemului.

Rezolvare. Poziţia centrului de masă al barei este dată de coordonatele

$$x_c = \frac{l}{6}; \quad y_c = \frac{2l}{3}.$$

Energia cinetică a corpului este:

$$E_c = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3} + \frac{2m \cdot 4l^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2} ml^2\dot{\theta}^2.$$

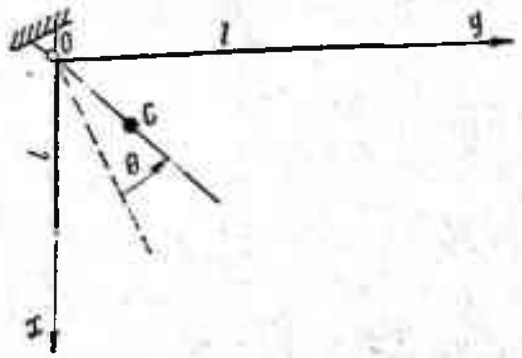


Fig. 16.18

Considerînd cazul micilor oscilaţii:

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t$$

deci,

$$E_c = \frac{3}{2} ml^2 \omega^2\theta_0^2 \cos^2 \omega t.$$

Energia potenţială este:

$$E_p = 3mgOC(1 - \cos\theta) \approx 3mg \frac{l}{6}\sqrt{17} \times$$

$$\times \frac{\theta^2}{2} = \frac{mgl}{4}\sqrt{17}\theta_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Egalînd valorile maxime se obţine:

$$\frac{3}{2} ml^2 \theta_0^2\omega^2 = \frac{\sqrt{17}}{4} mgl\theta_0^2.$$

Rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{17}}{6} \cdot \frac{g}{l}}.$$

16.19. Să se studieze mişcarea pendulului matematic prin metoda perturbaţiei.

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$ml\ddot{\theta} + mgl \sin\theta = 0 \qquad (1)$$

Notînd $\omega_0^2 = \frac{mg}{l}$, această ecuaţie se scrie:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0.$$

Funcţia sinusoidală se înlocuieşte prin seria Mac Laurian:

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

din care — presupunînd că se studiază mişcarea numai pentru valori mici ale lui θ — se reţin numai primii doi termeni. În această situaţie ecuaţia diferenţială a mişcării se scrie:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!}\right) = 0. \tag{2}$$

Desfăcînd paranteza şi în termenul neliniar introducînd coeficientul mic ε, rezultă:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \varepsilon p^2\theta^3 = 0. \tag{3}$$

În această ecuaţie $\varepsilon p^2 = \frac{\omega_0^2}{6}$.

Se caută soluţia ecuaţiei (3) sub forma:

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \ldots \tag{4}$$

Se introduce soluţia (4) în ecuaţia (3):

$$(\ddot{\theta}_0 + \varepsilon\ddot{\theta}_1 + \varepsilon^2\ddot{\theta}_2 + \ldots) + (\omega_0^2\theta_0 + \varepsilon\omega_0^2\theta_1 + \varepsilon^2\omega_0^2\theta_2 + \ldots) -$$

$$- \varepsilon p^2(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \ldots)^3 = 0$$

şi se egalează apoi cu zero factorii diverselor puteri ale lui ε.

Termenii liberi furnizează ecuaţia:

$$\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2\theta_0 = 0, \tag{5}$$

cei în ε:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 - p^2\theta_0^3 = 0, \tag{6}$$

iar cei în ε^2:

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 - 3p^2\theta_0^2\theta_1 = 0. \tag{7}$$

Considerînd că în momentul iniţial $\theta_0(0) = A$ şi $\dot{\theta}_0 = 0$, soluţia ecuaţiei (5) dă valoarea primei aproximaţii:

$$\theta_0 = A\cos\omega_0 t. \tag{8}$$

Înlocuind valoarea lui θ_0 dată de (8) în ecuaţia (6), pentru prima corecţie se obţine ecuaţia:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = p^2A^3\cos^3\omega_0 t$$

sau — înlocuind $\cos^3\omega_0 t = \frac{1}{4}(\cos 3\omega_0 t + 3\cos\omega_0 t)$:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \frac{p^2A^3}{4}(\cos 3\omega_0 t + 3\cos\omega_0 t). \tag{9}$$

Ecuaţia (9) este neomogenă. Soluţia generală a ei se va compune din soluţia ecuaţiei (9) făcută omogenă şi dintr-o soluţie particulară a ecuaţiei complete:

$$\theta_1 = \theta_{10} + \theta_{1n} \tag{10}$$

În relaţia (10) s-au notat cu θ_{10} soluţia ecuaţiei omogene, soluţie care este de forma:

$$\theta_{10} = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \tag{11}$$

iar cu θ_{1n} o soluţie particulară a ecuaţiei complete. Forma acestei soluţii depinde de forma funcţiei perturbatoare care apare în membrul al doilea al ecuaţiei (9). Se descompune această funcţie în două funcţii simple:

$$F_1(t) = \frac{p^2 A^3}{4} \cos 3\omega_0 t$$

$$F_2(t) = \frac{3}{4} p^2 A^3 \cos \omega_0 t.$$

astfel că soluţia particulară θ_{1n} este formată din două părţi:

$$\theta_{1n} = \theta'_{1n} + \theta''_{1n} \tag{12}$$

corespunzătoare respectiv ecuaţiilor obţinute din ecuaţia (9) în care se iau pe rînd cele două funcţii perturbatoare de mai sus $F_1(t)$ şi $F_2(t)$. Deci θ'_{1n} este o soluţie particulară a ecuaţiei:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = F_1(t) = \frac{p^2 A^3}{4} \cos 3\omega_0 t \tag{13}$$

Această soluţie trebuie să fie de forma:

$$\theta'_{1n} = C_3 \cos 3\omega_0 t,$$

iar pentru determinarea constantei C_3 se pune condiţia ca ea să verifice ecuaţia (13):

$$-9\omega_0^2 C_3 \cos 3\omega_0 t + C_3 \cos 3\omega_0 t = \frac{p^2}{4} A^3 \cos 3\omega_0 t.$$

de unde:

$$C_3 = -\frac{p^2}{32\omega_0^2} A^3,$$

deci:

$$\theta'_{1n} = -\frac{p^2}{32\omega_0^2} A^3 \cos 3\omega_0 t. \tag{14}$$

Cealaltă soluţie particulară θ''_{1n} trebuie să verifice ecuaţia:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = F_2(t) = \frac{3}{4} p^2 A^3 \cos \omega_0 t. \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia perturbatoare $F_2(t)$ o punem sub forma $F_2(t) = H\,e^{at}$. Pentru aceasta se dezvoltă $\cos \omega_0 t$ după formula lui Euler:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{\omega_0 ti} + e^{-\omega_0 ti}\right)$$

şi se obţin două ecuaţii:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \frac{3}{8}\,p^2A^3\,e^{\omega_0 ti} \tag{15,a}$$

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \frac{3}{8}\,p^2A^3\,e^{-\omega_0 ti}. \tag{15,b}$$

În ecuaţiile (15, a) şi (15, b) se vede că $H = \frac{3}{8}\,p^2A^3$, iar a are două valori: $a = \pm\,\omega_0 i$ care sînt tocmai rădăcinile ecuaţiei caracteristice:

$$\varphi(r) = r^2 + \omega_0^2 = 0$$

În acest caz soluţiile particulare ale ecuaţiilor (15, a), (15, b) sînt de forma:

$$\theta = Ct\,e^{at}.$$

unde constanta C are valoarea:

$$C = \frac{H}{\varphi'(a)}.$$

în care $\varphi'(a)$ este valoarea derivatei funcţiei $\varphi(r)$ a ecuaţiei caracteristice pentru $r = a$. Ţinînd seama de cele de mai sus, soluţiile particulare ale ecuaţiilor (15, a) şi (15, b) sînt respectiv:

$$\theta''_{1n'} = C_4 t\,e^{(\omega_0 ti)}$$

$$\theta''_{1n''} = C_5 t\,e^{-(\omega_0 ti)}$$

cu:

$$C_4 = \frac{H}{\varphi'(\omega_0 i)} = \frac{3p^2A^3}{16\omega_0 i}$$

$$C_5 = \frac{H}{\varphi'(-\omega_0 i)} = -\frac{3p^2A^3}{16\omega_0 i}.$$

Deci:

$$\theta''_{1n'} = \frac{3p^2A^3}{16\omega_0 i}\,t\,e^{\omega_0 ti}$$

$$\theta''_{1n''} = -\frac{3p^2A^3}{16\omega_0 i}\,t\,e^{-\omega_0 ti}.$$

Soluția particulară θ''_{1n} a ecuației (15) este deci:

$$\theta''_{1n} = \theta''_{1n'} + \theta''_{1n''} = \frac{3p^2A^3}{16\omega_0 i} t(e^{\omega_0 ti} - e^{-\omega_0 ti}) = \frac{3p^2A^3}{8\,\omega_0} t\left[\frac{1}{2i}\,(e^{\omega_0 ti} - e^{-\omega_0 ti})\right]$$

sau, înlocuind paranteza dreaptă cu $\sin \omega_0 t$:

$$\theta''_{1n} = \frac{2p^2A^3}{8\omega_0} t \sin \omega_0 t. \tag{16}$$

Relația (12) se scrie acum:

$$\theta_{1n} = -\frac{p^2A^3}{32\omega_0} \cos 3\omega_0 t + \frac{3p^2A^3}{8\omega_0} t \sin \omega_0 t. \tag{17}$$

Soluția generală a ecuației (9), ținînd seama de relațiile (10), (11) și (17) este:

$$\theta_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{p^2A^3}{32\omega_0} \cos 3\omega_0 t + \frac{3p^2A^3}{8\omega_0} t \sin \omega_0 t. \tag{18}$$

Trebuie remarcat că în această soluție coeficientul ultimului termen conține timpul t, ceea ce face ca amplitudinea oscilațiilor să crească nedefinit cu timpul, lucru ce nu se poate întîmpla într-un sistem conservativ. Astfel de termeni numiți de Poincaré „termeni seculari" apar în soluțiile oscilatorii ale sistemelor neliniare cînd sînt analizate prin metoda perturbației. Apariția termenilor seculari se datorează faptului că funcțiile trigonometrice se reprezintă prin serii finite; ei pot fi evitați dacă se iau măsuri speciale: alegerea corectă a constantelor de integrare, dezvoltarea pulsației oscilației în serie de puteri funcție de amplitudine ș.a. Astfel, dacă în exemplul analizat pe lîngă seria (4) a lui θ se introduce în ecuația diferențială (3) și o serie de puteri pentru ω:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1^2(A) + \varepsilon^2\omega_2^2(A) + \varepsilon^3\omega_3^2(A) \tag{19}$$

din care se consideră în calcule numai primii trei termeni, această ecuație se scrie:

$$\ddot{\theta}_0 + \varepsilon\ddot{\theta}_1 + \varepsilon^2\ddot{\theta}_2 + (\omega_0^2 + \varepsilon\omega_1^2 + \varepsilon^2\omega_2^2)\,(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2) -$$

$$- \varepsilon p^2(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2)^3. \tag{20}$$

Egalînd cu zero factorii diferitelor puteri ale lui ε se obțin ecuațiile:
— pentru factorul lui ε^0:

$$\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2\theta_0 = 0; \tag{21}$$

— pentru factorul lui ε^1:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 - p^2\theta_0^3 + \omega_1^2\theta_0 = 0 \tag{22}$$

. . . . . .

Considerînd că în momentul iniţial $\theta_0 = A$ şi $\dot{\theta}_0 = 0$, soluţia ecuaţiei diferenţiale (21) este:

$$\theta_0 = A \cos \omega_0 t.$$

Substituind această soluţie în ecuaţia (22) se obţine:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 - p^2 A^3 \cos^3 \omega_0 t + \omega_1^2 A \cos \omega_0 t = 0,$$

sau — înlocuind $\cos^3 \omega_0 t = \frac{1}{4}(3 \cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t)$:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = \frac{p^2 A^3}{4} \cos 3\omega_0 t - \left(\omega_1^2 A - \frac{3}{4} p^2 A^3\right) \cos \omega_0 t. \tag{23}$$

Ecuaţia (23) este neomogenă şi de aceeaşi formă cu ecuaţia (9) deci soluţia generală are forma (10):

$$\theta_1 = \theta_{10} + \theta_{1n}.$$

Soluţia θ_{10} a ecuaţiei omogene este:

$$\theta_{10} = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t. \tag{24}$$

Ca şi în exemplul precedent soluţia particulară θ_{1n} a ecuaţiei complete este formată din două părţi:

$$\theta_{1n} = \theta'_{1n} + \theta''_{1n},$$

prima parte (θ'_{1n}) corespunzînd termenului $\frac{p^2 A^3}{4} \cos 3\omega_0 t$ al funcţiei perturbatoare, iar cea de a doua (θ''_{1n}) — termenului $\left(\omega_1^2 A - \frac{3}{4} p^2 A^3\right) \cdot \cos \omega_0 t$. Soluţia particulară θ'_{1n} a ecuaţiei neomogene:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = \frac{p^2 A^3}{4} \cos 3\omega_0 t \tag{24}$$

este de forma:

$$\theta'_{1n} = B_3 \cos 3\omega_0 t.$$

Constanta B_3 se determină punînd condiţia ca soluţia să verifice ecuaţia neomogenă:

$$B_3 = -\frac{p^2 A^3}{32\omega_0^2},$$

deci:

$$\theta'_{1n} = -\frac{p^2 A^3}{32\omega_0^2} \cos 3\omega_0 t. \tag{25}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cealaltă soluţie particulară θ''_{1n} a ecuaţiei neomogene:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \left(\frac{3}{4}p^2A^3 - \omega_1^2 A\right)\cos\omega_0 t \tag{26}$$

se determină după procedeul expus anterior pentru ecuaţia (15). Ţinînd seama de forma (16) a soluţiei acestei ecuaţii, pentru ecuaţia (26) rezultă următoarea soluţie particulară:

$$\theta''_{1n} = \frac{1}{2\omega_0}t\left(\frac{3}{4}p^2A^3 - \omega_1^2 A\right)\sin\omega_0 t. \tag{27}$$

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene (22), ţinînd seama de (25) şi (27) este:

$$\theta_{1n} = \theta'_{1n} + \theta''_{1n} = -\frac{p^2A^3}{32\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t + \frac{t}{2\omega_0}\left(\frac{3}{4}p^2A^3 - \omega_1^2 A\right)\sin\omega_0 t, \tag{28}$$

iar soluţia generală:

$$\theta_1 = \theta_{10} + \theta_{1n} = B_1\cos\omega_0 t + B_2\sin\omega_0 t - \frac{p^2A^3}{32\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t +$$

$$+\frac{t}{2\omega_0}\left(\frac{3}{4}p^2A^3 - \omega_1^2 A\right)\sin\omega_0 t. \tag{29}$$

Coeficienţii B_1 şi B_2 se determină din condiţiile iniţiale, de exemplu: pentru $t = 0$, $\theta_1 = 0$, $\dot{\theta}_1 = 0$.

Se vede că în soluţia (29) ultimul termen este secular. El poate fi evitat dacă $A = 0$ (caz banal), sau dacă:

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4}p^2A^2. \tag{30}$$

În cazul cînd este îndeplinită relaţia (30) — cu condiţiile de mai sus — coeficienţii B_1, B_2 au valorile:

$$B_1 = \frac{p^2A^3}{32\omega_0^2}; \quad B_2 = 0,$$

iar soluţia (29) se reduce la:

$$\theta_1 = \frac{p^2A^3}{32\omega_0^2}(\cos\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t). \tag{31}$$

Se vede că în această soluţie nu mai apare termenul perturbator care apărea în forma (29). Astfel, seria (4) a soluţiei ecuaţiei (3) are expresia:

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \ldots = \left(A + \varepsilon\frac{p^2A^3}{32\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t - \frac{p^2A^3}{32\omega_0^2}\varepsilon\cos 3\omega_0 t. \tag{32}$$

Scanned with OKEN Scanner

16.20. Să se studieze prin metoda numerică Euler, mişcarea pendulului matematic cu amortizare vîscoasă, asupra căruia acţionează un cuplu constant M.

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$ml^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgl \sin \theta = M.$$

Notînd

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \tag{1}$$

ecuaţia se poate pune sub forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{ml^2}\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = \frac{M}{ml^2}.$$

Normalizînd timpul ($\tau = \omega t$) şi luînd o nouă variabilă

$$y = \frac{d\theta}{d\tau} \tag{2}$$

ecuaţia de mai sus se scrie

$$\frac{dy}{d\tau} + k_1 y + \sin \theta = k_2, \tag{3}$$

în care:

$$k_1 = \frac{c}{m\sqrt{gl^3}}; \qquad k_2 = \frac{M}{mgl}. \tag{4}$$

Se va studia ecuaţia (3) luînd pentru constantele (4) valorile $k_1 = 0{,}3$ şi $k_2 = 0{,}5$ iar pentru condiţiile iniţiale ($\tau = 0$) $(\theta)_0 = 2{,}62$, $(y)_0 = 0$

$$\frac{dy}{d\tau} = -0{,}3y - \sin \theta + 0{,}5. \tag{5}$$

Se procedează în modul următor:

— se alege o creştere h convenabilă a variabilei independente; vom lua: $h = 0{,}5$;

— pentru început pendulul se deplasează foarte puţin din poziţia de echilibru dînd o creştere foarte mică lui θ (de exemplu 0,01) pentru a putea calcula valoarea corespunzătoare a lui $\frac{dy}{d\tau}$ din relaţia (5), care se trece în linia „0" a tabelei de calcul;

— primul pas (linia „1") se calculează cu ajutorul formulei lui Euler:

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot \frac{dy_{n-1}}{d\tau}. \tag{6}$$

care se aplică atît variabilei $y = \frac{d\theta}{d\tau}$ cît şi lui θ:

$$y_1 = y_0 + h\frac{dy_0}{d\tau} = 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}0104 = 0{,}0052$$

$$\theta_1 = \theta_0 + h\frac{d\theta_0}{d\tau} = 2{,}63 + 0 = 2{,}63\,;$$

— ultima coloană se calculează cu ajutorul ecuaţiei (5);

— celelalte linii ale tabelului au fost calculate cu ajutorul metodei lui Euler îmbunătăţită, luînd în relaţia (6) media pantelor de la două puncte precedente:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}\left(\frac{dy_{n-2}}{d\tau} + \frac{dy_{n-1}}{d\tau}\right), \tag{7}$$

care s-a folosit atît pentru calculul lui y cît şi pentru cel al lui θ.

Rezultatele sînt trecute în tabelul următor:

Incercarea		$y = \frac{d\theta}{d\tau}$	$0{,}3y$	θ	$\sin\theta$	$\frac{dy}{d\tau}$
0	0	0	0	2,630	0,490	0,01040
1	0,5	0,00520	0,00160	2,630	0,490	0,01104
2	1,0	0,00887	0,00266	2,635	0,485	0,01230
3	1,5	0,01754	0,00526	2,639	0,482	0,01290
4	2,0	0,02179	0,00658	2,653	0,470	0,02390
5	2,5	0,04141	0,01242	2,661	0,463	0,02500

Probleme propuse pentru rezolvare

16.21. Asupra unei mase m, suspendată de un resort avînd constanta elastică k, acţionează o forţă perturbatoare verticală $P = P_0 \cos pt$. Să se studieze mişcarea masei ştiind că în momentul iniţial se găsea în repaus, în poziţia de echilibru.

R: $x = \frac{p_0}{k - mp^2}\left(\cos pt - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$.

16.22. Să se determine pulsaţia proprie a mişcării masei m din figura 16.22, situată la distanţa a de reazemul A al unei grinzi simplu rezemate. Se cunosc: E, I, l. Se neglijează masa barei.

R. $\omega = \frac{1}{a(l-a)}\sqrt{\frac{3lEI}{m}}$.

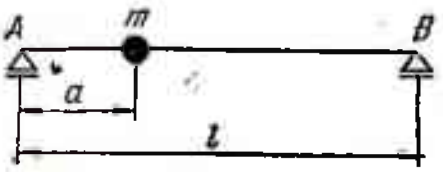


Fig. 16.22

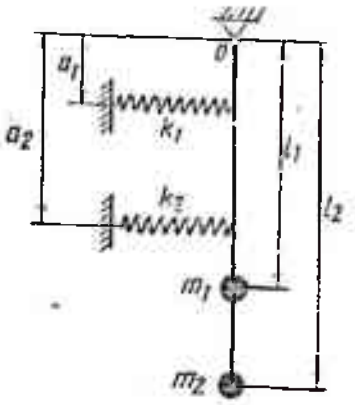


Fig. 16.23

16.23. Să se determine pulsaţia micilor oscilaţii ale unei bare articulate în O de care sînt ataşate două mase m_1 şi m_2, la distanţele l_1 şi l_2 de capătul O. Bara este legată de două resoarte orizontale avînd constantele elastice k_1 şi k_2 (fig. 16.23). Se neglijează masa barei.

R. $\omega^2 = \dfrac{k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2}{m_1 l_1^2 + m^2 l_2^2}$.

16.24. Să se determine constanta elastică echivalentă pentru montajul din figura 16.24, ştiind că barele AB şi CD rămîn orizontale în tot timpul mişcării.

R. $k_e = \dfrac{k_4(k_1 + k_2 + k_3) + k_3(k_1 + k_2)}{k_1 + k_2 + k_3}$.

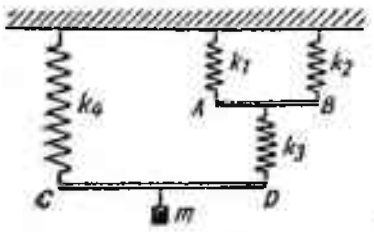


Fig. 16.24

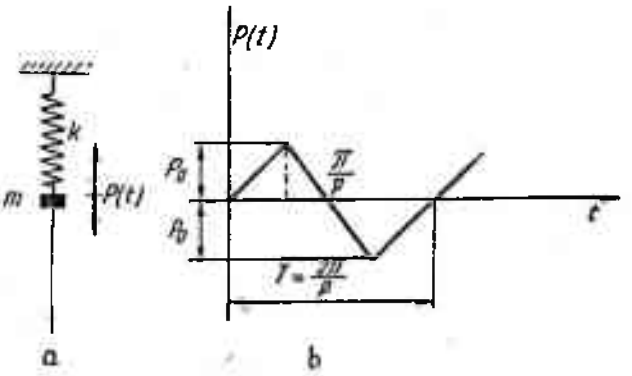


Fig. 16.25

16.25. Asupra masei m din figura 16.25, a acţionează forţa perturbatoare $P(t)$, a cărei diagramă în funcţie de timp este reprezentată în figura 16.25, b. Să se studieze oscilaţiile forţate ale masei m, neglijînd efectul amortizării şi cunoscînd valoarea raportului celor două pulsaţii $\frac{p}{\omega} = 0{,}95$.

R. $x \approx 8P_0 \sin pt$.

16.26. Sistemul din figura 16.26 este format din bara omogenă AB, de lungime l şi masă m_1, articulată în A şi din masa punctiformă m_2 fixată în extremitatea B. La distanţa a de capătul O este fixat un arc avînd constanta elastică k. Să se determine pulsaţia micilor oscilaţii ale sistemului.

R. $\omega = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{\frac{m_1}{3} + m_2}}$.

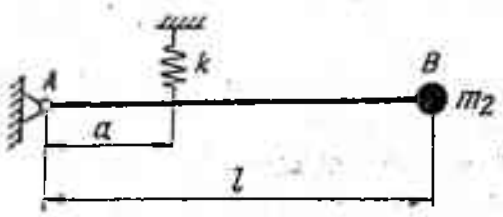


Fig. 16.26

Fig. 16.27

16.27. Să se determine în ce moment al mişcării unui pendul matematic, energia cinetică E_c este egală cu energia potenţială E_p (fig. 16.27).

R. $t = \frac{T}{8}$.

16.28. Un indicator de presiune, format dintr-un tub U, de secţiune constantă conţine lichid pe o lungime l (fig. 16.28). Să se determine frecvenţa proprie a oscilaţiei coloanei de lichid.

R. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$.

Fig. 16.28

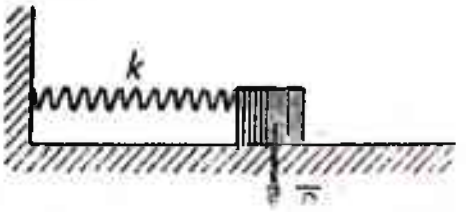


Fig. 16.29

16.29. O greutate G este deplasată din poziţia de repaus cu o distanţă x_0 şi apoi lăsată să se mişte fără viteză iniţială (fig. 16.29). Coeficientul de elasticitate a resortului fiind k şi coeficientul de frecare dintre greutate şi suprafaţa

de rezemare fiind f, să se determine numărul de oscilaţii pe care le va executa corpul pînă la oprire.

R. $n = \frac{kx_0}{4fG}$.

16.30. Un pendul este compus dintr-o serie de tuburi de formă cilindrică, în număr de n, fiecare de masă m, diametrul d şi lungime l. Să se

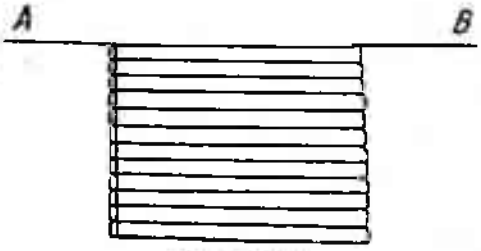


Fig. 16.30

determine perioada micilor oscilaţii în jurul axei AB, ştiind că tuburile sînt goale, tangente între ele şi în acelaşi plan.

R. $T = 2\pi\sqrt{\frac{(2n^2+1)\,d}{3gn}}$.

XVII. CIOCNIRI ŞI PERCUŢII

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului. Capitolul cuprinde probleme privind fenomenele mecanice, în care impulsurile variază brusc. Variaţia impulsului în timpul unei ciocniri se numeşte *percusiune.* În timpul ciocnirii iau naştere, la contactul dintre corpuri, forţe foarte mari, care acţionează un timp scurt, motiv pentru care celelalte forţe se neglijează în studiul ciocnirilor.

Formule de bază. Teoremele generale din studiul ciocnirilor sînt următoarele:

Teorema impulsului: variaţia impulsului total în timpul unei ciocniri este egală cu suma percuţiilor exterioare (date şi de legătură)

$$\bar{H}_1 - \bar{H}_0 = \Sigma\bar{P}_i.$$

Teorema momentului cinetic: variaţia momentului cinetic total în timpul unei ciocniri este egală cu suma momentelor percuţiilor exterioare (date şi de legătură)

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \Sigma\bar{r}_i \times \bar{P}_i;$$

unde s-au notat cu $\bar{H}$ impulsul, $\bar{K}$ momentul cinetic, $\bar{P}_i$ percuția din punctul i, r_i vectorul de poziție al punctului i.

Fenomenul de ciocnire este un fenomen elastic; elasticitatea corpurilor în contact intervine sub forma coeficientului de elasticitate la ciocnire (coeficient de restituire)

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2},$$

v_1, v_2 fiind vitezele la contact, înainte de ciocnire ale corpurilor care se ciocnesc, iar v_1', v_2' fiind vitezele la contact, după ciocnire ale aceloraşi corpuri. Coeficientul k este cuprins între 0 şi 1:

— pentru $k = 0$ ciocnirea se numeşte plastică;
— pentru $k = 1$ ciocnirea se numeşte elastică;
— pentru $0 < k < 1$ ciocnirea se numeşte naturală.

Ciocnirea a două sfere (două puncte materiale) poate fi directă (centrică) sau oblică.

Ciocnirea centrică se efectuează după linia centrelor celor două sfere, care este şi suport al vitezelor (fig. XVII.1). Ecuațiile cu ajutorul cărora se determină necunoscutele v_1', v_2' (vitezele sferelor după ciocnire) sînt

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}.$$

Ciocnirea oblică se efectuează tot după linia centrelor, suporturile vitezelor înainte de ciocnire avînd direcții oarecare. Componentele vitezelor din planul tangent rămîn neschimbate în timpul ciocnirii (fig. XVII.2).

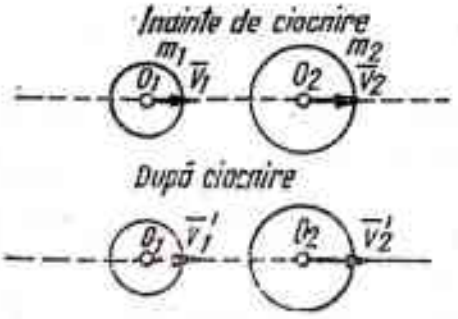


Fig. XVII.1

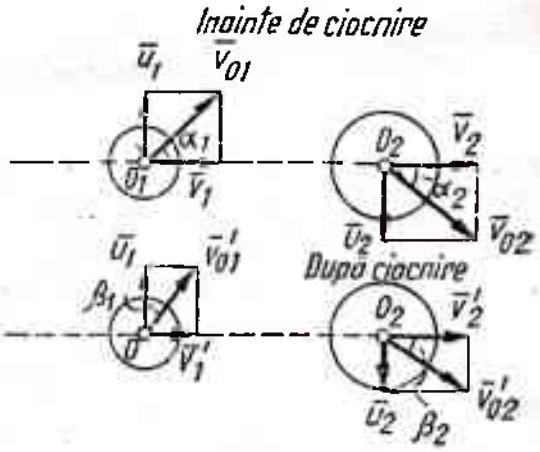


Fig. XVII.2

Ciocnirea unei sfere cu un rigid cu axă fixă se studiază cu ecuațiile de conservare a momentului cinetic total în raport cu axa de rotație şi cu expresia coeficientului de restituire

$$mvl + I\omega = mv'l + I\omega'$$

$$k = \frac{\omega' l - v'}{v - \omega l}.$$

unde s-a notat cu I momentul de inerţie al rigidului în raport cu axa de rotaţie, $\bar{v}$ viteza sferei înainte de ciocnire, $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a solidului înainte de ciocnire, $\bar{v}'$ viteza sferei după ciocnire, $\bar{\omega}'$ viteza unghiulară a solidului după ciocnire, l — distanţa de la axa de rotaţie la suportul vitezei, care se presupune a fi normal pe planul determinat de axa de rotaţie şi centrul de greutate al solidului (fig. XVII.3).

Percuţiile în axă la ciocnirea cu un corp avînd o axă fixă se obţin prin aplicarea teoremelor generale, din sistemul

$$P_{1x} + P_{2x} = -P_x$$

$$P_{1y} = -P_y + \frac{(\omega_1 - \omega) I_{xz} + x_A P_y - y_A P_x}{h}$$

$$P_{1z} = -P_z + (\omega_1 - \omega) M y_G - \frac{(\omega_1 - \omega) I_{xz} + z_A P_x - x_A P_z}{h}$$

$$P_{2y} = -\frac{(\omega_1 - \omega) I_{xz} + x_A P_y - y_A P_x}{h}$$

$$P_{2z} = \frac{(\omega_1 - \omega) I_{xy} + z_A P_x - x_A P_z}{h},$$

unde s-au notat cu x_G, y_G, z_G coordonatele centrului de greutate al solidului, X_A, Y_A, Z_A coordonatele punctului de aplicaţie a percuţiei exterioare $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$, $\bar{P}_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$, $\bar{P}_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$ percuţiile din punctele fixe O_1 şi O_2 (fig. XVII. 4).

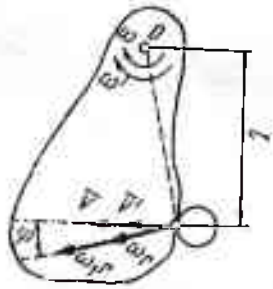


Fig. XVII.3

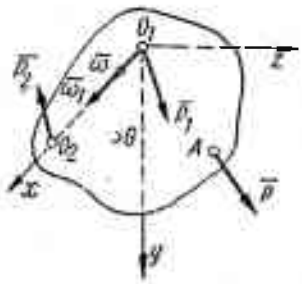


Fig. XVII.4

Centrul de percuţie este punctul în care, dacă se aplică o percuţie, în axa fixă reacţiunea este nulă. Coordonatele acestui punct sînt

$$X_A = \frac{I_{xy}}{M y_G}, \quad Y_A = \frac{I_x}{M y_G}, \quad Z_A = \text{nedeterminat.}$$

Fenomen de ciocnire se produce şi la introducerea bruscă a unei legături rigide. În acest caz, energia cinetică pierdută a sistemului material este

egală cu energia cinetică corespunzătoare pierderii de viteză (teorema lui Carnot)

$$E_0 - E_1 = \sum \frac{1}{2} m_i v_{0i}^2 - \sum \frac{1}{2} m_i v_{1i}^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_{1i} - \bar{v}_{0i})^2$$

unde s-a notat cu m_i masa unei particule i din sistem, $\bar{v}_{0i}$ și $\bar{v}_{1i}$ vitezele particulei i înainte și după ciocnire, $v_{1i} - v_{0i}$ pierderea de viteză a particulei i.

Probleme rezolvate

17.1. Două sfere de mase m_1 și m_2 se ciocnesc central, perfect elastic ($k = 1$). În momentul ciocnirii ele au viteze egale și de sens contrar ($\bar{v}_1 = -\bar{v}_2$), iar după ciocnire sfera de masă m_2 rămîne pe loc ($\bar{v}_2' = 0$). Să se găsească raportul dintre masele celor două sfere pentru ca problema să fie posibilă; și viteza v_1' a sferei de masă m_1 după ciocnire.

Rezolvare. Ciocnirea celor două sfere se studiază utilizînd ecuațiile date de teorema de conservare a impulsului și de expresia coeficientului de restituire k. Aceste ecuații sînt

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1'$$

$$k = 1 = \frac{-v_1'}{v_1 - v_2}$$

sau

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m v_1'$$

$$v_2 - v_1 = v_1'.$$

Din rezolvarea sistemului rezultă

$$\frac{m_2}{m_1} = 3, \quad v_1' = -2\, v_1.$$

Sfera de masă m_1 se întoarce cu o viteză dublă celei cu care a venit. Pentru ca problema să fie posibilă (sfera de masă m_2 să rămnă pe loc după ciocnire) este necesar ca $m_2 = 3m_1$.

17.2. Un proiectil de 200 g izbește cu o viteză de 350 m/s un corp plastic de 60 kg. După ciocnire întreg sistemul are o mișcare de translație rectilinie, pe suportul vitezei proiectilului. Se cere viteza mișcării sistemului.

Rezolvare. Ciocnirea dintre proiectil și corp este o ciocnire plastică, deci $k = 0$ și $\bar{v}_1' = \bar{v}_2'$. Valoarea vitezei comune se obține din aplicarea teoremei impulsului

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v_1'$$

(s-a ţinut seama de faptul că înainte de ciocnire corpul de masă m_2 era în repaus $v_2 = 0$). Rezultă

$$v_1' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{200}{60\,200} 350 = 1{,}16 \text{ m/s}.$$

17.3. Un corp de masă $m_1 = 50$ kg se deplasează rectiliniu, cu o viteză $v_1 = 2$ m/s. În mişcarea sa, acest corp ciocneşte centric un alt corp, de masă $m_2 = 20$ kg, care se deplasează şi el rectiliniu, cu o viteză $v_2 = 1{,}5$ m/s. Ciocnirea fiind perfect elastică, se cer vitezele corpurilor după ciocnire, în următoarele cazuri: a) $\bar{v}_1\bar{v}_2 > 0$ — ambele viteze au acelaşi sens; b) $\bar{v}_1\bar{v}_2 < 0$ — cele două viteze au sensuri contrare.

Rezolvare. Studiul acestei ciocniri se face în ambele cazuri utilizînd teorema de conservare a impulsului şi expresia coeficientului de restituire.

a) Sistemul de ecuaţii pentru studiul acestei ciocniri este

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$v_2' - v_1' = v_1 - v_2.$$

Rezolvînd sistemul se obţine

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(50 - 20) \cdot 2 + 2 \cdot 20 \cdot 1{,}5}{50 + 20} = 1{,}72 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 2 + (20 - 50)1{,}5}{50 + 20} = 2{,}22 \text{ m/s}.$$

b) Sistemul de ecuaţii

$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$v_2' - v_1' = v_1 + v_2.$$

(Se observă că faţă de cazul (a) avem numai o schimbare de semn, la v_2). Rezolvarea acestui sistem duce la soluţiile

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 - 2m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(50 - 20)\, 2 - 2 \cdot 20 \cdot 1{,}5}{50 + 20} = 0$$

$$v_2' = 3{,}5 \text{ m/s}.$$

17.4. O minge cade pe verticală, de la înălţimea h_1, pe un plan orizontal. Coeficientul de restituire fiind k, se cere:

a) să se determine vitezele cu care se întoarce mingea după fiecare ciocnire cu planul orizontal şi înălţimile la care se va urca;

b) energia pierdută prin ciocnire (se va neglija rezistenţa aerului în mişcarea mingii). Caz particular: $k = \frac{1}{2}$.

Rezolvare. a) Se notează vitezele mingii la atingerea planului orizontal cu v_{1i} şi vitezele mingii la părăsirea planului orizontal cu v'_{1i}. Planul orizontal fiind în repaus, viteza sa este nulă, atît înainte, cît şi după ciocnire $v_2 = v'_2 = 0$.
Distribuţia de viteze se obţine scriind succesiv expresia coeficientului de restituire

$$k = -\frac{v'_{1i}}{v_{1i}}.$$

Deoarece mingea cade liber,

$$v_{1i} = \sqrt{2gh_i} \quad \text{şi} \quad v'_{1i} = -k\sqrt{2gh_i}.$$

Studiul mişcării mingii pe verticală se face ţinînd seama de faptul că în punctul cel mai depărtat de planul orizontal, viteza mingii este nulă. Ecuaţiile de mişcare sînt

$$y_i = -\frac{1}{2}gt^2 + v'_{1i}t$$

$$\dot{y}_i = -gt + v'_{1i} = 0$$

de unde

$$t_i = \frac{v'_{1i}}{g}$$

$$y_{i\,max} = h'_i = h_{i+1} = \frac{v'^2_{1i}}{2g} = k^2h_i.$$

Legea de recurenţă pentru înălţimile succesive la care se ridică mingea fiind determinată, expresia acestora în funcţie de h_1 este

$$h'_i = k^{2i}h_1.$$

Spaţiul total parcurs de minge este

$$L_n = h_1 + 2(h'_1 + h'_2 + \ldots + h'_n) = h_1\left(1 + 2k^2\frac{1-k^{2n}}{1-k^2}\right).$$

La limită

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = h_1\left(1 + \frac{2k^2}{1-k^2}\right) = h_1\frac{1+k^2}{1-k^2}.$$

Se observă că în cazul ciocnirii perfect elastice, spaţiul total parcurs tinde către infinit.

b) Pierderile de energie la ciocnirile succesive sînt date de

$$E_i = \frac{1}{2}m(v^2_{1i} - v'^2_{1i}) = \frac{m}{2}2gh_i(1-k^2) = mgh_1k^{2(i-1)}(1-k^2).$$

Pierderea totală de energie este

$$E = mgh_1(1 - k^2)\sum_{i=1}^{n} k^{2(i-1)} = mgh_1(1 - k^{2n}).$$

Pentru $n \to \infty$, suma pierderilor de energie este chiar energia potenţială iniţială a mingii, mgh_1.

17.5. Trei sfere de mase m_1, m_2 şi m_3 au centrele pe aceeaşi dreaptă, m_2 şi m_3 fiind în repaus. Sfera de masă m_1 ciocneşte sfera de masă m_2 cu viteza v_1, iar după această ciocnire, sfera de masă m_2 ciocneşte sfera de masă m_3 cu viteza v_2. Se cere:

a) raportul maselor m_3 şi m_2, dacă $m_2 = am_1$, ştiind că m_2 după ciocnirea cu m_3 se întoarce cu viteza v_1, iar m_3 are viteza v_3;

b) raportul dintre mase, astfel ca după fiecare ciocnire sfera care ciocneşte să rămînă pe loc;

c) cît trebuie să fie de mare masa m_2 în funcţie de masele celorlalte sfere pentru ca viteza pe care o va lua sfera de masă m_3 să fie cea mai mare (ciocnirea se face ca la punctul b).

Rezolvare. a) Se vor studia separat, ciocnirile sferelor de mase m_1 şi m_2, respectiv a sferelor de mase m_2 şi m_3. Din studiul primei ciocniri se obţine coeficientul de restituire k_1', precum şi viteza de după ciocnire a bilei de masă m_1. Sistemul de ecuaţii este

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2 = m_1(v_1' + av_2)$$

$$v_2 - v_1' = k_1v_1$$

şi rezultă

$$k_1' = \frac{v_2(1 + a) - v_1}{v_1}$$

$$v_1' = v_1 - av_2.$$

Din ciocnirea celorlalte două bile obţinem valoarea coeficientului respectiv de restituire k_2', precum şi raportul de mase căutat. În acest caz sistemul de ecuaţii este

$$m_2v_2 = m_2v_1 + m_3v_3$$

$$\frac{v_3 - v_1}{v_2} = k_2'.$$

Raportul maselor corespunzător condiţiilor problemei este

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{v_3}{v_2 - v_1}.$$

b) Se notează cu k_1'' şi k_2'' coeficienţii de restituire corespunzători ciocnirilor în care bila care ciocneşte rămîne pe loc. Din ecuaţiile generale (ale conservării impulsului şi a coeficientului de restituire), rezultă

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \text{sau} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = k_1''$$

$$m_2 v_2 = m_3 v_3 \quad \text{sau} \quad \frac{m_2}{m_3} = \frac{v_3}{v_2} = k_2''.$$

Raportul maselor este

$$\frac{m_1}{m_2} = k_1'' \quad \text{şi} \quad \frac{m_1}{m_3} = k_1'' k_2''.$$

c) Din sistemul de mai înainte rezultă pentru v_3 valoarea

$$v_3 = \frac{m_1}{m_3} v_1 = k_1'' k_2'' v_1.$$

v_3 este maxim pentru $k_1'' k_2'' = 1$, adică

$$m_1 = m_3.$$

17.6. Două sfere A şi B de mase m se ciocnesc. În momentul ciocnirii ele aveau viteze egale în modul $|\bar{v}|$, iar direcţiile lor făceau între ele unghiul α (fig. 17.6).

a) Să se găsească vitezele celor două sfere după ciocnire.

b) Să se determine unghiul α, astfel ca viteza sferei B după ciocnire, să fie cea mai mare. Coeficientul de elasticitate este k.

c) Să se determine condiţia ca după ciocnire sfera B să fie deviată cu 90° faţă de direcţia sa iniţială.

Rezolvare. a) Considerăm că ciocnirea oblică are loc pe direcţia mişcării sferei A. Componenta tangenţială a vitezei bilei B se menţine constantă. Ecuaţiile de mişcare sînt deci

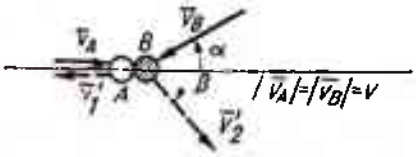


Fig. 17.6

$$v \sin\alpha = v_2' \sin\beta$$

$$k = \frac{v_2' \cos\beta + v_1'}{v + v\cos\alpha}$$

$$v - v\cos\alpha = -v_1' + v_2' \cos\beta.$$

Ultima ecuaţie reprezintă condiţia de conservare a impulsului pe direcţia ciocnirii; masele nu au mai intervenit deoarece sînt toate egale. Din rezolvarea sistemului rezultă

$$v_1' = \frac{v}{2}\,[k(1 + \cos\alpha) - (1 - \cos\alpha)]$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sin\alpha}{k(1 + \cos\alpha) + (1 - \cos\alpha)}$$

$$v_2' = v\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{1}{4}\,[k(1 + \cos\alpha) + (1 - \cos\alpha)]^2}$$

(am notat cu v_1' şi v_2' vitezele de întoarcere ale bilelor A şi B şi cu β unghiul de deviere al bilei B faţă de linia de ciocnire).

b) Între vitezele v_1' şi v_2' trebuie să existe relaţia

$$v_2' > v_1',$$

adică

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{4}[k(1 + \cos\alpha) + (1 - \cos\alpha)]^2 > \frac{1}{4}[k(1 + \cos\alpha) - (1 - \cos\alpha]^2$$

sau

$$\cos 2\alpha < k.$$

c) Pentru ca după ciocnire bila B să fie deviată faţă de direcţia sa cu 90° trebuie ca $\alpha + \beta = 90°$ sau

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha,$$

adică

$$\frac{2\sin\alpha}{k(1+\cos\alpha)+(1-\cos\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

sau

$$\cos^2\alpha + \cos\alpha - \frac{2}{1+k} = 0.$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$\cos\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{1+k}}}{2}$$

Problema este posibilă pentru

$$-1 < \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{1+k}}}{2} < 1.$$

17.7. Două bile A şi B de mase m, perfect elastice, se ciocnesc pe marginea unei mese. Bila A are viteza $\bar{v}_0$, iar bila B este în repaus; după ciocnire, bila B cade de la înălţimea h_1 şi loveşte un plan orizontal ON_1 (fig. 17.7).

Să se studieze mişcarea bilei B după ce părăseşte masa şi să se determine viteza ei după ciocnirea cu planul orizontal. (Între bilă şi planul orizontal coeficientul de restituire este k). Caz particular: $k = 1$.

Rezolvare. Fie v_1' viteza bilei A după ciocnire şi v_2' viteza bilei B după ciocnire. Ciocnirea se studiază cu ecuaţiile

$$v_0 = v_1' + v_2', \quad k = \frac{v_2' - v_1'}{v_0}.$$

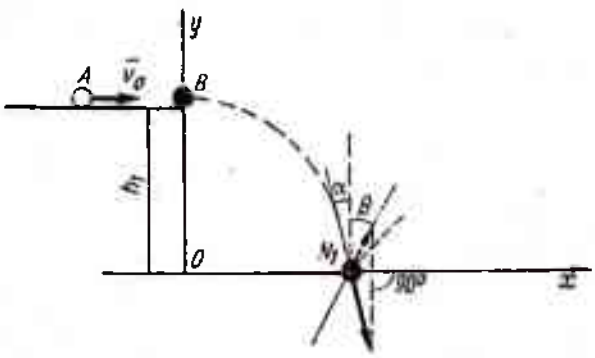


Fig. 17.7

Soluţiile acestui sistem sînt

$$v_1' = \frac{1-k}{2} v_0, \quad v_2' = \frac{1+k}{2} v_0,$$

care în cazul ciocnirii perfect elastice $(k = 1)$ devin

$$v_1' = 0, \quad v_2' = v_0.$$

Mişcarea bilei B este uniform accelerată. În punctul N_1, viteza are două componente: o componentă orizontală $\dot{x} = v_2'$ şi o componentă verticală $\dot{y} = -\sqrt{2gh_1}$. Ciocnirea cu planul orizontal fiind o ciocnire oblică, componenta tangenţială $\dot{x}$ se menţine constantă şi variază numai componenta verticală, care devine

$$v_{1y}' = k\sqrt{2gh_1}.$$

Deoarece mişcarea se face numai sub acţiunea accelerației gravitaţiei (nu intervine rezistenţa aerului, iar $k = 1$) nu se produce nici un fel de pierdere de energie între două ciocniri consecutive, deci viteza cu care pleacă mingea de pe planul orizontal de la cota h_1 este aceeaşi cu cea cu care pleacă de pe planul orizontal de la cota zero.

Viteza corespunzătoare celei de-a n-a ciocniri cu planul orizontal are componentele

$$v_{x_n} = v_2' = \frac{1+k}{2} v_0$$

$$v_{y_n} = k^{n-1}\sqrt{2gh_1}.$$

Viteza corespunzătoare celei de-a n-a desprinderi de planul orizontal are componentele

$$v_{xn}' = v_2' = \frac{1+k}{2} v_0$$

$$v_{yn}' = k\sqrt{2gh_1}.$$

Intervalul de timp dintre două ciocniri se obţine din ecuaţiile de mişcare ale bilei. Astfel, prima ciocnire se efectuează pentru $y = 0$. Ecuaţiile de mişcare sînt

$$x = v_2' t$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + h_1 = 0$$

de unde

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

$$x_1 = \frac{1+k}{2} v_0 \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

A doua ciocnire diferă de prima prin condiţiile iniţiale. În acest caz, la $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $\dot{x} = \frac{1+k}{2} v_0$, $\dot{y} = k\sqrt{2gh_1}$ şi ecuaţiile de mişcare au forma

$$\ddot{x} = 0, \quad \dot{x} = \frac{v_0}{2}(1+k), \quad x = \frac{v_0 t}{2}(1+k)$$

$$\ddot{y} = -g, \quad \dot{y} = -gt + k\sqrt{2gh_1}, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + kt\sqrt{2gh_1}.$$

Cînd bila atinge din nou planul orizontal, $y = 0$. Timpul corespunzător acestei ciocniri este $t_2 = 2k\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, iar spaţiul parcurs $x_2 = v_0 k(1+k)\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Analog se conduce calculul pentru ciocnirile succesive. Timpul total corespunzător mişcării este

$$T = \Sigma t_i = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\,[1 + 2(k + k^2 + \ldots + k^{n-1})] = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \cdot \frac{2k^n - k - 1}{k - 1}.$$

Spaţiul total parcurs pe orizontală

$$S = \Sigma x_i = \frac{1+k}{2} v_0 \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\,[1 + 2(k + k^2 + \ldots + k^{n-1})] = \frac{1+k}{2} v_0 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \times \frac{2k^n - k - 1}{k - 1}.$$

Se observă că în cazul ciocnirii perfect elastice mişcarea continuă indefinit: $T \to \infty$ şi $S \to \infty$.

17.8. Un ciocan A, de masă M, avînd tija de masă neglijabilă şi lungimea $OA = l$, cade din poziţia determinată de unghiul θ_0 al tijei cu verticala şi loveşte bila B a unui pendul de masă m şi lungime $OB = l$, care se găseşte în repaus (fig. 17.8). Să se găsească vitezele pendulului şi ciocanului după ciocnire presupunînd:

a) ciocnirea naturală (coeficient de restituire k);
b) ciocnirea perfect elastică ($k = 1$);
c) ciocnirea plastică ($k = 0$).

Rezolvare. a) Viteza unghiulară a ciocanului în momentul ciocnirii ω_1 se obţine aplicînd teorema energiei între punctele A şi B

$$E_B - E_A = L_{AB}$$

$$\frac{1}{2} I_A \omega_1^2 = Mgl(1 - \cos\theta_0) = 2Mgl \sin^2 \frac{\theta_0}{2}.$$

Dacă neglijăm momentul de inerţie propriu al masei M faţă de centrul său de greutate, $I_A = Ml^2$, deci

$$\frac{Ml^2\omega_1^2}{2} = 2Mgl \sin^2 \frac{\theta_0}{2}.$$

sau

$$\omega_1 = 2 \sin \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

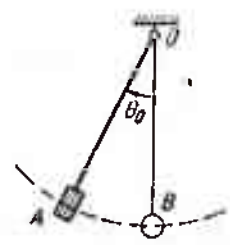


Fig. 17.8

Viteza unghiulară a pendulului în momentul ciocnirii este $\omega_2 = 0$. Vitezele unghiulare după ciocnire $\overline{\omega}_1'$ şi $\overline{\omega}_2'$ se obţin

din ecuațiile conservării momentului cinetic și a coeficientului de restituire k

$$I_A\omega_1 = I_A\omega_1' + I_B\omega_2'$$

$$k = \frac{\omega_2' - \omega_1'}{\omega_1}$$

sau

$$M\omega_1 = M\omega_1' + m\omega_2'$$

$$k = \frac{\omega_2' - \omega_1'}{\omega_1}.$$

Din rezolvarea sistemului rezultă

$$\omega_1' = \frac{M - mk}{M + m}\,\omega_1, \quad \omega_2' = \frac{(k+1)\,M}{M + m}\,\omega_1.$$

b) În ciocnirea perfect elastică $k = 1$. Soluțiile devin

$$\omega_1' = \frac{M - m}{M + m}\,\omega_1, \quad \omega_2' = \frac{2M}{M + m}\,\omega_1.$$

c) În cazul ciocnirii plastice $k = 0$ și soluțiile devin

$$\omega_1' = \omega_2' = \frac{M\omega_1}{M + m}.$$

17.9. Un berbec de greutate $\bar{P} = M\bar{g}$ cade pe capul unui pilot de greutate $m\bar{g}$, de la înălțimea h. Să se studieze randamentul operației de batere a piloților.

Rezolvare. Ciocnirea dintre berbec și pilot este o ciocnire plastică ($k = 0$); vitezele celor două corpuri după ciocnire sînt deci egale: $\bar{v}_1' = \bar{v}_2' = \bar{v}'$. Viteza pilotului în momentul inițial este $v_1 = 0$ și viteza berbecului $v_2 = \sqrt{2gh}$. Din ecuația de conservare a impulsului, rezultă

$$Mv_2 = (M + m)\,v'$$

sau

$$v' = \frac{M\sqrt{2gh}}{M + m}.$$

Energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire este

$$E_0 = Mgh,$$

iar după ciocnire

$$E_1 = \frac{M + m}{2}\,v'^2 = Mgh\,\frac{1}{1 + \frac{m}{M}}.$$

Rezistența solului este învinsă datorită consumului energiei E_1 — deci aceasta folosește pentru crearea de lucru util.

Randamentul este

$$\eta = \frac{E_1}{E_0} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}.$$

Se observă că randamentul este cu atît mai mare (mai aproape de 1) cu cît masa berbecului M este mai mare.

17.10. O bilă grea de masă m, prinsă de punctul O cu un fir inextensibil, de greutate neglijabilă şi lungime l, este lăsată liberă în poziţia OA. În mişcarea sa bila se izbeşte de peretele vertical OB şi se reîntoarce la poziţia extremă OA' (fig. 17.10). Cunoscînd $\sphericalangle AOB = \alpha$, $\sphericalangle A'OB = \beta$, $AO = l$, să se determine coeficientul de elasticitate k dintre bilă şi perete. Mişcarea bilei se face într-un plan vertical, normal peretelui. Aplicaţie: $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

Rezolvare. Peretele fiind fix, viteza lui înainte şi după ciocnire este nulă $v_2 = v_2' = 0$. Notăm cu $\bar{v}_1$ viteza bilei în momentul ciocnirii şi cu $\bar{v}_1'$ viteza bilei după ciocnire.

Aplicînd teorema energiei pentru poziţiile determinate de α şi β, rezultă

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = mg(1 - \cos\alpha)$$

$$\frac{1}{2} mv_1'^2 = mg(1 - \cos\beta).$$

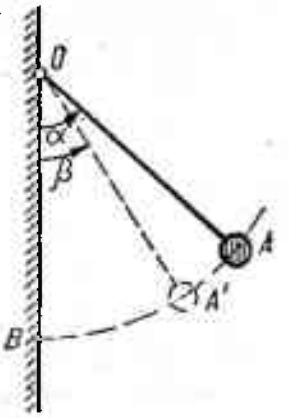


Fig. 17.10

Valorile celor două viteze sînt

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}, \quad v_1' = \sqrt{2gl(1 \cos - \beta)}.$$

Constanta k va fi

$$k = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{\sqrt{1 - \cos\alpha}}{\sqrt{1 - \cos\beta}} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

În cazul aplicaţiei:

$$k = \frac{\sqrt{-1\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

17.11. Să se determine cu ajutorul pendulului balistic, viteza $\bar{v}_0$ a unui proiectil de masă m, ştiind că în momentul cînd proiectilul a pătruns în pendul, acesta s-a deplasat din poziţia sa de repaus cu unghiul θ cunoscut (fig. 17.11). (Se presupun cunoscute datele geometrice ale sistemului, momentul de inerţie al pendulului faţă de punctul de suspensie I_0 şi masa M a pendulului).

Rezolvare. Notăm cu a distanța de la punctul de suspensie O al pendulului la suportul vitezei v_0 și cu b distanța de la centrul de greutate al pendulului la punctul G.

Ciocnirea proiectil-pendul este o ciocnire plastică ($k = 0$) deci $v' = a\omega$ (am notat cu v' viteza proiectilului după ciocnire și cu $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a pendulului după ciocnire).

Conservarea momentului cinetic se exprimă astfel

$$mv_0a = mv'a + I\omega$$

sau

$$mv_0a = (ma^2 + I)\,\omega$$

de unde

$$\omega = \frac{mv_0a}{I + ma^2}, \quad v' = \frac{mv_0a^2}{I + ma^2}.$$

Din aplicarea teoremei energiei între punctele A și B rezultă valoarea lui ω în funcție de θ

$$-\frac{1}{2}(I\omega^2 + ma^2\omega^2) = -(Mb + ma)\,g(1 - \cos\theta)$$

sau

$$\omega^2 = \frac{2(Mb + ma)\,g(1 - \cos\theta)}{I + ma^2}$$

$$v' = a\sqrt{\frac{2(Mb + ma)\,g(1 - \cos\theta)}{I + ma^2}}.$$

La același rezultat pentru ω și v' se ajunge și prin aplicarea teoremei lui Carnot, dacă se ține seama și de relația $v' = a\omega$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(I\omega^2 + ma^2\omega^2) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m(v_0 - a\omega)^2.$$

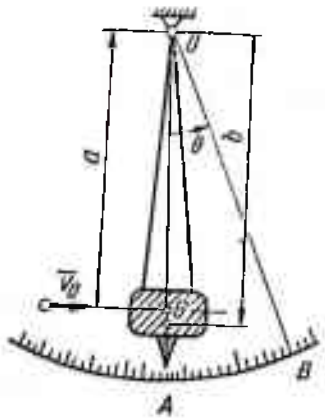


Fig. 17.11

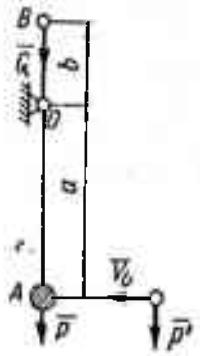


Fig. 17.12

17.12. O bară AB de masă neglijabilă, având în capetele sale greutățile $\bar{P}$ respectiv $\bar{Q}$, poate oscila într-un plan vertical în jurul punctului O ($OA = a$, $OB = b$). Bara este lovită în poziția sa de repaus în punctul A, de către un mobil de greutate $\bar{P}'$ și viteză $\bar{v}_0$ perpendiculară pe bară (fig. 17.12).

Corpurile fiind perfect elastice ($k = 1$) se cere:
a) viteza unghiulară a barei după ciocnire;
b) percuţia din punctul O.

Rezolvare. a) Ciocnirea se studiază utilizînd ecuaţia de conservare a momentului cinetic în raport cu punctul O precum şi expresia constantei k

$$\frac{P'}{g} v_0 a = \left(\frac{P}{g} a^2 + \frac{Q}{g} b^2\right) \omega + \frac{P'}{g} v' a$$

$$-v_0 = v' - a\omega$$

unde am notat $\bar{v}'$ viteza mobilului după ciocnire şi $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a barei. Din rezolvarea sistemului rezultă

$$\omega = \frac{2P'v_0 a}{Pa^2 + Qb^2 + P'a^2}, \quad v' = \left[\frac{P'a^2 - Pa^2 - Qb^2}{P'a^2 + Qb^2 + Pa^2}\right] v_0.$$

b) Percuţia din O se obţine din variaţia impulsului sistemului

$$P_0 = \frac{P'}{g} v_0 - \frac{P'}{g} v' = \frac{2P'}{g}\left(\frac{Pa^2 + Qb^2}{P'a^2 + Pa^2 + Qb^2}\right) v_0$$

şi este dirijată paralel cu $\bar{v}_0$.

17.13. O grindă AOB, simplu rezemată în A şi articulată în O, avînd porţiunea OC în consolă, are p kgf/m. O bilă de greutate Q cade de la înălţimea h, în punctul B — capătul consolei (fig. 17.13, *a*). Să se găsească:

a) viteza unghiulară a grinzii şi viteza bilei după ciocnire, coeficientul de elasticitate fiind k (legătura din A se consideră unilaterală);

b) Percuţiile în O şi A, considerînd legătura din A bilaterală.

Rezolvare. a) Viteza bilei înainte de ciocnire este $v = \sqrt{2gh}$. Scriem ecuaţia de conservare a momentului cinetic faţă de punctul O şi expresia constantei k.

Fie $\bar{v}'$ viteza bilei după ciocnire şi $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a barei.

Momentul cinetic al barei faţă de punctul O este $I_O\,\omega$ în care I_O are expresia

$$I_O = \frac{p}{3g}(a^3 + b^3) = \frac{M}{3}(a^2 - ab + b^2).$$

Sistemul de ecuaţii este deci

$$\frac{Q}{g} bv = \frac{Q}{g} bv' + \frac{M(a^2 - ab + b^2)}{3}\omega$$

$$k = \frac{b\omega - v'}{v}$$

unde

$$M = \frac{p}{g}(a + b).$$

Rezultă

$$\omega = \frac{Qb(1 + k)v}{Qb^2 + \frac{Mg}{3}(a^2 - ab + b^2)}, \quad v' = v\,\frac{Qb^2 - \frac{Mg}{3}k(a^2 - ab + b^2)}{Qb^2 + \frac{Mg}{3}(a^2 - ab + b^2)}.$$

b) În momentul ciocnirii apar în punctele A și O percuții de legătură $\bar{P}_A$ și $\bar{P}_O$, verticale. Valorile acestora se obțin scriind o proiecție a percuțiilor pe verticală și o ecuație de momente a acestora față de punctul A (fig. 17.13,*b*)

$$P_A = P_O - \frac{Q}{g}(v - v')$$

$$P_O a - \frac{Q}{g}(v - v')(a + b) = 0.$$

Soluțiile sînt

$$P_O = \frac{Q(v - v')(a + b)}{a} = \frac{Q}{g}\,\frac{a + b}{a}\,v\,\frac{\frac{Mg}{3}(1 + k)(a^2 - ab + b^2)}{Qb^2 + \frac{Mg}{4}(a^2 - ab + b^2)}$$

$$P_A = \frac{Q}{g}(v - v')\,\frac{b}{a} = \frac{Q}{g}\,\frac{b}{a}\,v\,\frac{\frac{Mg}{3}(1 + k)(a^2 - ab + b^2)}{Qb^2 + \frac{Mg}{3}(a^2 - ab + b^2)}$$

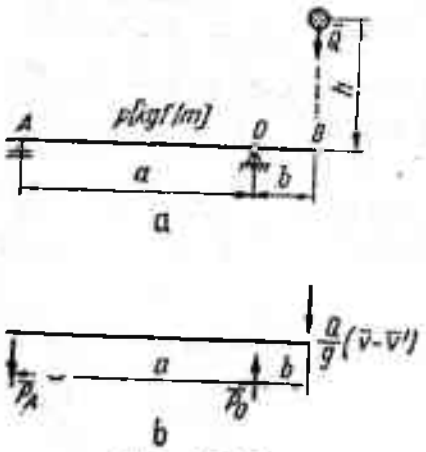


Fig. 17.13

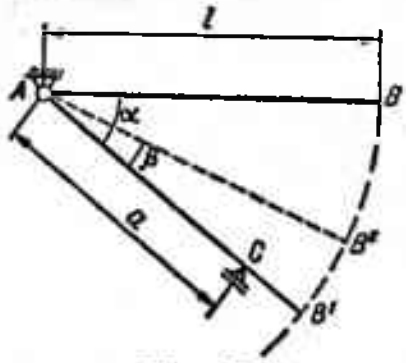


Fig .17.14

17.14. O grindă $AB = l$ de masă M, articulată în A și liberă în B, cade din poziția orizontală AB și izbește un reazem C, în poziția $\sphericalangle BAC = \alpha$ (fig. 17.14). Coeficientul de restituire fiind k, să se studieze mișcarea barei după ciocnire și să se determine percuția din articulația A.

Rezolvare. Reazemul C fiind infinit rigid $\omega' = -k\omega$.

Viteza unghiulară $\bar{\omega}$ se obţine aplicînd teorema energiei între poziţiile AB şi AB'

$$\frac{1}{2} I_A \omega^2 = Mg \frac{l}{2} \sin \alpha$$

de unde

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{l}}$$

şi

$$\omega' = -k \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{l}}.$$

După ciocnire, bara AB ajunge în poziţia AB''. Unghiul β se determină tot prin aplicarea teoremei energiei, din ecuaţia

$$\frac{1}{2} I_A \omega'^2 = Mg \frac{l}{2} [\sin \alpha - \sin (\alpha - \beta)].$$

Percuţia din A are direcţia perpendiculară pe AB; valoarea ei se obţine din sistemul de ecuaţii

$$P_A = M \frac{l}{2} (\omega - \omega') - P_C$$

$$aP_C = I_A(\omega - \omega')$$

şi rezultă

$$P_A = \left(\frac{Ml}{2} - \frac{I_A}{a}\right)(\omega - \omega') = \frac{Ml}{6a} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{l}} (3a - 2l)(1 - k).$$

17.15. O bară omogenă OA, de lungime l şi masă M, este suspendată vertical în O. O bilă B de masă m loveşte normal bara în M la distanţa d de O (fig. 17.15). În momentul ciocnirii bara este în repaus, iar bila are viteza orizontală $\bar{v}_0$. Se cere:

a) viteza barei şi a bilei după ciocnire;

b) percuţia din O. (Corpurile sînt perfect elastice; $k = 1$).

Rezolvare. a) Momentul de inerţie al barei OA faţă de capătul O este

$$I_O = \frac{Ml^2}{3}.$$

Viteza după ciocnire a bilei $\bar{v}'$ şi viteza unghiulară a barei $\bar{\omega}'$ se obţin din sistemul de ecuaţii

$$mv_0 d = \frac{Ml^2}{3} \omega' + mv'd$$

$$k = 1 = \frac{d\omega' - v'}{v_0}.$$

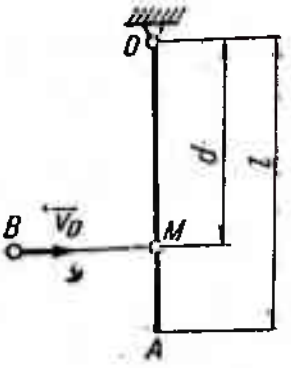


Fig. 17.15

Valorile căutate sînt

$$v' = \frac{md^2 - \frac{Ml^2}{3}}{md^2 + \frac{Ml^2}{3}} v_0, \quad \omega' = \frac{2mdv_0}{md^2 + \frac{Ml^2}{3}}.$$

b) În momentul ciocnirii se produce o percuţie orizontală în articulaţia O. Valoarea acestei percuţii se obţine proiectînd toate impulsurile pe orizontală şi scriind momentele impulsurilor faţă de O.

$$P_0 = \frac{Ml}{2}\omega' - P$$

$$dP = I_0\omega' = \frac{Ml^2}{3}\omega'.$$

Percuţia exterioară P are valoarea

$$P = \frac{Ml^2}{3d}\omega' = \frac{2mMl^2v_0}{3md^2 + Ml^2}.$$

Percuţia din articulaţie rezultă

$$P_0 = \left(\frac{Ml}{2} - \frac{Ml^2}{3d}\right)\omega' = \frac{Mmlv_0(3d - 2l)}{3md^2 + Ml^2}.$$

17.16. O placă circulară omogenă, de masă M şi rază R, suspendată într-un plan vertical, poate oscila în jurul unei axe orizontale $x' - x'$, situată în planul plăcii, la distanţa $R/2$ de centrul ei. O bilă de masă $M/2$, avînd viteza orizontală $\bar{v}_0$, loveşte normal placa în punctul A, situat la distanţa h de centrul ei (fig. 17.16). Se cere:

a) viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a plăcii după ciocnire;

b) reacţiunea axei cînd placa ajunge în poziţia orizontală (corpurile sînt perfect elastice: $k = 1$);

c) punctul unde trebuie lovită placa astfel încît să nu existe percuţie în axă.

Rezolvare. a) Fie $\bar{v}_0'$ viteza bilei după ciocnire şi $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a plăcii în jurul axei $x' - x'$, după ciocnire.

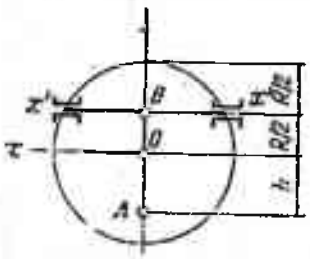


Fig. 17.16

Ecuaţiile pentru studiul ciocnirii sînt

$$\frac{Mv_0}{2}\left(h + \frac{R}{2}\right) = I_{x'x'}\omega + \frac{M}{2}v_0'\left(h + \frac{R}{2}\right)$$

$$k = 1 = \frac{\left(h + \frac{R}{2}\right)\omega - v_0'}{v_0}.$$

Momentul de inerţie $I_{x'x'}$ fiind $I_{x'x'} = I_{xx} + M\frac{R^2}{4} = M\frac{R^2}{2}$, rezultă pentru necunoscute valorile

$$\omega = \frac{2v_0\left(h+\frac{R}{2}\right)}{R^2+\left(h+\frac{R}{2}\right)^2}, \quad v_0' = v_0\frac{\left(h+\frac{R}{2}\right)^2 - R^2}{\left(h+\frac{R}{2}\right)^2 + R^2}.$$

b) Viteza unghiulară a plăcii în poziţia orizontală se obţine aplicînd teorema energiei. Fie $\bar{\omega}_1$ viteza unghiulară a plăcii în poziţie orizontală. Avem

$$\frac{1}{2}I_{x'x'}\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_{x'x'}\omega^2 = Mg\frac{R}{2}$$

sau

$$\omega_1^2 = \frac{2g}{R} + \omega^2.$$

Considerînd placa redusă la axa ei de simetrie, axa în jurul căreia se produce oscilaţia, se proiectează în punctul $B\left(OB = \frac{R}{2}\right)$. Punctul de aplicaţie al forţelor de inerţie A, se va găsi pe axa de simetrie la distanţa

$$y_A = \frac{I_{x'x'}}{My_0} = \frac{\frac{MR^2}{2}}{M\frac{R}{2}} = R$$

Mărimea forţei de inerţie aplicate în acest punct este

$$F_i = M\frac{R}{2}\omega_1^2 = \frac{MR}{2}\left(\frac{2g}{R} + \omega^2\right).$$

Reacţiunea din punctul B are deci două componente

$$y_B = Mg, \quad z_B = \frac{MR}{2}\omega_1^2.$$

c) Pentru ca să nu existe percuţie în axă, trebuie să se lovească placa, în punctul de pe axa de simetrie avînd coordonata

$$y_A = \frac{I_{xx'}}{My_0} = R.$$

adică $h = \frac{R}{2}$. Avînd în vedere simetria figurii, rezultatul acesta, obținut prin calcul, confirmă reversibilitatea dintre centrul de suspensie și centrul de percuție.

17.17. Un cub omogen de latura a și de masă M este așezat pe un plan orizontal, putîndu-se roti în jurul muchiei proiectate în A; un mobil de masă m cu viteza orizontală $\bar{v}_0$, lovește normal, la mijlocul laturii de sus, fața CD a cubului (fig. 17.17). Se cere:

a) viteza unghiulară a cubului după ciocnire;

b) cît trebuie să fie mărimea vitezei $\bar{v}_0$, pentru ca cubul să se răstoarne în jurul muchiei A. (Corpurile sînt perfect elastice.)

Rezolvare. a) Scriem ecuațiile pentru conservarea momentului cinetic la rotirea în jurul muchiei A, precum și expresia coeficientului k

$$mv_0a = I_A\omega + mv'a$$

$$\frac{a\omega - v'}{v_0} = 1.$$

Rezultă pentru ω și v' valorile

$$\omega = \frac{2mv_0a}{I_A + ma^2}, \quad v' = \frac{ma^2 - I_A}{ma^2 + I_A}\, v_0.$$

Momentul de inerție I_A este

$$I_A = I_{xOy} + I_{xOz} = \int_0^a \mu z^2a^2\,dz + \int_0^a \mu y^2a^2\,dy = \frac{2}{3}\,Ma^2.$$

2) Pentru răsturnare, cubul trebuie să efectueze lucrul mecanic dat de

$$L = -Mg\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Aplicăm teorema energiei între momentul producerii ciocnirii și momentul cînd contactul dintre cub și planul orizontal este muchia A.

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2 = Mg\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Pentru răsturnare trebuie ca

$$\omega \geqslant \sqrt{\frac{Mga(\sqrt{2}-1)}{I_A}}$$

sau

$$\frac{2mv_0a}{I_A + ma^2} \geqslant \sqrt{\frac{Mga(\sqrt{2}-1)}{I_A}}.$$

Valoarea căutată a lui v_0 este

$$v_0 \geqslant \frac{\frac{2}{3}M + m}{2m}\sqrt{\frac{3ga(\sqrt{2}-1)}{2}}.$$

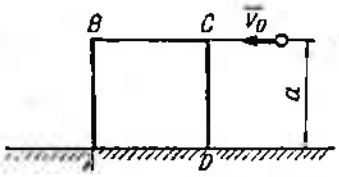


Fig. 17.17

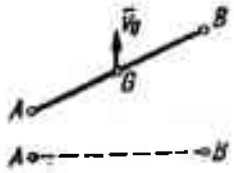


Fig. 17.18

17.18. O bară rectilinie $AB = l$, orizontală, omogenă, de masă m, este aruncată în sus, astfel încît centrul său de greutate are viteză iniţială verticală $\bar{v}_0$, iar bara se roteşte în plan vertical, în jurul centrului său de greutate, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$. Să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ pentru momentul cînd bara ajunge verticală şi i se fixează brusc capătul A (fig. 17.18).

Rezolvare. Energia cinetică iniţială a barei

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{ml^2}{12}\,\omega_0^2.$$

Energia cinetică a barei în momentul fixării capătului A

$$E_f = \frac{1}{2}\,\frac{ml^2}{3}\,\omega_1^2.$$

Energia cinetică a vitezelor pierdute este

$$E_p = \frac{1}{2}\,\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\,\Sigma m_i[\bar{v}_0 + (\bar{\omega} - \bar{\omega}') \times \bar{r}_i]^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{(\omega_0 - \omega_1)^2}{2}\cdot\frac{ml^2}{12}.$$

Aplicînd teorema lui Carnot

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{ml^2}{12}\,\omega_0^2 - \frac{1}{2}\,\frac{ml^2}{3}\,\omega_1^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{(\omega_0 - \omega_1)^2}{2}\cdot\frac{ml^2}{12}.$$

$$\omega_1 = \frac{2}{5}\,\omega_0.$$

17.19. Un corp plastic de 4 kg, avînd o viteză de 12 m/s, lovește centric un alt corp de masă 15 kg avînd o viteză în același sens cu viteza primului corp, egală cu 3 m/s. Să se determine: viteza ambelor corpuri după ciocnire și lucrul mecanic cheltuit.

Rezolvare. Deoarece $k = 0$, rezultă că vitezele ambelor corpuri, după ciocnire, sînt egale și anume:

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 4{,}9 \text{ m/s}.$$

Energia cinetică înainte de ciocnire este:

$$E = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} = 36{,}3 \text{ kmg}.$$

Energia cinetică după ciocnire este:

$$E' = (m_1 + m_2)\frac{v_1'^2}{2} = 23{,}3 \text{ kgm}.$$

Lucrul mecanic cheltuit este egal cu diferența dintre cele două energii, dinainte și după ciocnire:

$$L_m = E - E' = 13 \text{ kgm}.$$

17.20. Să se calculeze randamentul baterii niturilor.

Rezolvare. La baterea niturilor se urmărește a avea o cît mai mare energie pierdută pentru ca ΔE, transformată în căldură, să servească la deformarea corpului ciocănit conform problemei nr. 17.9. Randamentul este

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}.$$

Ciocanul va avea o masă cît mai mică m față de masa ciocnită M, sprijinindu-se masa ciocnită pe o nicovală grea.

17.21. Un berbec de 200 kg cade pe capul unui pilot de la o înălțime de 7,50 m și se oprește în $\frac{1}{10}$ s. Ce forță mijlocie exercită el pe capul pilotului.

Rezolvare

$$P = \left(\frac{\frac{200}{9{,}81}\sqrt{9{,}81 \times 7{,}50 \times 2}}{\frac{1}{10}} + 200\right) \text{ kg.f}$$

17.22. Trei roți O_1, O_2, O_3 de raze R_1, R_2, R_3 și momente de inerție față de centre I_1, I_2, I_3 se rotesc în jurul centrelor lor cu vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ paralele. La un moment dat sistemul se cuplează brusc (fig. 17.22). Se cer vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1'$, $\bar{\omega}_2'$ și $\bar{\omega}_3'$ și după cuplare.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. După cuplare există între vitezele periferice ale roţilor relaţiile

$$\omega_1' R_1 = \omega_2' R_2 = \omega_3' R_3 = k.$$

Teorema lui Carnot stabileşte relaţia

$$\frac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3\omega_3^2 - \frac{1}{2} I_1\omega_1'^2 - \frac{1}{2} I_2\omega_2'^2 - \frac{1}{2} I_3\omega_3'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I_1(\omega_1' - \omega_1)^2 + \frac{1}{2} I_2(\omega_2' - \omega_2)^2 + \frac{1}{2} I_3(\omega_3' - \omega_3)^2$$

sau

$$I_1\omega_1'^2 + I_2\omega_2'^2 + I_3\omega_3'^2 = I_1\omega_1\omega_1' + I_2\omega_2\omega_2' + I_3\omega_3\omega_3'.$$

Din rezolvarea sistemului se obţine

$$k = \frac{I_1\dfrac{\omega_1}{R_1} + I_2\dfrac{\omega_2}{R_2} + I_3\dfrac{\omega_3}{R_3}}{\dfrac{I_1}{R_1^2} + \dfrac{I_2}{R_2^2} + \dfrac{I_3}{R_3^2}}$$

$$\omega_1' = \frac{k}{R_1}, \quad \omega_2' = \frac{k}{R_2}, \quad \omega_3' = \frac{k}{R_3}.$$

Problema poate fi rezolvată şi direct (fără utilizarea teoremei lui Carnot) ţinînd seama de percuţiile tangenţiale care apar la contactul dintre roţi

$$I_1(\omega_1' - \omega_1) = P_1R_1$$
$$I_2(\omega_2' - \omega_2) = -P_1R_2 - P_2R_2$$
$$I_3(\omega_3' - \omega_3) = P_2R_3$$

S-a notat cu P_1 şi P_2 percuţiile dintre roţile (O_1, O_2) respectiv (O_2, O_3). Din rezolvarea sistemului acesta se obţine acelaşi rezultat ca mai sus.

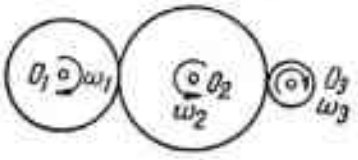


Fig. 17.22

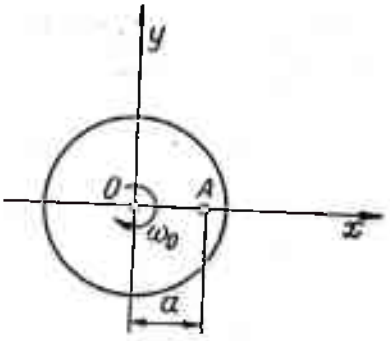


Fig. 17.23

17.23. Un disc circular se roteşte cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$ în jurul centrului său O. La un moment dat se fixează un alt punct al discului A, eliberîndu-se punctul O (fig. 17.23). Să se determine noua viteză unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul lui A şi percuţia ce trebuie exercitată pentru a fixa punctul A.

Rezolvare. Considerăm punctul A pe axa Ox. Viteza centrului O al plăcii este $\bar{v}_0 = 0$ și $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0$ înainte de fixarea punctului A.

După fixarea punctului A, placa se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, în jurul punctului A, iar centrul O are viteza $\bar{v} = + a\omega_1 \bar{j}$.

Aplicînd teoremele generale ale percuțiilor putem scrie următoarele ecuații

$$P_x = 0$$

$$P_y = Ma\omega_1$$

$$I_O(\omega_1 - \omega_0) = aP_y$$

unde am notat cu P_x și P_y componentele pe axe ale percuției din A și $I_O = \frac{MR^2}{2}$. Obținem pentru ω_1 valoarea

$$\omega_1 = \frac{R^2\omega_0}{R^2 - 2a^2}.$$

Percuția din punctul A este

$$P_A = P_y = \frac{MaR^2\omega_0}{R^2 - 2a^2}.$$

În cazul unui punct A pe circumferința cercului ($a = R$) viteza unghiulară ω_1 devine

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2}.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

17.24. Într-o conductă cu diametrul de 200 mm se mișcă, în spatele unui piston, o coloană de apă de 10 m. Dacă pistonul este oprit în 1/10 s, care este presiunea medie pe el, știind că pistonul are o viteză inițială de 20 m/s? (Se neglijează masa pistonului.)

R. 210 kgf/cm².

17.25. O sferă de masă m_1 ciocnește altă sferă de masă m_2, aflată în repaus. După ciocnire sfera m_1 rămîne în repaus. În ce raport se află masele lor, dacă coeficientul de restituire este k?

R. $\frac{m_1}{m_2} = k$.

17.26. Se dă drumul unei mingi să cadă liber de la înălțimea h, deasupra unei podele orizontale și se măsoară timpul T pînă în momentul cînd mingea

încetează mişcarea. Să se deducă coeficientul k de elasticitate la ciocnirea dintre minge şi podea, neglijînd rezistenţa aerului.

R. Însumîndu-se intervalele dintre două ciocniri succesive, se obţine o serie geometrică convergentă cu suma

$$T = \frac{1+k}{1-k}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

din care se determină

$$k = \frac{-1 + T\sqrt{g/2h}}{1 + T\sqrt{g/2h}}.$$

17.27. Două bile sferice, perfect elastice, de mase m_1 şi m_2, alunecă pe două planuri înclinate faţă de orizontală cu unghiurile α_1 şi α_2, de la înălţimile h_1 şi h_2 fără viteze iniţiale (fig. 17.27). Bilele se ciocnesc în O. Să se studieze ciocnirea (fără frecări).

Aplicaţie: $\alpha_1 = 0°$ şi bila de masă m_1 se află în repaus în O. Să se studieze mişcarea ulterioară ciocnirii.

R. Sistemul de ecuaţii corespunzător ciocnirii oblice a celor două bile este

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_1' \sin \beta_1$$

$$v_2 \sin \alpha_2 = v_2' \sin \beta_2$$

$$m_1 v_1 \cos \alpha_1 + m_2 v_2 \cos \alpha_2 = m_1 v_1' \cos \beta_1 + m_2 v_2' \cos \beta_2$$

$$k = \frac{v_2' \cos \beta_2 - v_1' \cos \beta_1}{v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2}.$$

Din rezolvarea sistemului rezultă valorile căutate v_1', v_2', β_1, β_2.

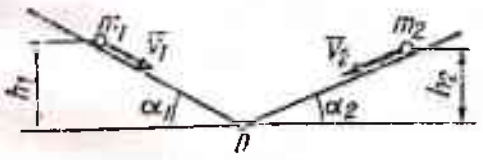


Fig. 17.27

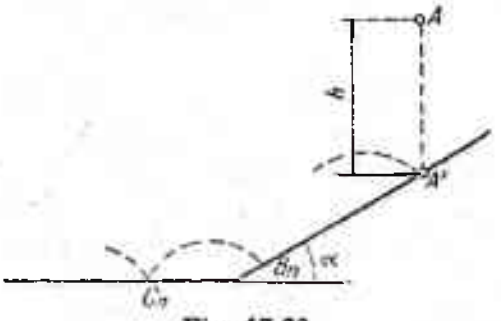


Fig. 17.28

17.28. O bilă de masă m cade de la înălţimea h, pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală (fig. 17.28). Ciocnirea fiind perfect elastică,

să se studieze mişcarea bilei după ciocnirile succesive din B_n (tot pe planul înclinat) şi C_n (pe planul orizontal).

R. Problema este similară cu problema 17.7. Pe planul înclinat ciocnirea s-ar efectua indefinit, bila parcurgînd, arce de parabolă egale, distanţele parcurse pe planul înclinat fiind $AB = BC = ... = 2\,h \sin 2\,\alpha_0$. Pe planul orizontal problema este analogă; se modifică numai valoarea vitezei iniţiale de ciocnire.

17.29. O bară omogenă AOB, de lungime $2\,l$ şi masă m, este articulată în centrul ei de greutate O. O bilă de masă m cade de la înălţimea h şi loveşte bara în capătul A (fig. 17.29). Care va fi mişcarea barei şi bilei, după ciocnire, coeficientul de elasticitate între bară şi bilă fiind k, dacă în momentul iniţial bara era în repaus, în poziţie orizontală?

R. $v_1' = \frac{3-k}{4} v_1, \quad \omega' = \frac{3v_1}{l}(1+k).$

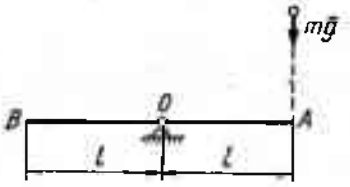


Fig. 17.29

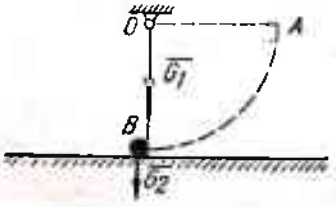


Fig. 17.30

17.30. O bară de lungime $OA = l$ şi greutate $\bar{G}_1$ este articulată în O şi pornind din poziţia orizontală, fără viteză iniţială, ciocneşte o bilă de greutate $\bar{G}_2$ aflată pe un plan orizontal, la distanţa l de O (fig. 17.30). Ce distanţă va mai parcurge $\bar{G}_2$ dacă coeficientul de frecare dintre bilă şi plan este f, iar $k = 0$?

R. $x = \frac{l^2\omega^2}{2fg} \frac{9G_1^2}{G_2(3G_1 - 2G_2)^2}.$

17.31. Un disc circular omogen, de rază R şi greutate $\bar{P}$, se învîrteşte într-un plan vertical, în jurul centrului său O, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$. O paletă A de masă neglijabilă, situată pe periferia cercului, loveşte o bilă B de greutate $\bar{Q}$, care se află în repaus (fig. 17.31). Să se găsească viteza bilei şi a discului după ciocnire. Coeficientul de elasticitate este k.

R. $\omega = \frac{\frac{P}{2} - Qk}{\frac{P}{2} + Qk}\omega_0, \quad v = \frac{PR(1+k)}{P+2Q}\omega_0.$

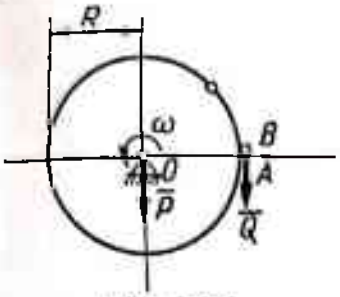


Fig. 17.31

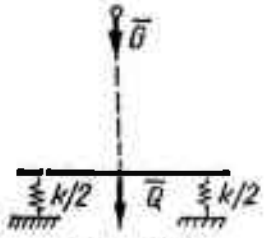


Fig. 17.32

17.32. O greutate $\bar{G}$ cade de la înălţimea h, pe o platformă de greutate $\bar{Q}$, rezemată pe două resoarte avînd rigiditățile egale cu $k/2$. (fig. 17.32). Să se determine (neglijînd masa resoartelor şi considerînd ciocnirea plastică) săgeata maximă δ_d a platformei, după şoc.

R. $\delta_d = \frac{G}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{G+Q}}\right)$.

17.33. O placă semicirculară, omogenă, de rază r şi masă M, este suspendată vertical în jurul diametrului orizontal AB. Placa este lovită în C, pe raza verticală ($OC = a$), de o bilă de masă m, care are viteza orizontală $\bar{v}_0$ perpendiculară pe planul plăcii (fig. 17.33). Se cere:

a) viteza discului şi bilei după ciocnire în cazul $k = 1$;

b) condiţia ca percuţia în axa AB să fie nulă;

c) să se determine $\bar{v}_0$ astfel ca discul să ajungă pînă în poziţia orizontală (corpurile sînt perfect elastice).

R. a) $v' = \dfrac{ma^2 - \frac{Mr^2}{8}}{ma^2 + \frac{Mr^2}{8}} v_0, \quad \omega = \dfrac{2mv_0 a}{ma^2 + \frac{Mr^2}{8}}$;

b) $a = \dfrac{3\pi r}{32}$; c) $v_0 = \dfrac{ma^2 + \frac{Mr^2}{8}}{2ma}\sqrt{\dfrac{8g}{r}}$.

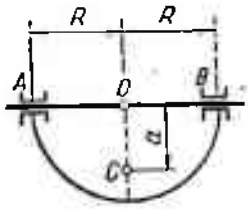


Fig. 17.33

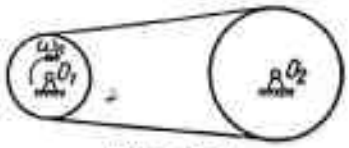


Fig. 17.34

17.34. Să se determine vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ ale roţilor O_1, O_2 de raze R_1, R_2 şi momente de inerţie I_1, I_2, după cuplarea bruscă prin curea a roţii O_1 cu roata O_2 (fig. 17.34). Roata O_1 se află în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$, iar roata O_2 se află în repaus.

R. $\omega_1 = \dfrac{\omega_0}{1 + \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{R_1^2}{R_2^2}}, \quad \omega_2 = \dfrac{\omega_0}{1 + \frac{I_2}{I_1}\frac{R_1^2}{R_2^2}}\cdot\dfrac{R_1}{R_2}$.

Partea a patra

MECANICA ANALITICĂ

Scanned with OKEN Scanner

XVIII. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

Definiţii şi formule

Obiectul capitolului este studiul mişcării sistemelor de puncte materiale prin aplicarea principiului lui d'Alembert. Enunţul principiului poate fi dat în mai multe moduri.

a) Dacă asupra fiecărui punct A_i al unui sistem (A) ar lucra cîte o forţă egală cu

$$\bar{\Phi}_i = -m_i\bar{a}_i + \bar{F}_i,$$

sistemul forţelor $\bar{\Phi}_i$, ar face echilibrul legăturilor $\bar{R}_i$

$$\bar{\Phi}_i + \bar{R}_i = 0.$$

b) Dacă pe lîngă forţa $\bar{F}_i$ am aplica fiecărui punct A_i cîte o forţă egală cu $-m_i\bar{a}_i$ (forţă de inerţie), atunci forţele astfel obţinute ar face echilibrul legăturilor $\bar{R}_i$

$$\bar{F}_i + (-m_i\bar{a}_i) + \bar{R}_i = 0.$$

Aplicarea principiului lui d'Alembert (în special în forma a doua) dă posibilitatea reducerii problemei dinamice a mişcării unui sistem de puncte materiale la o problemă de echilibru.

În mişcarea cea mai generală a unui sistem de puncte materiale, forţele de inerţie se reduc într-un punct O la un torsor al forţelor de inerţie compus din:

— forţa de inerţie rezultantă

$$\bar{R}_i = \Sigma\bar{F}_i = -\Sigma m_i\bar{a}_i = -M\bar{a}_G$$

în care M este masa totală, iar $\bar{a}_G$ acceleraţia centrului de greutate al sistemului;

— cuplul rezultant al forţelor de inerţie avînd ca moment

$$\bar{M}_i = \Sigma\bar{r}_i \times \bar{F}_i = -\Sigma\bar{r}_i \times m_i\bar{a}_i.$$

Principiul lui d'Alembert este aplicabil tuturor problemelor de dinamică.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme rezolvate

18.1. O bară AB de lungime $2\,l$ şi de masă neglijabilă, avînd legate la extremităţi greutăţile $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$, alunecă fără frecare cu capătul A pe axa orizontală Ox şi cu capătul B pe verticala Oy. Capătul A mai este legat de punctul fix O cu un fir inextensibil de lungime $OA = l$. Se cer reacţiunile din A şi B în momentul cînd firul se rupe (fig. 18.1).

Rezolvare. Bara execută o mişcare plan-paralelă, centrul instantaneu I găsindu-se la intersecţia perpendicularelor pe axele Ox şi Oy în punctele A şi B. Vitezele şi acceleraţiile punctelor A şi B sînt

$$v_A = 2l\cos\theta\cdot\omega$$

$$a_A = -2l\sin\theta\cdot\omega^2 + 2l\cos\theta\cdot\dot{\omega}$$

$$v_B = 2l\sin\theta\cdot\omega$$

$$a_B = 2l\cos\theta\cdot\omega^2 + 2l\sin\theta\cdot\dot{\omega}$$

unde s-a notat cu $\omega = \dot{\theta}$, viteza unghiulară instantanee în jurul lui I. În momentul iniţial: $\omega = 0$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Forţele de inerţie din punctele A şi B sînt în acest moment

$$F_1 = m_1 a_A = \frac{P}{g}\cdot l\sqrt{3}\cdot\dot{\omega}$$

$$F_2 = m_2 a_B = \frac{Q}{g}\cdot l\dot{\omega}.$$

Pentru determinarea reacţiunilor din punctele A şi B, precum şi pentru determinarea acceleraţiei unghiulare a sistemului, scriem ecuaţiile de echilibru dinamic

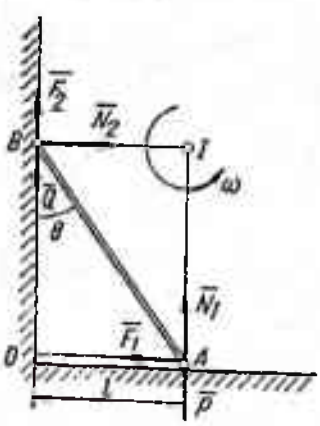


Fig. 18.1

$$\Sigma X_i = -\frac{P}{g}l\sqrt{3}\dot{\omega} + N_2 = 0$$

$$\Sigma Y_i = \frac{Q}{g}l\dot{\omega} + N_1 - Q - P = 0$$

$$\Sigma M_I = -\frac{Q}{g}l^2\dot{\omega} + Ql - \frac{P}{g}3l^2\dot{\omega} = 0.$$

Necunoscutele problemei sînt

$$\dot{\omega} = \frac{Qg}{l(Q+3p)},\quad N_1 = \frac{P(2P+4Q)}{Q+3P},\quad N_2 = \frac{PQ\sqrt{3}}{Q+3P}.$$

18.2. O prismă de greutate $\bar{P}$ alunecă fără frecare pe faţa OA a unei alte prisme triunghiulare de greutate $\bar{Q}$ (fig. 18.2, *a*). Să se studieze mişcarea sistemului.

Rezolvare. Forţele care acţionează asupra fiecăreia dintre cele două prisme sînt reprezentate în fig. 18.2, *b*, *c*.
Ecuaţiile de echilibru dinamic pentru cele două corpuri sînt

$$-\frac{P}{g}a_1 + \frac{P}{g}a_2 \cos\alpha + P\sin\alpha = 0$$

$$N_1 - P\cos\alpha + \frac{P}{g}a_2 \sin\alpha = 0;$$

$$-N_1 \sin\alpha + \frac{Q}{g}a_2 = 0$$

$$N - Q - N_1 \cos\alpha = 0.$$

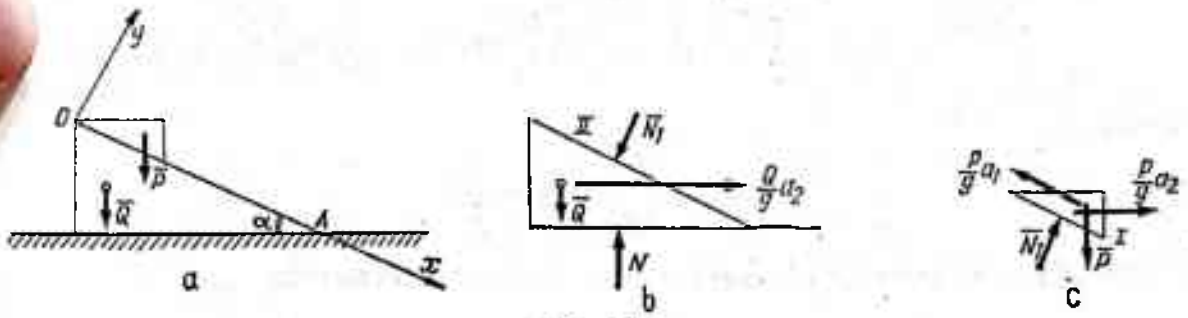


Fig. 18.2

Egalînd valorile reacţiunilor $\bar{N}_1$ şi făcînd calculele corespunzătoare, obţinem expresia acceleraţiei

$$a_2 = \frac{P\sin 2\alpha}{2(Q + P\sin^2\alpha)}g.$$

Prisma ABC execută o mişcare de translaţie cu acceleraţia a_2 în sensul negativ al axei Ox_1.

Prisma de greutate $\bar{P}$ se deplasează în sensul pozitiv al axei Ax cu acceleraţia

$$a_1 = g\sin\alpha\,\frac{P+Q}{Q + P\sin^2\alpha}.$$

18.3. O bară AB, de lungime l şi greutate p kN/m, articulată în A şi simplu rezemată în B, pierde la un moment dat reazemul din B. Să se determine reacţiunea din A: a) în momentul cînd dispare reazemul B; b) în momentul cînd bara ajunge verticală; c) în momentul cînd bara ajunge la un unghi θ faţă de poziţia iniţială (fig. 18.3).

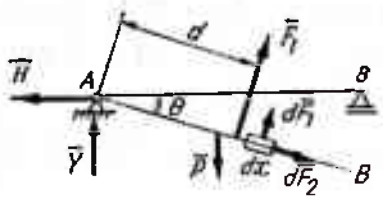


Fig. 18.3

Forțele de inerție care acționează asupra unui element din bară au expresiile

$$dF_1 = \frac{p\,dx}{g}\,x\ddot{\theta}$$

$$dF_2 = \frac{p\,dx}{g}\,x\dot{\theta}^2.$$

Pentru toată bara aceste forțe de inerție sînt

$$F_1 = \int_0^l \frac{p\,dx}{g}\,x\ddot{\theta} = \frac{pl^2}{2g}\,\ddot{\theta}$$

$$F_2 = \int_0^l \frac{p\,dx}{g}\,x\dot{\theta}^2 = \frac{pl^2}{2g}\,\dot{\theta}^2.$$

Poziția forței F_1 se determină aplicînd teorema lui Varignon pentru forțele de inerție tangențiale

$$F_1 d = \int_0^l x\,dF_1 = \frac{p}{g}\,\ddot{\theta}\int_0^l x^2\,dx = \frac{p\ddot{\theta}}{3g}\,l^3.$$

Rezultă

$$d = \frac{p\ddot{\theta}l^3}{3g}\,\frac{2g}{p\ddot{\theta}l^2} = \frac{2}{3}\,l.$$

Echilibrul dinamic al barei se exprimă prin ecuațiile

$$\Sigma X_i = -H + \frac{pl^2}{2g}\,\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{pl^2}{2g}\,\dot{\theta}^2\cos\theta = 0$$

$$\Sigma Y_i = V - pl + \frac{pl^2}{2g}\,\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{pl^2}{2g}\,\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

$$\Sigma M_A = -pl\cdot\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{pl^2}{2g}\,\ddot{\theta}\cdot\frac{2}{3}\,l = 0.$$

Ultima ecuație reprezintă ecuația de mișcare a barei

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\cos\theta.$$

Prin integrare, cu condițiile inițiale $t = 0$, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, rezultă

$$2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} = \frac{3g}{l}\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l}\sin\theta + C$$

unde

$$C = 0.$$

de unde

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 = \frac{3g \sin\theta}{l}, \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin\theta}$$

$$H = \frac{pl^2}{2g}(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta), \qquad V = pl + \frac{pl^2}{2g}(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta} \cos\theta).$$

a) În momentul cînd dispare reazemul B, $\theta = 0$, deci

$$\dot{\theta} = 0, \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}.$$

Rezultă

$$H = 0$$

$$V = pl - \frac{pl^2}{2g} \cdot \frac{3g}{2l} = \frac{pl}{4}.$$

b) În momentul cînd bara ajunge verticală, $\theta = 90°$, deci

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{l}}, \quad \ddot{\theta} = 0.$$

Rezultă

$$H = 0$$

$$V = pl + \frac{pl^2}{2g} \frac{3g}{l} = \frac{5}{2} pl.$$

c) Pentru poziția barei definită de un unghi θ față de poziția inițială

$$H = \frac{pl^2}{2g} \sin\theta \cdot \frac{3g}{2l} \cos\theta + \frac{pl^2}{2g} \cos\theta \cdot \frac{3g}{l} \sin\theta = \frac{9}{8} pl \sin 2\theta$$

$$V = pl - \frac{pl^2}{2g} \cos^2\theta \cdot \frac{3g}{2l} + \frac{pl^2}{2g} \sin\theta \cdot \frac{3g}{l} \sin\theta =$$

$$= pl - \frac{3pl \cos^2\theta}{4} + \frac{3pl \sin^2\theta}{2} = pl \frac{(10 - 9\cos^2\theta)}{4}.$$

18.4. Două bare egale și omogene, de greutate $\bar{P}$ fiecare și lungime $OA = AB = l$, sînt articulate între ele. În punctul O este o articulație fixă, iar capătul B alunecă fără frecare pe verticala y — y (fig. 18.4). Sistemul se rotește în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$. Să se determine reacțiunile din O și B.

Rezolvare. Forțele de inerție (vezi problema 18.3) sînt

$$F_1 = F_2 = \int_0^l \frac{p\,dx}{g} \omega^2 x \sin\theta = \frac{P}{2g} l\omega^2 \sin\theta.$$

Ecuaţiile de echilibru dinamic au forma

$$\Sigma X_i = -H_0 - H_B + \frac{P}{g} l\omega^2 \sin\theta = 0$$

$$\Sigma Y_i = V_0 - 2P = 0$$

$$\Sigma M_0 = \frac{Pl}{2g}\omega^2 \sin\theta\left(\frac{2}{3} l\cos\theta + l\cos\theta + \frac{l}{3}\cos\theta\right) -$$

$$- 2Pl\sin\theta - H_B \cdot 2l\cos\theta = 0.$$

Valorile reacţiunilor H_B, V_0, H sînt

$$H_B = +\frac{Pl}{2g}\omega^2 \sin\theta - P_2 \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$V_0 = 2P, \quad H_0 = \frac{Pl}{2g}\omega^2 \sin\theta + \frac{P\sin\theta}{\cos\theta}.$$

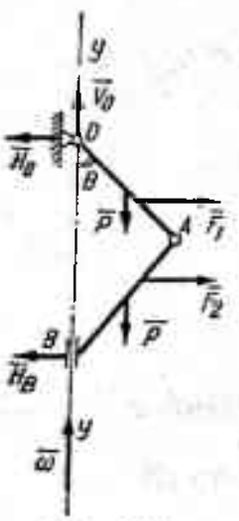
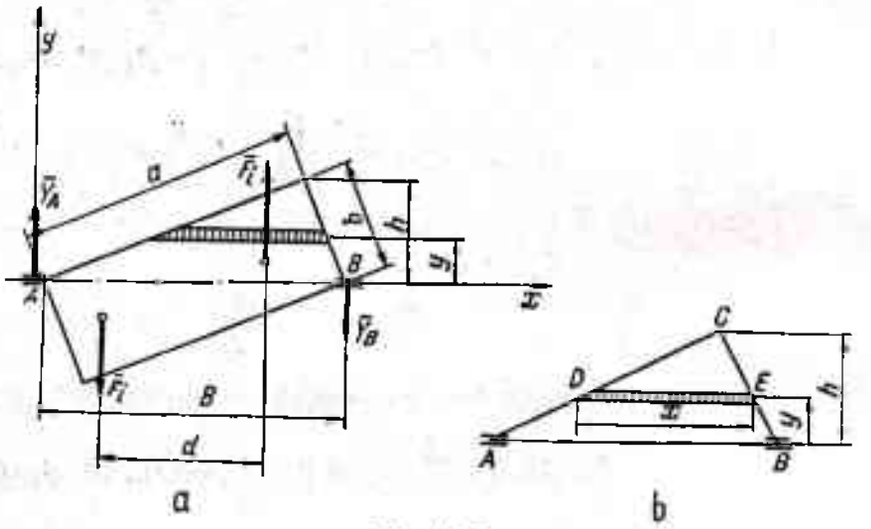


Fig. 18.4



a b

Fig. 18.5

18.5. O placă omogenă dreptunghiulară, de laturi a, b şi de greutate $\bar{P}$, se roteşte cu o viteză unghiulară constantă $\bar{\omega}$ în jurul diagonalei AB (fig. 18.5, *a*). Să se determine valorile reacţiunilor dinamice din reazemele A şi B.

Rezolvare. Datorită rotaţiei uniforme în jurul axei AB apar în fiecare element de placă forţe de inerţie centrifugale.

Considerăm o jumătate din placă împărţită în elemente, prin paralele duse la ipotenuza AB. Elementele considerate dreptunghiuri au suprafaţa $dA = x\,dy$ (fig. 18.5, *b*).

Forţa de inerţie corespunzătoare unui element este

$$dF_i = \frac{P}{g}\frac{y}{ab}\omega^2 x\,dy.$$

Din asemănarea triunghiurilor ABC şi DEC rezultă relaţiile

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{h-y}{h}$$

sau, deoarece $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} - y}{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

de unde

$$x = \frac{a^2+b^2}{ab}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} - y\right).$$

Forţa de inerţie care acţionează asupra triunghiului ABC este

$$F_i = \frac{P\omega^2}{gab}\int yx\,\mathrm{d}y = \frac{P\omega^2}{ga^2b^2}(a^2+b^2)\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} y\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} - y\right)\mathrm{d}y = \frac{P\omega^2 ab}{6g\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Triunghiul ABF va fi acţionat de o forţă de inerţie similară. Punctele de aplicaţie ale forţelor de inerţie au coordonatele

$$x_i = \frac{I_{xy}}{M_{y_G}}, \quad y_i = \frac{I_x}{M_{y_G}}$$

unde

$$I_{xy} = \int xy\,\mathrm{d}m = \int_0^h y\left[y\frac{a}{b} + \frac{B}{2h}(h-y)\right]\gamma\,\frac{B(h-y)}{h}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\gamma B}{h}\left[\frac{a}{b}\cdot\frac{h^4}{3} + \frac{Bh^3}{4} - 2\cdot\frac{Bh^3}{6} - \frac{a}{b}\,\frac{h^4}{4} + \frac{Bh^4}{8h}\right] = \frac{\gamma Bh^2}{12}\left[\frac{ah}{b} + \frac{B}{2}\right].$$

Rezultă

$$x_i = \frac{\frac{\gamma Bh^2}{12}\left[\frac{ah}{b} + \frac{B}{2}\right]}{\frac{\gamma Bh}{2}\cdot\frac{1}{3}h} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}h + \frac{B}{2}\right).$$

Ţinînd seama de notaţiile

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad B = \sqrt{a^2+b^2},$$

avem

$$x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{a \cdot ab}{b\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right) = \frac{3a^2+b^2}{4\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Coordonata y_i nu intervine în determinarea mărimii reacţiunilor. Reacţiunile din A şi B se obţin din relaţia de echilibru dinamic

$$Y_A\sqrt{a^2+b^2} = F_i d$$

unde

$$d = \sqrt{a^2+b^2} - 2\left(\sqrt{a^2+b^2} - \frac{3a^2+b^2}{4\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{a^2-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

sau

$$Y_A\sqrt{a^2+b^2} = \frac{P\omega^2 ab}{6g\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{(a^2-b^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Rezultă pentru reacţiunile Y_A şi Y_B valorile

$$Y_A = Y_B = \frac{P\omega^2 ab(a^2-b^2)}{12g(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

18.6. Să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}$ cu care trebuie să se rotească în jurul axei AB o placă ABC — triunghi dreptunghic isoscel de catetă a, articulat în A şi rezemat simplu în B (fig. 18.6) astfel încît reacţiunea reazemului B să se anuleze.

Rezolvare. Forţa de inerţie are valoarea

$$F_i = M\omega^2 y_G = M\omega^2 \cdot \frac{a}{3}.$$

Punctul de aplicaţie al acestei forţe are coordonatele

$$x_I = \frac{I_{xy}}{My_G}, \quad y_I = \frac{I_x}{My_G}.$$

Pentru placa din figură

$$I_x = \gamma\int_0^a xy^2\,dy = \gamma\int_0^a (a-y)\,y^2\,dy = \frac{Ma^2}{6}$$

$$I_{xy} = \gamma\int_0^a x\,dy \cdot \frac{x}{2}y = \gamma\int_0^a (a-y)^2\,y\,dy = \frac{Ma^2}{12},$$

deci

$$x_I = \frac{\frac{Ma^2}{12}}{M \cdot \frac{a}{3}} = \frac{a}{4}, \quad y_I = \frac{\frac{Ma^2}{6}}{M \cdot \frac{a}{3}} = \frac{a}{2}.$$

Expresia reacţiunii H_B se obţine scriind o ecuaţie de momente în A — ecuaţie de echilibru dinamic

$$\Sigma M_A = -H_B \cdot a - Mg \cdot \frac{a}{3} + M\omega^2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} = 0$$

de unde

$$H_B = \frac{M\omega^2 a}{12} - \frac{Mg}{3}.$$

Pentru ca reacţiunea H_B să se anuleze trebuie să existe relaţia

$$\frac{M\omega^2 a}{12} = \frac{Mg}{3}.$$

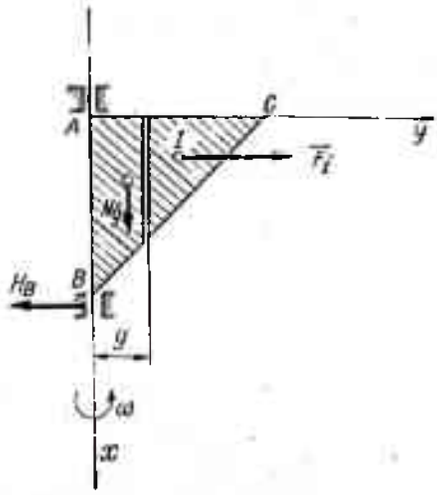


Fig. 18.6

Rezultă valoarea pentru viteza unghiulară ω

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

18.7. Un disc circular plan, omogen, de rază R şi greutate $\overline{P}$ se roteşte cu o viteză unghiulară $\overline{\omega}$ = const. în jurul unui ax O_1 perpendicular pe planul discului, situat la o distanţă $OO_1 = e$ de centrul său (fig. 18.7).
Să se determine reacţiunea maximă din axul O_1.

Rezolvare. În mişcarea de rotaţie în jurul axului O_1 apar în fiecare punct forţe de inerţie de forma

$$dF_i = r\omega^2\, dm$$

avînd proiecţiile pe axe

$$dX_i = x\omega^2\, dm, \quad dY_i = y\omega^2\, dm.$$

Forţa de inerţie rezultantă are componentele

$$X_i = \int dm x\omega^2 = \omega^2 \frac{P}{g} x_G$$

$$Y_i = \int dm y\omega^2 = \omega^2 \frac{P}{g} y_G.$$

Forţa de inerţie va avea modulul

$$|F_i| = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} = \omega^2 \frac{P}{g} \sqrt{x_G^2 + y_G^2} = \omega^2 \frac{P}{g} e.$$

Reacţiunea din axul O_1 are mărimea rezultantei forţelor $\bar{P}$ şi $\bar{F}_i$. Rezultanta $\bar{R} = \bar{P} + \bar{F}_i$ are valoarea maximă cînd O şi O_1 se găsesc pe aceeaşi verticală, în care caz

$$R = P + F_i = P + \omega^2 \frac{Pe}{g} = P\left(1 + \frac{\omega^2 e}{g}\right).$$

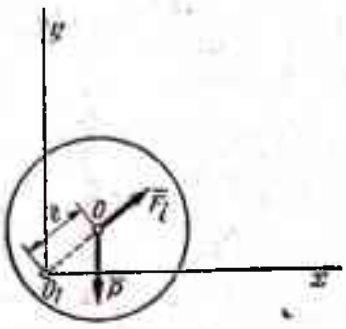


Fig. 18.7

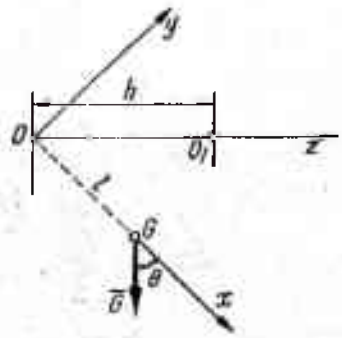


Fig. 18.8

18.8. Să se studieze rotaţia unei roţi grele de masă M şi rază R în jurul unei axe orizontale fixe Oz, presupunînd roata descentrată ($OG = l$) (fig. 18.8)

Rezolvare. Torsorul în O al forţelor de inerţie este

$$\bar{R}_i = Ml\omega^2\bar{i} - Ml\dot{\omega}\bar{j}$$

$$\bar{M}_i = (-I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\dot{\omega})\,\bar{i} + (I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\dot{\omega})\,\bar{j} - I_{zz}\dot{\omega}\bar{k}.$$

Imobilitatea axei Oz este asigurată prin două puncte fixe O şi O_1 situate la distanţa h. Pentru echilibrul dinamic

$$\bar{R}_i + \bar{G} + \bar{R}_0 + \bar{R}_{O_1} = 0$$

$$\bar{M}_i + \overline{OG}\times\bar{G} + \overline{OO_1}\times\bar{R}_{O_1} = 0.$$

Proiectînd aceste relaţii pe axe obţinem sistemul de ecuaţii

$$Ml\omega^2 + G\cos\theta + R_x + R_{1x} = 0$$

$$-Ml\dot{\omega} - G\sin\theta + R_y + R_{1y} = 0$$

$$R_z + R_{1z} = 0$$

$$-I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\dot{\omega} - hR_{1y} = 0$$

$$I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\dot{\omega} + hR_{1x} = 0$$

$$-I_{zz}\dot{\omega} - lG\sin\theta = 0. \qquad \text{(a)}$$

Admitem: $R_z = R_{1z} = 0$.

Reacţiunile din punctele fixe ale axei Oz au componentele

$$R_{1x} = -\frac{1}{h}(I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\dot{\omega})$$

$$R_{1y} = \frac{1}{h}(I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2)$$

$$R_x = \frac{1}{h}(I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\dot{\omega}) - Ml\omega^2 - G\cos\theta$$

$$R_y = \frac{1}{h}(I_{yz}\omega^2 - I_{xz}\dot{\omega}) + Ml\dot{\omega} + G\sin\theta.$$

În cazul special cînd axa Oz este o axă principală de inerţie pentru punctul O, adică

$$I_{yz} = I_{xz} = 0,$$

relaţiile de mai sus devin

$$R_{1x} = R_{1y} = 0$$

$$R_x = -M(g\cos\theta + l\omega^2)$$

$$R_y = M(g\sin\theta + l\dot{\omega}).$$

Dar din relaţia (a) obţinem

$$\dot{\omega} = \ddot{\theta} = -\frac{Gl}{I_{zz}}\sin\theta.$$

Multiplicînd-o cu ω şi integrînd

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{Gl}{I_{zz}}\cos\theta + C.$$

Pentru $t = 0$, $\omega = \omega_{max}$, deci

$$C = \frac{\omega^2_{max}}{2} - \frac{Gl}{I_{zz}}.$$

Reacţiunea din O va avea componentele

$$R_x = -M\left[\left(1 + \frac{2Ml^2}{I_{zz}}\right)g\cos\theta + 2Cl\right]$$

$$R_y = \frac{I_{zz} - Ml^2}{I_{zz}}Mg\sin\theta.$$

18.9. Pe axul de rază d, al unui disc de rază r şi greutate $\bar{P}$, este înfăşurat un fir de care se trage cu o forţă $\bar{T}$ înclinată cu unghiul α faţă de orizontală (fig. 18.9). Să se determine legea de mişcare a centrului O al discului

cunoscînd raza de giraţie ρ a acestuia şi ştiind că discul se rostogoleşte pe planul orizontal.

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru dinamic sînt

$$-\frac{P}{g}a_G + T\cos\alpha - F = 0$$

$$N - P + T\sin\alpha = 0$$

$$I\varepsilon - F\cdot r + T\cdot d = 0,$$

la care se adaugă relaţia

$$a_G = \varepsilon r$$

şi se obţine

$$N = P - T\sin\alpha$$

$$F = T\cos\alpha - \frac{P}{g}a_G$$

$$\frac{P}{g}\rho^2\cdot\frac{a_G}{r} - Tr\cos\alpha + \frac{P}{g}a_G r + Td = 0$$

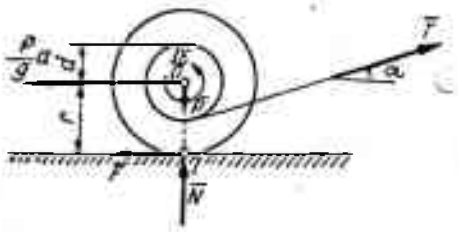


Fig. 18.9

sau

$$a_G = \frac{Trg(r\cos\alpha - d)}{P(\rho^2 + r^2)}.$$

Legea de mişcare a centrului O va fi

$$s = \frac{Trg(r\cos\alpha - d)}{2P(\rho^2 + r^2)}t^2.$$

18.10. Sistemul din figura 18,10, *a* este format din doi scripeţi coaxiali de raze R_1, R_2 şi mase m_1, m_2 şi din greutăţile $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$ suspendate cu fire. Greutatea $\bar{Q}$ se deplasează pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală (coeficient de frecare la alunecare f). Să se determine acceleraţia sistemului şi tensiunile din fire.

Rezolvare. Cu notaţiile din fig. 18.10, *b*, ecuaţiile de echilibru dinamic sînt

$$P - T_2 - \frac{P}{g}a_2 = 0$$

$$T_1R_1 - T_2R_2 + \frac{m_1R_1^2}{2}\varepsilon + \frac{m_2R_2^2}{2}\varepsilon = 0$$

$$T_1 - fQ\cos\alpha - Q\sin\alpha - \frac{Q}{g}a_1 = 0$$

$$N - Q\cos\alpha = 0.$$

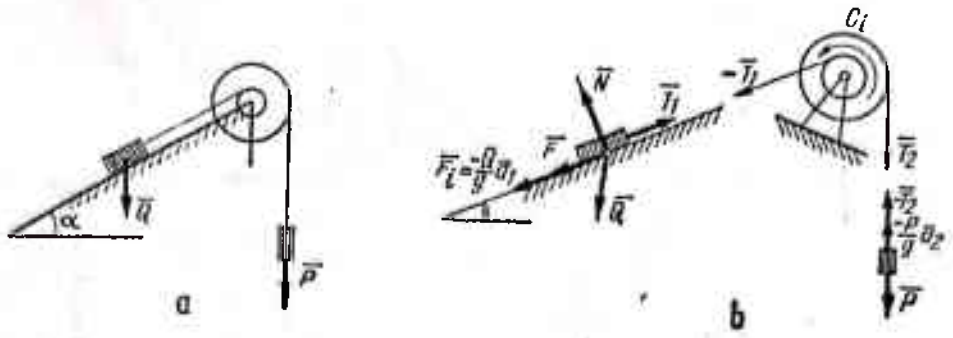


Fig. 18.10

Din considerente cinematice mai există relaţia

$$\varepsilon = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2}.$$

Rezultă

$$\varepsilon = \frac{PR_2 - fR_1Q\cos\alpha - QR_1\sin\alpha}{\frac{Q}{g}R_1^2 + \frac{P}{g}R_2^2 + \frac{m_1R_1^2}{2} + \frac{m_2R_2^2}{2}}$$

$$a_1 = R_1\varepsilon, \quad a_2 = R_2\varepsilon$$

$$T_2 = P - \frac{P}{g}R_2\left(\frac{PR_2 - fR_1Q\cos\alpha - QR_1\sin\alpha}{\frac{Q}{g}R_1^2 + \frac{P}{g}R_2^2 + \frac{m_1R_1^2}{2} + \frac{m_2R_2^2}{2}}\right)$$

$$T_1 = fQ\cos\alpha + Q\sin\alpha + \frac{Q}{g}R_1\left(\frac{PR_2 - fR_1Q\cos\alpha - QR_1\sin\alpha}{\frac{Q}{g}R_1^2 + \frac{P}{g}R_2^2 + \frac{m_1R_1^2}{2} + \frac{m_2R_2^2}{2}}\right).$$

18.11. Să se determine acceleraţia greutăţii $\bar{P}$ legată cu un fir înfăşurat pe un disc O de rază R. Coaxial cu acesta este un disc de rază r, care se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal. Discurile O au greutatea $\bar{Q}$ şi raza de giraţie ρ (fig. 18.11, *a*).

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru dinamic sînt

$$P - \frac{P}{g}a - T = 0$$

$$T - F + \frac{Q}{g}a_0 = 0$$

$$N - Q = 0$$

$$-I\varepsilon - \frac{Q}{g}a_0r + T(R - r) = 0.$$

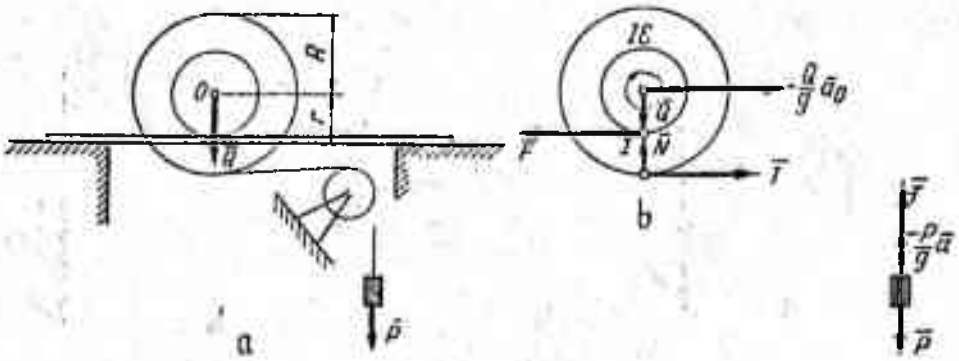


Fig. 18.11

La acestea se adaugă relațiile

$$\varepsilon r = a_0, \quad \frac{a_0}{r} = \frac{a}{R-r}.$$

Din prima ecuație

$$T = P\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

Din ecuația a doua

$$F = T + \frac{Q}{g} a_0 = P\left(1 - \frac{a}{g}\right) + \frac{Q}{g} \frac{ar}{(R-r)}$$

ecuația a patra devine

$$-\frac{Q}{g} \rho^2 \frac{a}{R-r} - \frac{Q}{g} \frac{ar^2}{R-r} + P\left(1 - \frac{a}{g}\right)(R-r) = 0.$$

Accelerația greutății $\bar{P}$ este

$$a = \frac{Pg(R-r)^2}{Q(\rho^2 + r^2) + P(R-r)^2}.$$

18.12. Pe o suprafață orizontală poate aluneca fără frecare o prismă de greutate $\bar{P}$. Pe fața AB a prismei se rostogolește fără alunecare un cilindru circular de rază R și greutate $\bar{Q}$ (fig. 18.12, *a*). Să se studieze mișcarea prismei.

Rezolvare. Cu notațiile din figura 18.12, *b*, ecuațiile de echilibru dinamic pentru sistemul celor două corpuri sînt

$$-T - \frac{Q}{g} a_1 + Q \sin \alpha + \frac{Q}{g} a_2 \cos \alpha = 0$$

$$N - Q \cos \alpha + \frac{Q}{g} a_2 \sin \alpha = 0$$

$$I\varepsilon = TR;$$

$$-N \sin \alpha + T \cos \alpha + \frac{P}{g} a_2 = 0$$

$$-P - N \cos \alpha + N_1 - T \sin \alpha = 0,$$

la care se adaugă relaţia

$$a_1 = R\varepsilon.$$

Momentul de inerţie al discului este $I = \frac{Q}{g}\frac{R^2}{2}$, deci ecuaţia a treia devine

$$T = \frac{Q}{2g} a_1.$$

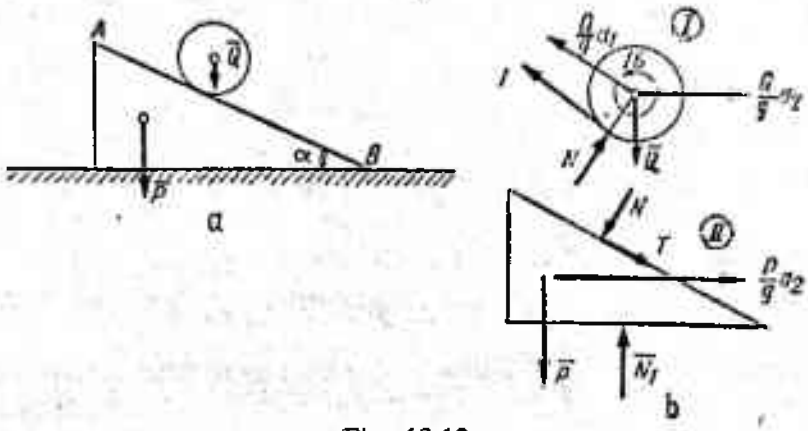


Fig. 18.12

Din ecuaţia a patra avem

$$N = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{Q}{2g} a_1 \cos\alpha + \frac{P}{g} a_2\right]$$

şi primele două ecuaţii devin

$$-3a_1 + 2g\sin\alpha + 2a_2\cos\alpha = 0$$

$$\frac{Q}{2g} a_1 \cos\alpha + \frac{P}{g} a_2 - \frac{1}{2} Q \sin 2\alpha + \frac{Q}{g} a_2 \sin^2\alpha = 0.$$

Dar din prima ecuaţie

$$a_1 = \frac{2}{3}(g\sin\alpha + a_2\cos\alpha),$$

expresia care, introdusă în ultima, duce la

$$a_2\left[\frac{Q\cos^2\alpha}{3g} + \frac{P}{g} + \frac{Q}{g}\sin^2\alpha\right] = \frac{Q}{3}\sin 2\alpha.$$

Rezultă acceleraţia mişcării prismei

$$a_2 = \frac{Q\sin 2\alpha}{3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha} g,$$

iar acceleraţia centrului cilindrului este

$$a_1 = \frac{2}{3}\left[g\sin\alpha + \frac{Q\sin 2\alpha\cos\alpha}{3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha} g\right] = \frac{2g(P+Q)\sin\alpha}{3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha}.$$

18.13. Un scripete mobil, de greutate $\bar{P}$, este susținut de un fir trecut peste un scripete fix O_1, de capătul căruia este suspendată greutatea $\bar{Q}$ (fig. 18.13, *a*). Să se găsească accelerația sistemului și tensiunea firului. (Se va neglija greutatea scripetelui O.)

Rezolvarea. Separăm corpurile și aplicăm principiul lui d'Alembert fiecărui corp în parte. Notăm cu $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$, $\bar{T}_3$ tensiunile din fire, cu $\bar{a}$ accelerația greutății $\bar{Q}$, $\bar{a}_1$ accelerația greutății $\bar{P}$, $\bar{V}_{01}$ reacțiunea din articulația O_1 și cu C_i cuplul de inerție care acționează roata O (fig. 18.13, *b*). Ecuațiile de mișcare sînt

$$Q - \frac{Q}{g} a - T_1 = 0$$

$$V_{O_1} - T_1 - T_2 = 0$$

$$T_2 r - T_1 r = 0$$

$$T_2 + T_3 - P - \frac{P}{g} a_1 = 0$$

$$T_2 r - T_3 r - I_0 \varepsilon = 0.$$

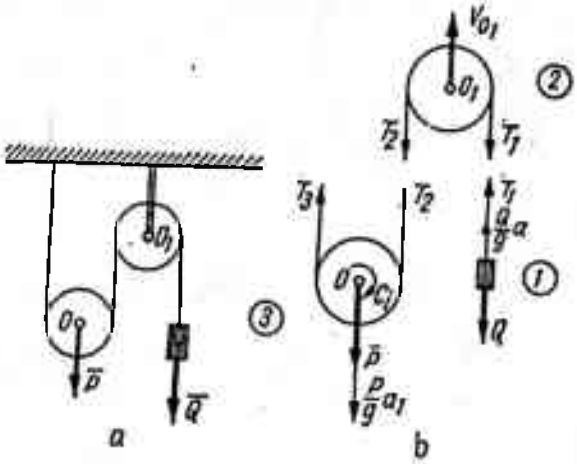


Fig. 18.13

Există în plus relațiile cinematice.

$$a_1 = \frac{a}{2}, \quad \varepsilon = \frac{a}{2r}.$$

Din primele trei ecuații obținem pentru tensiunile T_1, T_2 și pentru reacțiunea V_{O_1} valorile

$$T_1 = T_2 = Q - \frac{Q}{g} a, \quad V_{O_1} = 2\left(Q - \frac{Q}{g} a\right).$$

Din ecuația a patra obținem — ținînd seama de relațiile cinematice — pentru tensiunea T_3 valoarea

$$T_3 = P + \frac{P}{g} \frac{a}{2} - Q + \frac{Q}{g} a.$$

Rezultă în definitiv pentru ecuația a cincea

$$Q - \frac{Q}{g}a - P - \frac{P}{g}\frac{a}{2} + Q - \frac{Q}{g}a - \frac{P}{g}\frac{r^2}{2r}\frac{a}{2r} = 0$$

de unde

$$a = \frac{4g(2Q - P)}{3P + 8Q}.$$

18.14. Două greutăți $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ sînt suspendate la capetele a două fire ce se înfășoară fiecare pe cîte un scripete O și O_1, de raze R și R_1 și mase M și M_1 (fig. 18.14, *a*). Pe scripeții de rază r și masă m, solidari cu scripeții precedenți, se înfășoară un fir de transmisiune. Să se studieze mișcarea sistemului și să se determine tensiunea din firul de transmisiune.

Rezolvare. Notăm: $\bar{a}_1$ accelerația greutății $\bar{Q}$, $\bar{a}_2$ accelerația greutății $\bar{P}$, $\bar{T}$ tensiunea din firul de transmisie, iar $\bar{T}_1$ și $\bar{T}_2$ tensiunile din celelalte două fire.

Scripeții mici avînd aceeași rază r, accelerațiile unghiulare ale discurilor O și O_1 vor fi egale: ε.

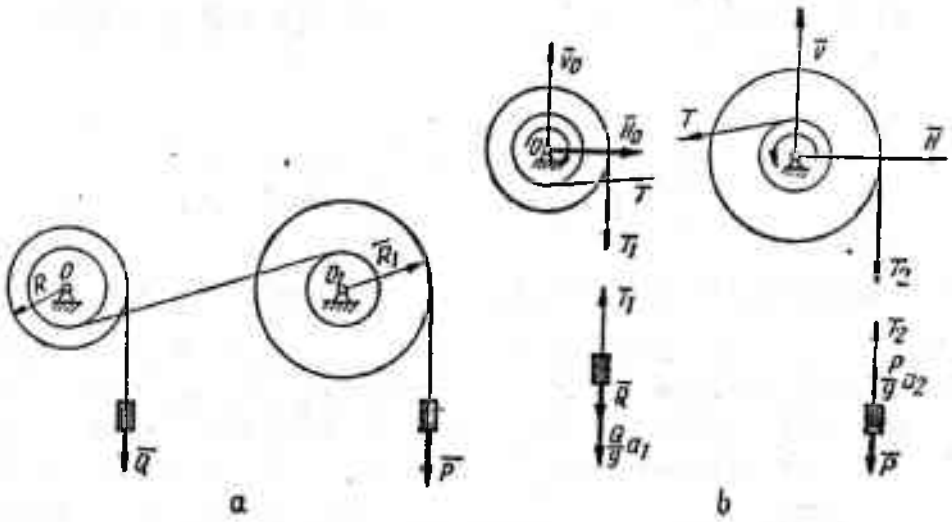


Fig. 18.14

Separăm corpurile (fig. 18.14, *b*) și scriem ecuațiile de echilibru dinamic

$$T_1 - Q - \frac{Q}{g}a_1 = 0$$

$$T_2 + \frac{P}{g}a_2 - P_2 = 0$$

$$Tr - T_1R - \frac{MR^2}{2}\varepsilon - \frac{mr^2}{2}\varepsilon = 0$$

$$\frac{M_1R_1^2}{2}\varepsilon + \frac{mr^2}{2}\varepsilon + Tr - T_2R_1 = 0.$$

Din consideraţii cinematice mai există relaţiile

$$a_2 = R_1\varepsilon, \quad a_1 = R\varepsilon.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinem valorile tensiunilor în funcţie de acceleraţia unghiulară ε sub forma

$$T_1 = Q + \frac{Q}{g} R\varepsilon$$

$$T_2 = P - \frac{P}{g} R_1\varepsilon$$

$$T = \frac{1}{r}\left[\frac{MR^2}{2}\varepsilon + \frac{mr^2}{2}\varepsilon + QR + \frac{Q}{g} R^2\varepsilon\right].$$

Introducînd aceste valori în ecuaţia a patra rezultă

$$\varepsilon\left(\frac{M_1R_1^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + mr^2 + \frac{Q}{g} R^2 + \frac{P}{g} R_1^2\right) = PR_1 - QR$$

sau

$$\varepsilon = \frac{PR_1 - QR}{\frac{M_1R_1^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + mr^2 + \frac{1}{g}(QR^2 + PR_1^2)}.$$

Cu valoarea ε calculată, se determină acceleraţiile greutăţilor P şi Q.

18.15. Sistemul din figura 18.15, *a* este format din doi scripeţi O_1 (fix) şi O_2 (mobil), de greutăţi $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ şi raze R_1, R_2. Scripeţii fiind legaţi între ei printr-un fir ca în figură, se cere să se determine acceleraţiile lor unghiulare, legea de mişcare a centrului de masă O_2 şi tensiunea din fir.

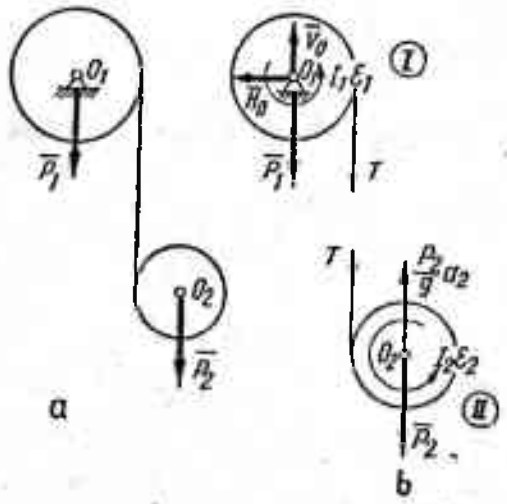


Fig. 18.15

Rezolvare. Separăm corpurile şi aplicăm principiul lui d'Alembert fiecărui corp în parte.

Ecuaţiile de echilibru dinamic pentru cele două corpuri ale sistemului dat sînt

$$H_0 = 0$$

$$V_0 - P_1 - T = 0$$

$$I_1\varepsilon_1 = TR_1 \qquad \text{(a)}$$

$$T + \frac{P_2}{g} a_2 - P_2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$I_2\varepsilon_2 = TR_2.$$

Discul O_2 efectuînd o mişcare plan paralelă există şi relaţia

$$a_2 = R_1\varepsilon_1 + R_2\varepsilon_2. \qquad \text{(c)}$$

Din ultima ecuaţie se obţine

$$T = I_2 \frac{\varepsilon_2}{R_2},$$

care împreună cu (a), (b) şi (c) duc la sistemul de ecuaţii

$$I_2 \frac{\varepsilon_2}{R_2} + \frac{P_2}{g}(R_1\varepsilon_1 + R_2\varepsilon_2) - P_2 = 0$$

$$I_1\varepsilon_1 = I_2 \frac{\varepsilon_2}{R_2} R_1.$$

Ţinînd seama de valorile momentelor de inerţie

$$I_1 = \frac{P_1R_1^2}{2g}, \quad I_2 = \frac{P_2R_2^2}{2g},$$

acceleraţiile unghiulare ε_1 şi ε_2 sînt

$$\varepsilon_1 = \frac{2P_2g}{(3P_1 + 2P_2)R_1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2P_1g}{(3P_1 + 2P_2)R_2}$$

Acceleraţia centrului O_2 are valoarea

$$a_2 = \frac{2P_2g}{(3P_1 + 2P_2)} + \frac{2P_1g}{(3P_1 + 2P_2)} = \frac{2g(P_1 + P_2)}{(3P_1 + 2P_2)},$$

iar legea de mişcare a acestui punct este

$$s = \frac{a_2t^2}{2} = \frac{g(P_1 + P_2)t^2}{3P_1 + 2P_2}.$$

Tensiunea în fir

$$T = I_2 \frac{\varepsilon_2}{R_2} = \frac{P_2R_2^2}{2g} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{2P_1g}{(3P_1 + 2P_2)R_2} = \frac{P_1P_2}{3P_1 + 2P_2}.$$

18.16. O placă, de greutate $\bar{P}$, acţionată de o forţă orizontală $\bar{F}$, este transportată pe două role de greutate $\bar{G}$ şi rază r (fig. 18.16, *a*). Să se studieze mişcarea plăcii cunoscînd coeficientul de frecare la rostogolire s dintre role şi planul orizontal.

Rezolvare. Exprimînd echilibrul dinamic al plăcii obţinem

$$F - \frac{P}{g} a - (F_1 + F_2) = 0$$

$$P_1 + P_2 - P = 0$$

Echilibrul dinamic al rolelor este dat de

$$\Sigma Y_i = N_1 - G - P_1 = 0$$

$$\Sigma M = N_1 s + \frac{G}{g} a_1 r - F_1 2r + \frac{G}{g} \cdot \frac{r^2}{2} \varepsilon = 0;$$

$$\Sigma Y_i = N_2 - G - P_2 = 0$$

$$\Sigma M = N_2 s + \frac{G}{g} a_2 r - F_2 2r + \frac{G}{g} \cdot \frac{r^2}{2} \varepsilon = 0$$

sau

$$a_1 = a_2 = \frac{a}{2}$$

$$N_1 s + \frac{G}{g} \cdot \frac{a}{2} r - F_1 2r + \frac{G}{g} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{a}{2r} = 0$$

$$N_2 s + \frac{G}{g} \cdot \frac{a}{2} r - F_2 2r + \frac{G}{g} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{a}{2r} = 0.$$

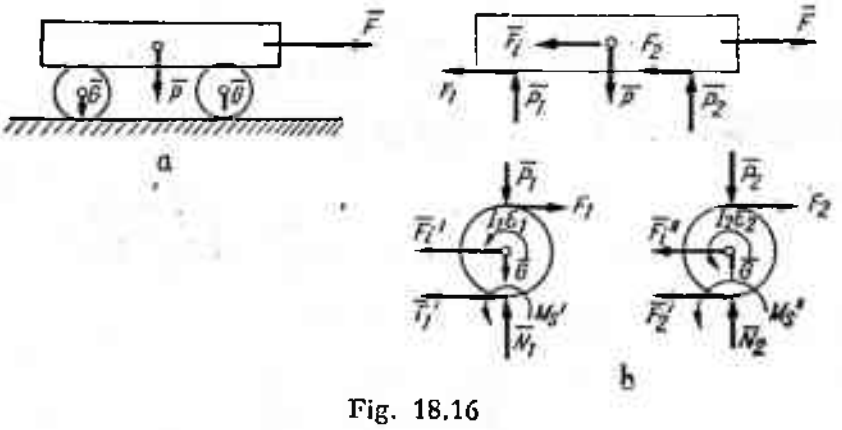


Fig. 18.16

Adunînd ultimele două relaţii obţinem

$$(N_1 + N_2) s + \frac{G}{g} ar - (F_1 + F_2) 2r + \frac{G}{g} \cdot \frac{ar}{2} = 0.$$

Dar

$$F_1 + F_2 = F - \frac{P}{g} a$$

$$N_1 + N_2 = 2G + P$$

deci relația de mai înainte devine

$$(2G + P)\, s + \frac{3}{2} \cdot \frac{G}{g}\, ar - \left(F - \frac{P}{g}\, a\right) 2r = 0$$

sau

$$a\left(\frac{3G}{2g}\, r + \frac{2P}{g}\, r\right) - 2Fr + (2G + P)\, s = 0$$

și

$$a = \frac{4Fr - 2(2G + P)\, s}{(3G + 4P)\, r}\, g.$$

Mișcarea plăcii este uniform accelerată dacă

$$F > \frac{s}{2R}\,(P + 2G).$$

Mișcarea plăcii este uniformă dacă

$$F = \frac{s}{2R}\,(P + 2G).$$

Probleme propuse pentru rezolvare

18.17. Un ax vertical AB se rotește cu viteza unghiulară constantă ω, antrenînd în mișcarea sa două bare OE și OD. Bara OE este înclinată cu unghiul φ față de ax și bara OD perpendiculară pe planul format de ax și bara OE. În punctele D și E se găsesc două mase m (fig. 18.17).

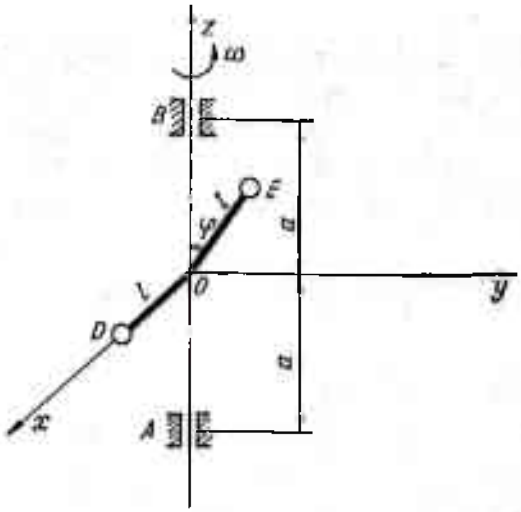


Fig. 18.17

Cunoscînd distanțele $OE = OD = l$ și $AB = 2\,a$ să se determine reacțiunile dinamice din A și B, neglijînd masa barelor.

R. $X_A = \dfrac{ml\omega^2}{2}$

$$Y_A = \frac{ml\omega^2(a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}$$

$$Y_B = \frac{ml\omega^2(a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}.$$

18.18. O pană de greutate $\bar{P}$, avînd unghiul ascuțit α, se sprijină pe un perete vertical și pe o prismă de greutate $\bar{Q}$ (fig. 18.18) Să se determine accelerațiile penei și prismei și reacțiunile, considerînd rezemările perfect lucii.

R. $a_1 = g\,\dfrac{P}{P + Q\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, $a_2 = g\,\dfrac{P\,\mathrm{tg}\,\alpha}{P + Q\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$

$$N_1 = \frac{PQ\sin\alpha\cos\alpha}{P\cos^2\alpha + Q\sin^2\alpha},\quad N_2 = \frac{Q(P + Q\sin^2\alpha)}{P\cos^2\alpha + Q\cos^2\alpha}.$$

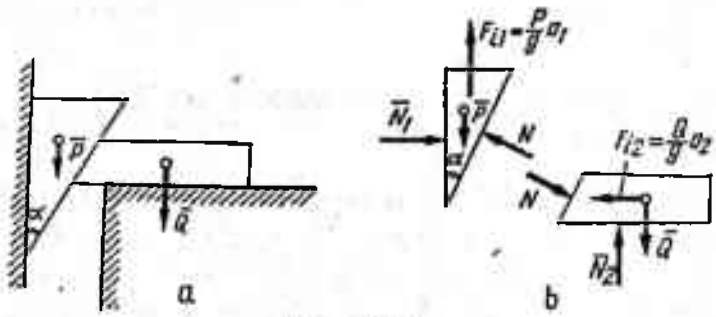


Fig. 18.18

18.19. O bară AB, de lungime l și greutate p(kN/m], este articulată în A și rezemată în C la distanța x de A. La capătul liber B bara are o greutate $\bar{Q}$ (fig. 18.19). Să se determine: a) reacțiunea din A în momentul dispariției reazemului C; b) ce valoare trebuie să aibă x pentru ca reacțiunea din A să fie aceeași ca și cînd reazemul C ar exista.

R. a) $Y_A = pl + Q - \dfrac{3}{4}\,\dfrac{(pl + 2Q)^2}{pl}$

b) $\dfrac{pl(l - 2x)}{2x} + Q\,\dfrac{(l - x)}{x} = Y_A$

$$x = \frac{(pl + 2Q)\,2pl^2}{5p^2l^2 - 12Q^2}.$$

Fig. 18.19

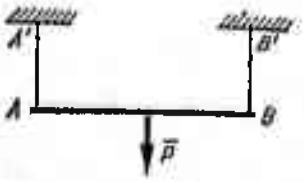


Fig. 18.20

18.20. O bară AB, de greutate $\bar{P}$ se găsește în poziție orizontală fiind suspendată cu ajutorul a două fire verticale AA' și BB' (fig. 18.20). Să se determine tensiunea unui fir în momentul ruperii celuilalt.

R. $T = \frac{P}{4}$.

18.21. Să se studieze mișcarea pe un plan înclinat cu unghiul α a unui cilindru circular omogen, de greutate $\bar{G}$ și rază R (fig. 18.21).

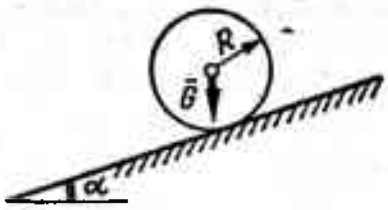


Fig. 18.21

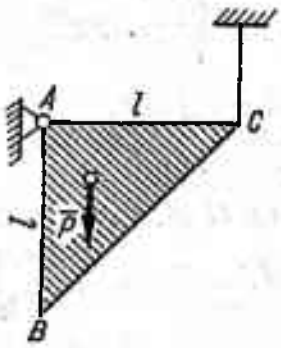


Fig. 18.22

18.22. O placă triunghiulară ABC ($AB = AC = l$) omogenă, de greutate $\bar{P}$, este articulată în A, iar capătul C este suspendat cu un fir astfel încît latura AC este orizontală (fig. 18.22). Dacă la un moment dat se rupe firul din C să se determine reacțiunea din A în acel moment

R. $\varepsilon = \frac{g}{l}$, $H_A = \frac{P}{3}$, $V_A = \frac{2P}{3}$.

18.23. Un disc de rază r și greutate $\bar{P}$ se rotește cu viteză unghiulară constantă ω în jurul unui ax excentric, cu care face un unghi $\varphi = 90° - \alpha$ (fig. 18.23). Cunoscînd $OG = e$ și distanța între reazeme $2a$, să se determine reacțiunile dinamice din A și B.

R. $N_A = \frac{P}{2g}\left[e \cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2a}\left(2e^2 + \frac{r^2}{4}\right)\right]\omega^2$

$N_B = \frac{P}{2g}\left[e \cos \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2a}\left(2e^2 + \frac{r^2}{4}\right)\right]\omega^2$.

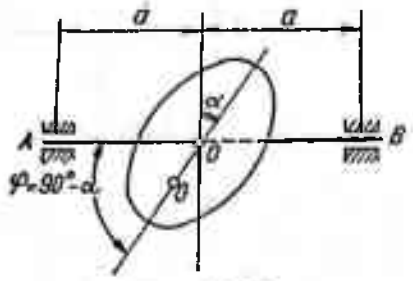


Fig. 18.23

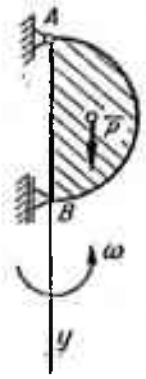


Fig. 18.24

18.24. O placă semicirculară, omogenă, de rază R și greutate $\bar{P}$ se află într-un plan vertical. Placa este articulată în A, simplu rezemată în B și se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul axei Ay (fig. 18.24). Să se determine $\bar{\omega}$ pentru care reacțiunea din B se anulează.

R. $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$.

18.25. Un cilindru circular drept, de greutate $\bar{P}$, lungime $2l$ și rază r se rotește cu o viteză unghiulară constantă $\bar{\omega}$ în jurul unei axe Oz, care trece prin centrul de greutate. Axa Oz face cu axa cilindrului un unghi α (fig. 18.25). Cunoscînd distanța $A_1A_2 = h$ să se determine reacțiunile H_1 și H_2.

R. $H_1 = H_2 = P\frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{2gh}\left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right)$.

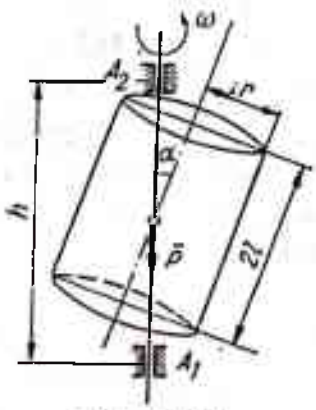


Fig. 18.25

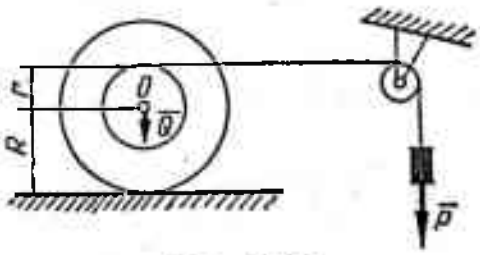


Fig. 18.26

18.26. Să se determine accelerația greutății $\bar{P}$ din fig. 18.26. Sistemul este format din două discuri coaxiale, de raze r și R și greutate totală $\bar{Q}$, care se reazemă pe un plan orizontal. Pe discul de rază r este înfășurat un fir, la capătul căruia atîrnă greutatea $\bar{P}$.

Discul O se rostogolește fără alunecare pe planul orizontal, iar raza de inerție a discurilor față de centrul O este ρ.

R. $a = g\frac{P(R+r)^2}{Q(\rho^2 + R^2) + P(R+r)^2}$.

XIX. PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

Noţiuni şi formule de bază

Obiectul capitolului este studiul echilibrului static şi dinamic al sistemelor de corpuri sub acţiunea forţelor aplicate.

Principiul lucrului mecanic virtual. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un sistem de forţe aplicate unui sistem de puncte materiale să fie în echilibru, ţinînd seama de sistemul de legături, este ca lucrul mecanic virtual al forţelor aplicate parcurgînd deplasări imaginate, infinit mici, produse în punctul de aplicaţie al forţelor, să fie nul pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile sistemului de puncte, dacă legăturile nu comportă frecare

$$\delta L = \Sigma \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = \Sigma(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0.$$

În cazul sistemelor de puncte supuse numai acţiunii greutăţii proprii, principiul lucrului mecanic virtual are forma *teoremei lui Torricelli:* condiţia necesară şi suficientă ca un sistem de puncte materiale supuse acţiunii greutăţii proprii să fie în echilibru cu legăturile este ca variaţia virtuală a cotei centrului de greutate să fie nulă

$$\delta z_G = 0.$$

Principiul lucrului mecanic virtual este aplicabil şi în cazul sistemelor de puncte în mişcare, cînd în afara forţelor aplicate, trebuie introduse în calcule şi forţele de inerţie

$$\delta L = \Sigma(\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i)\, \delta \bar{r}_i = 0.$$

Altă formă a acestui principiu o constituie metoda vitezelor virtuale, în care caz, în locul deplasărilor virtuale se lucrează cu vitezele virtuale $\bar{v} = \frac{\delta \bar{r}}{\delta t}$. În acest caz avem

$$\frac{\delta L}{\delta t} = \Sigma \bar{F}_i \bar{v}_i = \Sigma(X_i v_{x_i} + Y_i v_{y_i} + Z_i v_{z_i}) = 0.$$

Acest principiu are aplicaţii deosebit de utile pentru practică şi la determinarea forţelor de legătură din legăturile exterioare sau interioare ale sistemelor de puncte materiale. Metoda de lucru constă în suprimarea legăturii şi înlocuirea ei cu forţa de legătură corespunzătoare, care apare acum ca o necunoscută a problemei. Cu ajutorul unei condiţii de tipul primei relaţii se determină reacţiunea căutată.

Probleme rezolvate

19.1. Să se determine poziția de echilibru a unui punct material M de greutate $\bar{G}$, care se află pe periferia unui cerc de rază R și este atras de capătul superior A al diametrului vertical al cercului cu o forță constantă $\bar{F}$ (fig. 19.1).

Rezolvare. Forțele care acționează asupra punctului M sînt

$$\bar{G} = G\bar{j}$$

$$\bar{F} = F \sin \alpha \bar{i} - F \cos \alpha \bar{j}. \tag{1}$$

Coordonatele punctului M au expresia

$$x_M = -2R \cos \alpha \sin \alpha$$

$$y_M = 2R \cos^2 \alpha. \tag{2}$$

Condiția de echilibru a punctului M este

$$\delta L = X \delta x_M + Y \delta x_M = 0, \tag{3}$$

unde

$$\delta x_M = -2R \cos 2\alpha \cdot \delta a$$

$$\delta y_M = -4 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \delta \alpha = -2R \sin 2\alpha \cdot \delta a,$$

astfel că rezultă

$$F \sin \alpha \cdot (-2R \cos 2\alpha \cdot \delta \alpha) + (G - F \cos \alpha) \times (-2R \sin 2\alpha \cdot \delta \alpha) = 0$$

sau

$$F \sin \alpha = 2G \sin \alpha \cos \alpha.$$

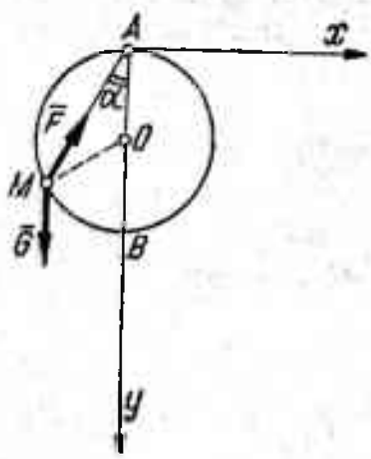


Fig. 19.1

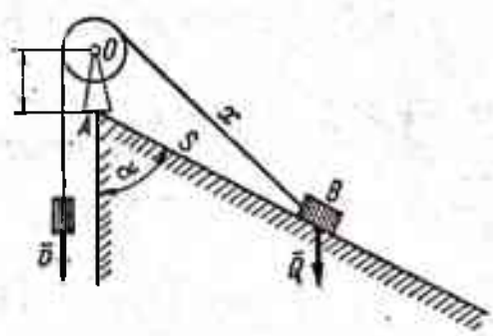


Fig. 19.2

Pentru poziția de echilibru

$$\cos \alpha = \frac{F}{2G}.$$

Echilibrul este posibil dacă există relația $F \leqslant 2G$.

19.2. Două greutăţi inegale $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$ sînt legate de capetele unui fir trecut (fără frecare) peste scripetele O, astfel încît greutatea Q alunecă pe un plan înclinat, iar greutatea $\bar{P}$ cade după verticală (fig. 19.2).

Să se determine poziţia de echilibru a sistemului.

Rezolvare. Condiţia de echilibru a sistemului este

$$-P\delta x + Q\cos\alpha\delta s = 0.$$

În triunghiul OAB există relaţia

$$x^2 = s^2 + a^2 + 2sa\cos\alpha,$$

de unde

$$2x\cdot\delta x = 2s\cdot\delta s + 2a\cdot\delta s\cos\alpha = 2\delta s(s + a\cos\alpha)$$

sau

$$\delta x = \frac{\delta s(s + a\cos\alpha)}{\sqrt{a^2 + s^2 + 2as\cos\alpha}}.$$

Condiţia de echilibru devine

$$-P\frac{\delta s(s + a\cos\alpha)}{\sqrt{a^2 + s^2 + 2a\,s\cos\alpha}} + Q\cos\alpha\cdot\delta s = 0$$

sau

$$+P^2(s^2 + a^2\cos^2\alpha + 2as\cos\alpha) = Q^2\cos^2\alpha(a^2 + s^2 + 2as\cos\alpha).$$

Ordonînd ecuaţia după puterile lui s, obţinem

$$s^2 + 2a\cos\alpha\cdot\delta s + \frac{a^2\cos^2\alpha(P^2 - Q^2)}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha} = 0$$

ale cărei soluţii sînt date de

$$s = -a\cos\alpha \pm \sqrt{a^2\cos^2\alpha - \frac{a^2\cos^2\alpha(P^2 - Q^2)}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha}} =$$

$$= a\cos\alpha\left[-1 \pm Q\sin\alpha\sqrt{\frac{1}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha}}\right].$$

Sistemul va fi în echilibru pentru valoarea pozitivă a radicalului

$$s = a\cos\alpha\left(-1 + \frac{Q\sin\alpha}{\sqrt{P^2 - Q^2\cos^2\alpha}}\right).$$

19.3. Un colţar ABC, de laturi $AB = a$ şi $BC = b$, formînd un unghi ABC de 90°, este suspendat în A (fig. 19.3). Se cere unghiul α dintre bara AB şi axa orizontală Ox, pentru poziţia de echilibru a colţarului, dacă barele cîntăresc p kgf/m.

Rezolvare. Bara ABC fiind supusă numai acţiunii greutăţii proprii, condiţia de echilibru este

$$pa\cdot\delta y_{M_1} + pb\delta y_{M_2} = 0,$$

unde

$$y_{M_1} = \frac{a}{2} \sin \alpha$$

$$y_{M_2} = a \sin \alpha + \frac{b}{2} \cos \alpha,$$

iar

$$\delta y_{M_1} = \frac{a}{2} \cos \alpha \cdot \delta a$$

$$\delta y_{M_2} = a \cos \alpha \cdot \delta \alpha - \frac{b}{2} \sin \alpha \cdot \delta \alpha.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația de echilibru, obținem

$$pa \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha \cdot \delta \alpha + pb \cdot a \cos \alpha \cdot \delta \alpha - pb \cdot \frac{b}{2} \sin \alpha \cdot \delta \alpha = 0$$

sau

$$\frac{a^2}{2} \cos \alpha + ab \cos \alpha - \frac{b^2}{2} \sin \alpha = 0.$$

Condiția de echilibru este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{b^2} \left(\frac{a^2}{2} + ab \right).$$

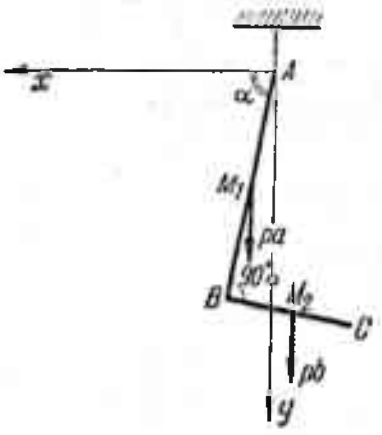


Fig. 19.3

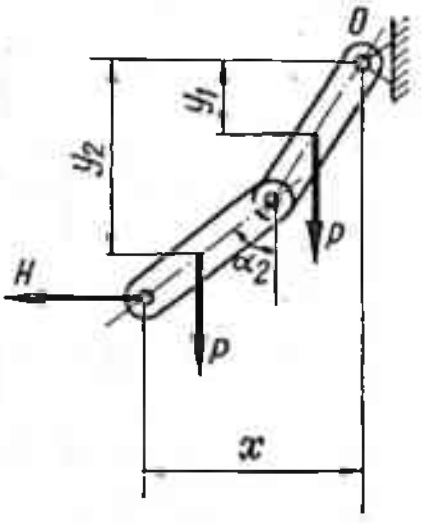


Fig. 19.4

19.4. Un dispozitiv format din 2 bare de lungime l și de greutate P este suspendat în O și acționat de o forță orizontală H în B (fig. 19.4) Să se afle unghiurile α_1 și α_2 pentru poziția de echilibru.

Rezolvare. Se observă că:

$$y_1 = \frac{l}{2}\cos\alpha_1$$

$$y_2 = l\left(\cos\alpha_1 + \frac{1}{2}\cos\alpha_2\right)$$

$$x = l(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2).$$

Aplicînd principiul deplasărilor virtuale avem:

$$H\delta x + P\delta y_1 + P\delta y_2 = 0.$$

Făcînd înlocuirile necesare găsim:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2H}{3P}; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2H}{P}.$$

19.5. O tijă ABC, de lungime $2l$ și greutate P, se reazemă fără frecare pe o suprafață semisferică (fig. 19.5). Să se determine poziția de echilibru a tijei dată de unghiul α dintre bară și diametrul din planul tijei al cercului de bază al semisferei.

Rezolvare. Aplicăm teorema lui Torricelli. Condiția de echilibru este

$$\delta z_G = 0,$$

unde

$$z_G = (2R\cos\alpha - l)\sin\alpha$$

$$\delta z_G = 2R\cos 2\alpha\cdot\delta\alpha - l\cos\alpha\cdot\delta\alpha,$$

deci

$$2R\cos 2\alpha\cdot\delta\alpha - l\cos\alpha\cdot\delta\alpha = 0$$

sau

$$2R\cos^2\alpha - 2R(1-\cos^2\alpha) - l\cos\alpha = 0.$$

Ordonînd ecuația după puterile lui $\cos\alpha$, obținem

$$4R\cos^2\alpha - l\cos\alpha - 2R = 0.$$

Soluția problemei este

$$\cos\alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu semnul (+) în faţa radicalului. În afară de aceasta, trebuie să mai fie respectată şi condiţia

$$l + \sqrt{l^2 + 32R^2} < 8R,$$

respectiv

$$l < 2R.$$

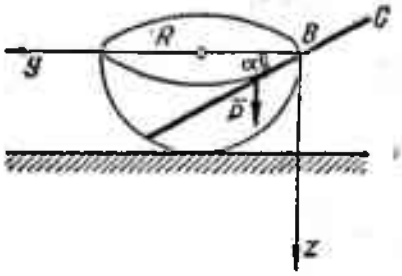


Fig. 19.5

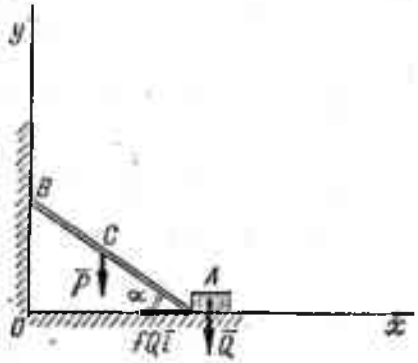


Fig. 19.6

19.6. O bară AB, de lungime $2l$ şi greutate $\bar{P}$, se reazemă fără frecare pe un perete vertical şi pe un plan orizontal (fig. 19.6). Pentru a realiza echilibrul barei sub unghiul α faţă de orizontală, se pune în A o greutate, $\bar{Q}$ avînd coeficientul de frecare f cu planul orizontal. Cît trebuie să fie de mare coeficientul de frecare f dintre greutate şi plan pentru ca bara să fie în echilibru ?

Rezolvare. Punctele de aplicaţie ale forţelor exterioare sînt:

$$A(2l\cos\alpha,\ 0),\quad C(l\cos\alpha,\ l\sin\alpha),$$

iar forţele exterioare au expresiile

$$\bar{P} = -P\bar{j},\quad \bar{Q} = -Q\bar{j},\quad \bar{F} = -fQ\bar{i}.$$

Condiţia de echilibru este

$$\delta L = 0$$

sau

$$-P\cdot\delta(l\sin\alpha) - fQ\cdot\delta(2l\cos\alpha) = 0,$$

respectiv

$$-Pl\cos\alpha\cdot\delta\alpha + 2fQl\sin\alpha\cdot\delta\alpha = 0.$$

Rezultă pentru coeficientul de frecare f valoarea

$$f = \frac{P}{2Q}\operatorname{cotg}\alpha.$$

19.7. Să se determine condiția de echilibru a sistemului piston-bielă-manivelă din figura 19.7.

Rezolvare. Condiția de echilibru se realizează între forțele care apasă asupra pistonului (rezultanta lor $\bar{P}$) și forța $\bar{Q}$ care acționează manivela și este dată de relația

$$P \cdot \delta x = Qr \cdot \delta\theta,$$

unde $x = -(l \cos \alpha + r \cos \theta)$ și

$$\delta x = l \sin \alpha \cdot \delta\alpha + r \sin \theta \cdot \delta\theta.$$

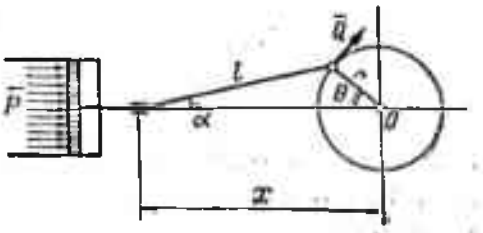


Fig. 19.7

Între cele două unghiuri α și θ există relația

$$l \sin \alpha = r \sin \theta;$$

deci

$$\delta\alpha = \frac{r \cos \theta \cdot \delta\theta}{l \cos \alpha}.$$

Obținem relația de echilibru sub forma

$$P\left(l \sin \alpha \frac{r \cos \theta \cdot \delta\theta}{l \cos \alpha} + r \sin \theta \cdot \delta\theta\right) = Qr \cdot \delta\theta$$

sau

$$Q = P \sin \theta \left[1 + \frac{r \cos \theta}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}}\right].$$

19.8. O bară AB, de lungime $2l$ și greutate $\bar{P}$, se reazemă fără frecare cu un capăt pe planul orizontal xOy și cu celălalt capăt pe verticala Oz (fig. 19.8).

De capătul A sînt legate două fire, trecute peste scripeții C și D și avînd la capete greutățile $\bar{Q}_1$ și $\bar{Q}_2$. Direcțiile AC și AD rămîn necontenit paralele cu axele Oy și Ox. Să se determine condiția de echilibru a sistemului.

Rezolvare. Forțele care acționează sistemului sînt

$$\bar{P} = -P\bar{k}, \quad \bar{Q}_1 = -Q_1\bar{i}, \quad \bar{Q}_2 = -Q_2\bar{j}.$$

Condiția de echilibru a sistemului este

$$-P \cdot \delta z_G - Q_1 \cdot \delta x_A - Q_2 \cdot \delta y_A = 0,$$

unde

$$z_G = l \cos \varphi, \quad \delta z_G = -l \sin \varphi \cdot \delta\varphi$$

$$x_A = 2l \sin \varphi \sin \theta, \quad \delta x_A = 2l (\cos \varphi \sin \theta \cdot \delta\varphi + \sin \varphi \cos \theta \delta\theta)$$

$$y_A = 2l \sin \varphi \cos \theta, \quad \delta y_A = 2l(\cos \varphi \cos \theta \cdot \delta\varphi - \sin \varphi \sin \theta \cdot \delta\theta).$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de echilibru devine

$$+ Pl \sin\varphi \cdot \delta\varphi - Q_1 \cdot 2l(\cos\varphi \sin\theta \cdot \delta\varphi + \sin\varphi \cos\theta \cdot \delta\theta) -$$
$$- Q_2 \cdot 2l(\cos\varphi \cos\theta \cdot \delta\varphi - \sin\varphi \sin\theta \cdot \delta\theta) = 0$$

sau

$$\delta\varphi(+ P \sin\varphi - 2Q_1 \cos\varphi \sin\theta - 2Q_2 \cos\varphi \cos\theta) +$$
$$+ \delta\theta(-2Q_1 \sin\varphi \cos\theta + 2Q_2 \sin\varphi \sin\theta) = 0.$$

Pentru ca această ecuație să fie satisfăcută, trebuie ca parantezele cu care se multiplică deplasările virtuale $\delta\varphi$ și $\delta\theta$ să fie nule. Rezultă condiția de echilibru

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}{P}.$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

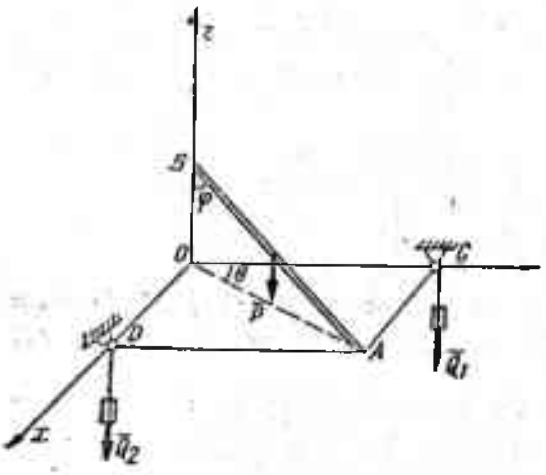


Fig. 19.8

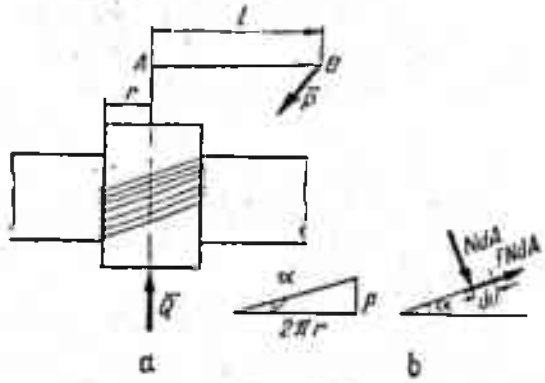


Fig. 19.9

19.9. Să se deducă condiția de echilibru a șurubului (fig. 19.9,*a*) fără și cu frecare.

Rezolvare. Notăm cu r raza șurubului, p pasul șurubului, l lungimea pîrghiei la capătul căreia se aplică forța motoare $\bar{P}$ și cu $\bar{Q}$ forța rezistentă.

a) *Echilibrul fără frecare.*

Condiția de echilibru este

$$Pl \cdot \delta\theta - Q \cdot \delta h = 0.$$

Dar

$$\delta h = \frac{p}{2\pi}\,\delta\theta = r \operatorname{tg}\alpha\,\delta\theta,$$

deci

$$Pl \cdot \delta\theta - Q \cdot r \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta\theta = 0$$

sau

$$P = Q \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{l}.$$

b) *Echilibrul cu frecare* (fig. 19.9, *b*). Deplasările virtuale necesare în problemă sînt

$$\delta h = r \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta\theta$$

$$\delta u = \frac{1}{\cos \alpha} r \cdot \delta\theta.$$

Condiţia de echilibru este

$$Pl \cdot \delta\theta - Q \cdot \delta h - f \Sigma N_i \, dA_i \cdot \delta u = 0.$$

Dintr-o deplasare virtuală pe direcţia lui Q obţinem

$$\Sigma N_i \, dA_i = \frac{Q}{\cos \alpha - f \sin \alpha}.$$

Rezultă

$$Pl \cdot \delta\theta - Qr \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta\theta - f \frac{Q}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \cdot \frac{r \cdot \delta\theta}{\cos \alpha} = 0,$$

de unde

$$\frac{Pl}{Qr} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{f}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} (\alpha + \varphi).$$

Condiţia de echilibru limită a şurubului este deci

$$P = Q \frac{r}{l} \operatorname{tg} (\alpha + \varphi).$$

Presupunînd că echilibrul se menţine tot la limită, dar mişcarea este gata să se producă în sens invers, relaţia devine

$$P' = Q \frac{r}{l} \operatorname{tg} (\alpha - \varphi).$$

În cazul $\alpha > \varphi$, şurubul se deşurubează, dacă forţa ce se aplică braţului AB scade sub P'.

Pentru $\alpha < \varphi$, P' devine negativ şi deci şurubul rămîne strîns, chiar dacă lăsăm braţul AB liber ($P = 0$) — autofixare.

Scanned with OKEN Scanner

19.10. Două bare egale $AB = BC = 2l$, de greutate P fiecare, articulate în punctul fix A și între ele în B, sînt acționate de o forță orizontală $\bar{Q}$ aplicată în B (fig. 19.10). Capătul C alunecă fără frecare pe verticala Ax. Să se determine poziția de echilibru a sistemului.

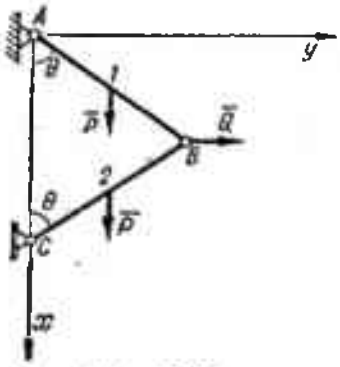


Fig. 19.10

Rezolvare. Forțele care acționează sistemul sînt

$$\bar{Q} = \bar{Q}j, \qquad \bar{P} = P\bar{i},$$

iar coordonatele punctelor lor de aplicație

$$x_1 = l\cos\theta, \quad y_1 = l\sin\theta$$

$$x_2 = 3l\cos\theta, \quad y_2 = l\sin\theta$$

$$x_B = 2l\cos\theta, \quad y_B = 2l\sin\theta.$$

Condiția de echilibru este

$$\delta L = P\cdot\delta x_1 + P\cdot\delta x_2 + Q\cdot\delta y_B = 0,$$

unde

$$\delta x_1 = -l\sin\theta\cdot\delta\theta$$

$$\delta x_2 = -3l\sin\theta\cdot\delta\theta$$

$$\delta y_B = 2l\cos\theta\cdot\delta\theta,$$

deci

$$-Pl\sin\theta\cdot\delta\theta - P\cdot 3l\sin\theta\cdot\delta\theta + Q\cdot 2l\cos\theta\cdot\delta\theta = 0$$

satisfăcută pentru

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Q}{2P}.$$

19.11. Să se determine condiția de echilibru pentru sistemul de trei bare O_1A, BC, CO_2 din figura 19.11, acționat ca în figură de forțele $\bar{Q}$, $\bar{P}$ și de cuplul de moment $\bar{M}$. Se cunosc: $O_1B = b$, $O_2C = c$, $AB = a$, $BC = d$.

Rezolvare. Condiția de echilibru pentru sistem este:

$$\frac{\delta L}{\delta t} = \Sigma\bar{F}_i\bar{v}_i = \bar{Q}\cdot\bar{v}_A + \bar{P}\cdot\bar{v}_B + \bar{M}\bar{\omega} = 0.$$

Dînd o deplasare virtuală (rotire ω) barei O_2C, bara BC execută o mișcare plan-paralelă. Centrul instantaneu de rotație se găsește la intersecția barelor O_2C și O_1A. În triunghiul IBC există relațiile

$$IB\cos\alpha + IC\cos\beta = d$$

$$IB\sin\alpha = IC\sin\beta,$$

de unde

$$IC = d\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$IB = \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

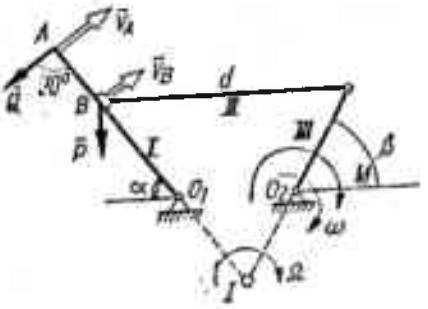


Fig. 19.11

Viteza de rotaţie instantanee Ω se obţine din observaţia că punctul C aparţine atît barei O_2C (care are o mişcare de rotaţie), cît şi barei BC (care are o mişcare plan-paralelă).

$$v_C = \omega \cdot c = d\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\,\Omega,$$

deci

$$\Omega = \frac{c\sin(\alpha+\beta)}{d\sin\alpha}\,\omega;$$

atunci

$$v_B = IB\cdot\Omega = \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{c\sin(\alpha+\beta)}{d\sin\alpha}\,\omega = \frac{c\sin\beta}{\sin\alpha}\,\omega$$

$$v_A = \left[a + \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right]\cdot\frac{c\sin(\alpha+\beta)}{d\sin\alpha}\,\omega = \frac{\omega c}{\sin\alpha}\left[\frac{a}{d}\sin(\alpha+\beta) + \sin\beta\right].$$

Condiţia de echilibru devine

$$-Q\,\frac{\omega c}{\sin\alpha}\left[\frac{a}{d}\sin(\alpha+\beta) + \sin\beta\right] - P\cos\alpha\cdot\frac{c\sin\beta}{\sin\alpha}\,\omega + M\omega = 0$$

sau

$$M = \frac{c}{\sin\alpha}\left\{Q\left[\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{d} + \sin\beta\right] + P\sin\beta\cos\alpha\right\}.$$

19.12. Mecanismul din figura 19.12 este alcătuit din trei bare articulate între ele: AB, BC şi bara cotită CD. Barele AB şi CD sînt articulate în O_1 şi O_2. Sistemul este în echilibru în poziţia din figură sub acţiunea forţelor $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$. Care este relaţia dintre aceste două forţe pentru poziţia de echilibru a mecanismului? Se cunosc: $O_1B = r_1$, $O_2C = r_2$, unghiurile φ_1 φ_2 şi distanţele h şi H.

Rezolvare. Condiţia de echilibru pentru sistem este

$$\frac{\delta L}{\delta t} = \Sigma F_i v_i = 0.$$

Dînd o deplasare virtuală sistemului (rotire cu viteză unghiulară ω_0 a barei cotite CO_2D) vitezele punctelor de aplicaţie ale forţelor vor fi

$$\bar{v}_D = \omega_0 |\overline{O_2D}| \sin\alpha \cdot \bar{i} + \omega_0 |\overline{O_2D}| \cos\alpha \cdot \bar{j} = \omega_0 |\overline{O_2D}| \sin\alpha \cdot \bar{i} + \omega_0 H \bar{j}$$

$$\bar{v}_A = \frac{h}{\sin\varphi_1}\omega_1(\sin\varphi_1 \cdot \bar{i} - \cos\varphi_1 \cdot \bar{j}).$$

Între ω_0 şi ω_1 se poate stabili o legătură, ţinînd seama că exista relaţia,

$$v_C^{BC} = v_B^{BC}$$

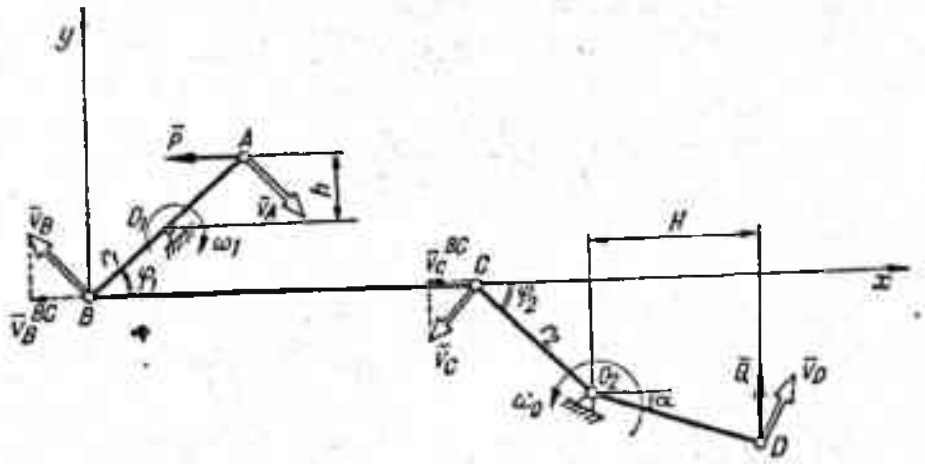


Fig. 19.12

Vitezele punctelor B şi C sînt

$$v_B = r_1\omega_1, \quad v_C = r_2\omega_0,$$

astfel încît

$$v_C^{BC} = v_B^{BC} = r_2\omega_0 \sin\varphi_2 = r_1\omega_1 \sin\varphi_1.$$

Rezultă

$$\omega_1 = \frac{r_2\,\omega_0 \sin\varphi_2}{r_1 \sin\varphi_1}$$

şi se obţine pentru viteza punctului A expresia

$$\bar{v}_A = \frac{h r_2 \omega_0 \sin\varphi_2}{r_1 \sin^2\varphi_1}(\sin\varphi_1 \cdot \bar{i} - \cos\varphi_1 \cdot \bar{j}).$$

Forţele care acţionează asupra sistemului sînt

$$\bar{P} = -\bar{P}\bar{i}, \quad \bar{Q} = \bar{Q}\bar{j}.$$

Condiţia de echilibru devine

$$-P \cdot \frac{h r_2 \omega_0 \sin\varphi_2}{r_1 \sin\varphi_1} + Q \cdot \omega_0 H = 0.$$

Rezultă valoarea lui P corespunzătoare echilibrului sistemului sub forma

$$P = Q\,\frac{r_1 H \sin\varphi_1}{r_2 h \sin\varphi_2}.$$

19.13. Să se determine reacţiunile din încastrarea A a stîlpului AB din figura 19.13, *a*. Stîlpul are înălţimea h şi este acţionat de o forţă orizontală P în capătul său şi de o forţă verticală P în capătul unei console de lungime a care se găseşte la jumătatea înălţimii AB.

Rezolvare. Se suprimă pe rînd legăturile din încastrarea A şi se înlocuiesc cu forţe de legătură corespunzătoare. Se dau apoi deplasări virtuale compatibile cu legăturile rămase figura 19.13, *b*, *c* şi *d*.

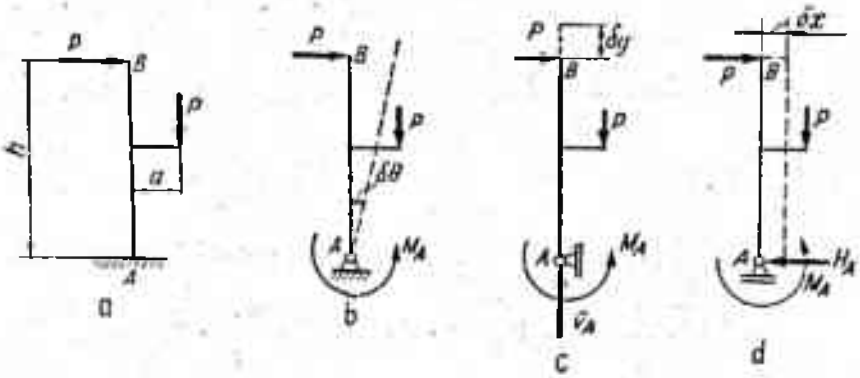


Fig. 19.13

Rezolvare. Condiţiile de echilibru pentru fiecare din cele trei cazuri sînt:

a) $Ph \cdot \delta\theta + Pa \cdot \delta\theta - M_A \cdot \delta\theta = 0$;

b) $V_A \cdot \delta y - P \cdot \delta y = 0$;

c) $P \cdot \delta x - H_A \cdot \delta x = 0$.

Rezultă valorile reacţiunilor din încastrarea A

$$M_A = Ph + Pa, \quad V_A = P, \quad H_A = P.$$

19.14. Să se determine reacţiunile din reazemele A, B şi D ale grinzi din figura 19.14, *a*.

Rezolvare. Se suprimă legătura geometrică din punctul A înlocuindu-se cu forţa de legătură corespunzătoare. Se dă o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile rămase (fig. 19.14, *b*).

Condiţia de echilibru $\delta L = 0$ are forma

$$V_A \cdot l \cdot \delta\theta - 2P \cdot \frac{3l}{4}\,\delta\theta + 2P \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{\delta\theta}{2} - P \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{\delta\theta}{2} = 0.$$

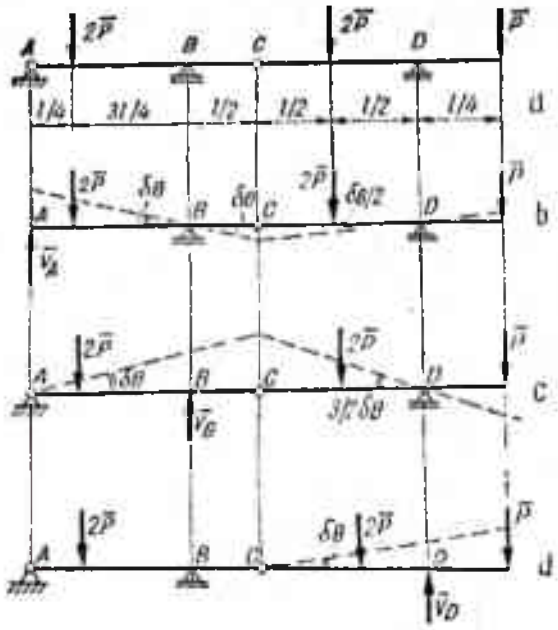


Fig. 19.14

Se obţine

$$V_A = \frac{3P}{2} - \frac{P}{2} + \frac{P}{8} = \frac{9P}{8}.$$

Pentru reacţiunile din reazemele B şi D se procedează în mod analog.

Pentru reacţiunea din B (fig. 19.14, c) condiţia de echilibru este

$$-2P \cdot \frac{l}{4}\,\delta\theta + V_B \cdot l \cdot \delta\theta -$$

$$-2P \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \delta\theta + P \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \delta\theta = 0.$$

Valoarea reacţiunii este

$$V_B = \frac{P}{2} + \frac{3P}{2} - \frac{3P}{8} = \frac{13P}{8}.$$

Pentru reacţiunea din D (fig. 19.14, d) condiţia de echilibru este

$$-2P \cdot \frac{l}{2}\,\delta\theta + V_D \cdot l \cdot \delta\theta - P \cdot \frac{5 \cdot l}{4} \cdot \delta\theta = 0.$$

Rezultă

$$V_D = P + \frac{5P}{4} = \frac{9P}{4}.$$

19.15. Să se determine reacţiunile şi eforturile din barele sistemului articulat din figura 19.15, acţionat în punctul 4 de forţa verticală $\overline{P}$.

Rezolvare. Pentru determinarea reacţiunilor din reazemul 5 sau a eforturilor din bare se suprimă legăturile respective şi se înlocuiesc cu forţe de legătură corespunzătoare. Se dă sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile rămase şi se scrie condiţia de echilibru $\delta L = 0$

— pentru reacţiunea din reazemul 5 (fig. 19.15, a)

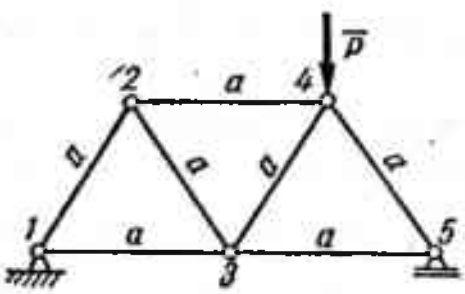


Fig. 19.15

$$V_5 \cdot 2a \cdot \delta\theta - P \cdot \frac{3a}{2} \cdot \delta\theta = 0;$$

rezultă

$$V_5 = \frac{3}{4} P;$$

— pentru reacţiunea din reazemul 1 (fig. 19.15, b).

$$V_1 \cdot 2a \cdot \delta\theta - P \cdot \frac{a}{2} \cdot \delta\theta = 0;$$

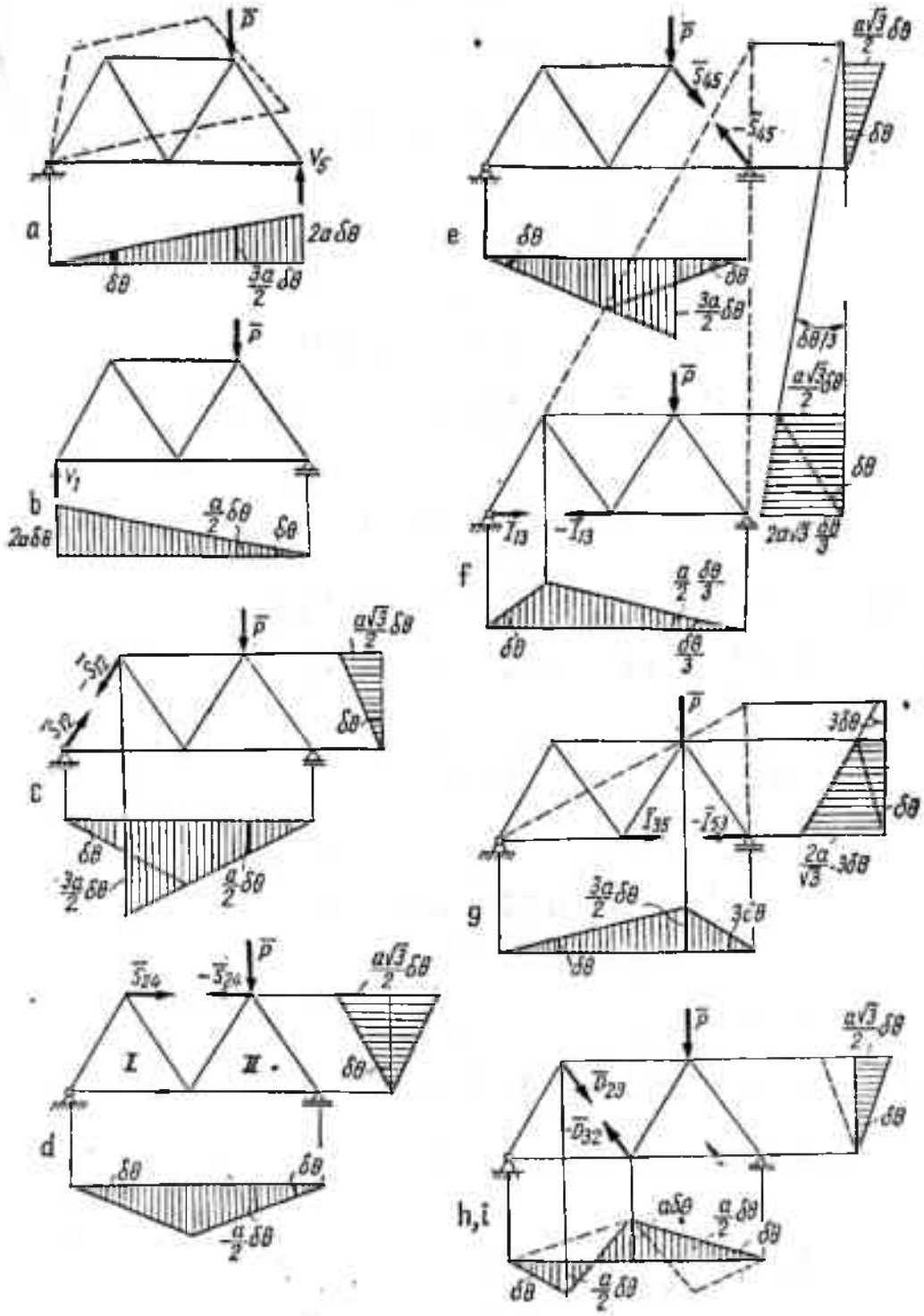


Fig. 19.15

rezultă

$$V_1 = \frac{P}{4},$$

— pentru efortul din bara 1—2 (fig. 19.15, *c*)

$$S_{12}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\delta\theta + P\cdot\frac{a}{2}\cdot\delta\theta + S_{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\delta\theta = 0;$$

rezultă

$$S_{12} = -\frac{P}{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{P}{2\sqrt{3}} \text{ (compresiune)};$$

— pentru efortul din bara 2—4 (fig. 19.15, *d*)

$$S_{24}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\delta\theta + S_{24}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\delta\theta + P\cdot\frac{a}{2}\cdot\delta\theta = 0,$$

de unde

$$S_{24} = -\frac{P}{2\sqrt{3}} \text{ (compresiune)};$$

— pentru efortul din bara 4—5 (fig. 19.15, *e*)

$$S_{45}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\delta\theta + P\cdot\frac{3a}{2}\cdot\delta\theta + S_{45}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\delta\theta = 0;$$

efortul S_{45} este

$$S_{45} = -\frac{3P}{2\sqrt{3}} \text{ (compresiune)};$$

— pentru efortul din bara 1—3 (fig. 19.15, *f*)

$$P\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\delta\theta}{3} - I_{13}\cdot 2a\sqrt{3}\cdot\frac{\delta\theta}{3} = 0;$$

rezultă

$$I_{13} = \frac{P}{4\sqrt{3}};$$

— pentru efortul din bara 3—5 (fig. 19.15, *g*)

$$-P\cdot\frac{a}{2}\cdot 3\cdot\delta\theta + I_{35}\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot 3\cdot\delta\theta = 0,$$

de unde

$$I_{35} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}P = \frac{\sqrt{3}}{4}P;$$

— pentru efortul din bara 2—3 (fig. 19.15, *h*)

$$-P\frac{a\cdot\delta\theta}{2} + D_{23}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot\delta\theta + D_{23}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\delta\theta + D_{23}\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\delta\theta = 0$$

efortul căutat este

$$D_{23} = \frac{P}{2\sqrt{3}};$$

— pentru efortul din bara 3—4 (fig. 19.15, *i*)

$$P \cdot \frac{a}{2} \cdot \delta\theta + D_{34} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \delta\theta + D_{34} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \delta\theta + D_{34} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \delta\theta = 0,$$

de unde

$$D_{34} = -\frac{P}{2\sqrt{3}} \text{ (compresiune).}$$

19.16. O greutate $\bar{P}$ se deplasează pe un plan luciu, înclinat cu unghiul α față de orizontală (fig. 19.16). Greutatea este legată cu un fir înfășurat pe un cilindru de rază r și greutate Q. Să se determine accelerația unghiulară a mișcării cilindrului.

Rezolvare. Condiția de echilibru dinamic pentru sistemul din figură este

$$\delta L = P \sin\alpha \cdot \delta x - \frac{P}{g} \cdot a \cdot \delta x - I\varepsilon \cdot \delta\theta = 0,$$

unde

$$\delta x = r \cdot \delta\theta, \quad I = \frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2}, \quad a = r\varepsilon,$$

deci

$$P \sin\alpha \cdot r \cdot \delta\theta - \frac{P}{g} \cdot r^2 \cdot \varepsilon \cdot \delta\theta - \frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \varepsilon \cdot \delta\theta = 0$$

sau

$$P \sin\alpha = \varepsilon\left(\frac{P}{g} r + \frac{Q}{2g} r\right),$$

de unde

$$\varepsilon = \frac{2Pg \sin\alpha}{r(2P + Q)}.$$

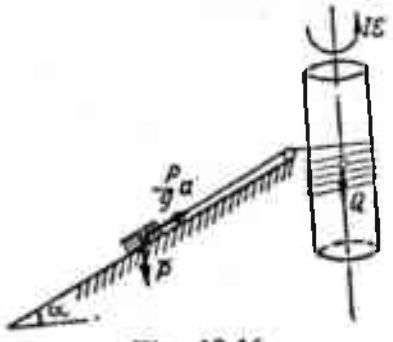


Fig. 19.16

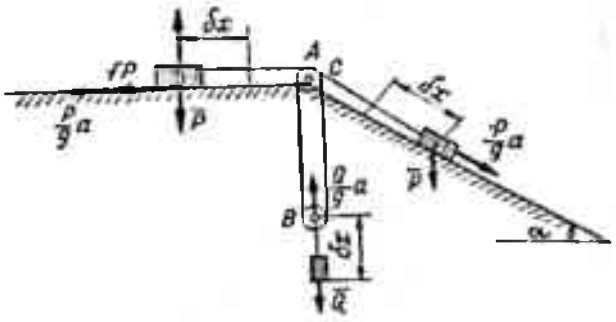


Fig. 19.17

19.17. Două greutăți egale P sînt legate cu fire trecute peste doi scripeți ficși, coaxiali, A și C. Cu ajutorul aceloraşi fire se poate deplasa pe verticală scripetele mobil B, avînd suspendată greutatea $\bar{Q}$ (fig. 19.17). Cunos-

cînd unghiul de înclinare al planului înclinat α și coeficientul de frecare f pentru mișcarea greutății $\bar{P}$ pe planul orizontal, să se determine accelerația greutății $\bar{Q}$.

Rezolvare. Condiția pentru echilibrul dinamic al sistemului este

$$\delta L = -fP \cdot \delta x - \frac{P}{g} a \cdot \delta x - \frac{P}{g} a \cdot \delta x - P \sin \alpha \cdot \delta x +$$

$$+ Q \cdot \delta x - \frac{Q}{g} a \cdot \delta x = 0$$

de unde se obține

$$a = \frac{g[Q - P(f + \sin \alpha)]}{2P + Q}.$$

Mișcarea se va produce dacă există relația

$$Q > P(f + \sin \alpha).$$

19.18. Să se determine accelerația unghiulară ε_1 a roții I din sistemul reprezentat în figura 19.18. Roata este acționată de cuplul motor M. Se cunosc razele discurilor I și II (R_1, R_2), precum și momentele de inerție ale roților I și II (I_1, I_2).

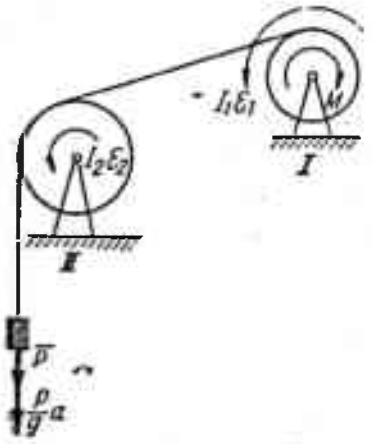


Fig. 19.18

Rezolvare. Echilibrul dinamic se exprimă prin relația

$$(M - I_1\varepsilon_1) \cdot \delta\theta_1 - I_2\varepsilon_2 \cdot \delta\theta_2 - \left(P + \frac{P}{g} a\right) R_2 \cdot \delta\theta_2 = 0.$$

Între $\delta\theta_1$ și $\delta\theta_2$ există relația

$$R_1 \cdot \delta\theta_1 = R_2 \cdot \delta\theta_2,$$

iar între accelerații

$$R_1\varepsilon_1 = R_2\varepsilon_2 = a.$$

Condiția de echilibru devine

$$(M - I_1\varepsilon_1) \cdot \delta\theta_1 - I_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} \varepsilon_1 \cdot \delta\theta_1 - \left(P + \frac{P}{g} R_1\varepsilon_1\right) R_2 \frac{R_1}{R_2} \delta\theta_1 = 0$$

sau

$$\varepsilon_1 \left(I_1 + I_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{P}{g} R_1^2\right) = M - PR_1$$

de unde se calculează accelerația unghiulară

$$\varepsilon_1 = \frac{M - PR_1}{I_1 + I_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{P}{g} R_1^2}.$$

19.19. O bobină cilindrică, de greutate $\bar{Q}$ și rază R, pe care este înfășurat un fir, se poate roti fără frecare în jurul axului său O (fig. 19.19). Firul este trecut fără frecare peste un scripete de masă neglijabilă A, iar de capătul firului atîrnă o greutate $\bar{P}$. Să se determine accelerația corpului $\bar{P}$ și accelerația unghiulară a bobinei.

Rezolvare. Dăm o deplasare virtuală $\delta\theta$ discului. Echilibrul dinamic al sistemului se scrie sub forma

$$\delta L = \left(P - \frac{P}{g} a\right) \cdot \delta h - I\varepsilon \cdot \delta\theta = 0,$$

unde

$$\delta h = R \cdot \delta\theta, \; a = R\varepsilon;$$

deci

$$\left(P - \frac{P}{g} R\varepsilon\right) R \cdot \delta\theta - I\varepsilon \cdot \delta\theta = 0$$

și rezultă

$$\varepsilon = \frac{PR}{\frac{P}{g} R^2 + I} = \frac{PR}{\frac{P}{g} R^2 + \frac{Q}{g} \frac{R^2}{2}} = \frac{2Pg}{(2P + Q)\, R}$$

$$a = \frac{2Pg}{2P + Q}.$$

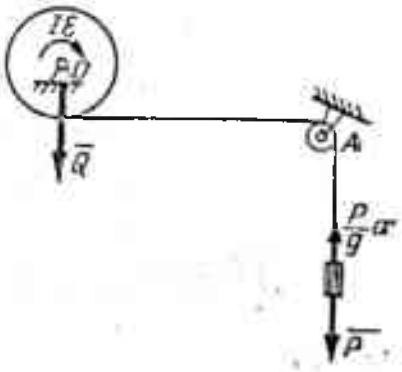


Fig. 19.19

19.20. Să se determine accelerația sistemului din figura 19.20, format din greutățile $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ și sistemele de scripeți coaxiali O_1 și O_2, avînd momentele de inerție față de axele O_1 și O_2 cunoscute: I_1, respectiv I_2. Se cunoaște coeficientul de frecare f din mișcarea greutății $\bar{Q}$ pe planul înclinat cu unghiul α față de orizontală.

Rezolvare. Condiția de echilibru dinamic pentru sistemul din figură este

$$\delta L = P \cdot \delta y - \frac{P}{g} a_1 \cdot \delta y - I_1\varepsilon_1 \cdot \delta\theta_1 - I_2\varepsilon_2 \cdot \delta\theta_2 - fQ\cos\alpha \cdot \delta x -$$

$$- \frac{Q}{g} a_2 \cdot \delta x - Q\sin\alpha \cdot \delta x = 0.$$

Între parametrii mișcării și caracteristicile cinematice ce intervin aici există relațiile

$$\delta y = R_1 \cdot \delta\theta_1, \quad r_1 \cdot \delta\theta_1 = R_2 \cdot \delta\theta_2, \quad \delta x = r_2 \cdot \delta\theta_2 = r_2 \frac{r_1}{R_2} \cdot \delta\theta_1$$

$$a_1 = R_1\varepsilon_1, \quad R_2\varepsilon_2 = r_1\varepsilon_1, \quad a_2 = r_2\varepsilon_2 = \frac{r_2 r_1}{R_2}\varepsilon_1;$$

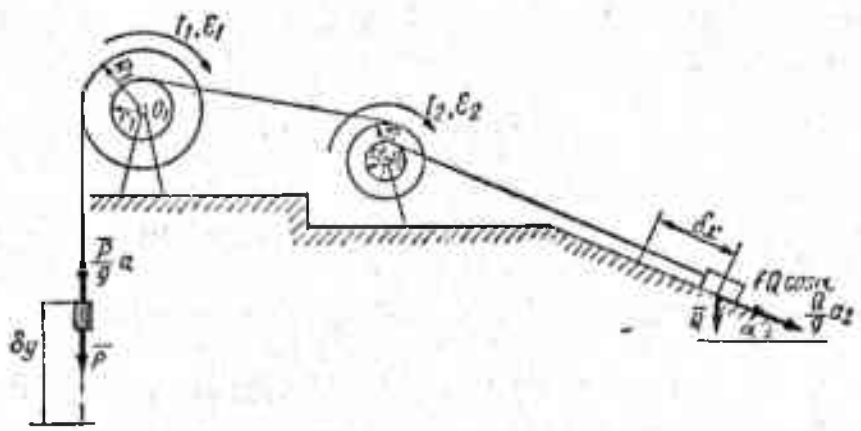


Fig. 19.20

deci

$$P \cdot R_1 \cdot \delta\theta_1 - \frac{P}{g} \cdot R_1\varepsilon_1 \cdot R_1 \cdot \delta\theta_1 - I_1\varepsilon_1 \cdot \delta\theta_1 - I_2 \frac{r_1^2}{R_2^2} \varepsilon_1 \cdot \delta\theta_1 -$$

$$-\left(fQ \cos\alpha + \frac{Q}{g} \frac{r_2 r_1}{R_2} \varepsilon_1 + Q \sin\alpha\right) \frac{r_2 r_1}{R_2} \cdot \delta\theta_1 = 0,$$

sau

$$\varepsilon_1 \left(\frac{P}{g} R_1^2 + I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{R_2^2} + \frac{Q}{g} \cdot \frac{r_2^2 r_1^2}{R_2^2}\right) = PR_1 - Q(f \cos\alpha + \sin\alpha) \frac{r_2 r_1}{R_2}.$$

Rezultă

$$\varepsilon_1 = \frac{PR_1 - Q(f \cos\alpha + \sin\alpha) \frac{r_2 r_1}{R_2}}{\frac{P}{g} R_1^2 + I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{R_2^2} + \frac{Q}{g} \frac{r_2^2 r_1^2}{R_2^2}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{r_1}{R_2} \varepsilon_1 = \frac{P \frac{R_1 r_1}{R_2} - Q(f \cdot \cos\alpha + \sin\alpha) \frac{r_2 r_1^2}{R_2^2}}{\frac{P}{g} R_1^2 + I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{R_2^2} + \frac{Q}{g} \frac{r_1^2 r_2^2}{R_2^2}}$$

$$a_1 = R_1\varepsilon_1 = \frac{PR_1^2 - Q(f \cos\alpha + \sin\alpha) \frac{r_2 r_1 R_1}{R_2}}{\frac{P}{g} R_1^2 + I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{R_2^2} + \frac{Q}{g} \frac{r_2^2 r_1^2}{R_2^2}}$$

$$a_2 = \frac{r_2 r_1}{R_2} \varepsilon_1 = \frac{\frac{PR_1 r_2 r_1}{R_2} - Q(f \cos\alpha + \sin\alpha) \frac{r_2^2 r_1^2}{R_2^2}}{\frac{P}{g} R_1^2 + I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{R_2^2} + \frac{Q}{g} \frac{r_2^2 r_1^2}{R_2^2}}.$$

Probleme propuse pentru rezolvare

19.21. O bară AB, de greutate $\bar{P}$, se reazemă pe două plane înclinate care fac cu orizontala unghiurile α şi β (fig. 19.21). Se cere poziţia de echilibru a sistemului definită de unghiul θ. Caz particular: $\alpha = \beta$.

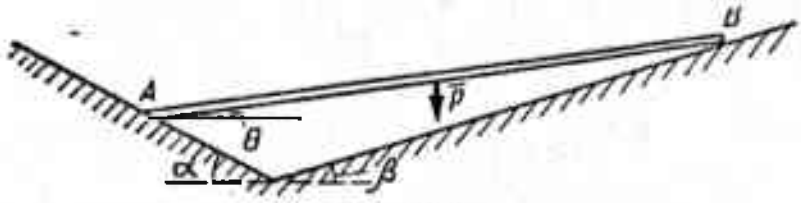


Fig. 19.21

R. a) $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{2\cos\beta}\left[\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} - \dfrac{1}{\sin\beta}\right]$.

b) Pentru $\alpha = \beta$, $\operatorname{tg}\theta = 0$.

19.22. Se dă un sistem de trei bare grele şi omogene, de greutăţi $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ şi lungimi l_1, l_2 şi l_3 (fig. 19.22). Barele sînt articulate în punctul fix O şi între ele în punctele A şi B. Sistemul este acţionat şi de forţele orizontale $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, şi $\bar{Q}_3$. Să se determine condiţia de echilibru a sistemului.

R. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\dfrac{P_1}{2} + P_2 + P_3}$

$\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{Q_2 + Q_3}{\dfrac{P_2}{2} + P_3}$

$\operatorname{tg}\alpha_3 = \dfrac{2Q_3}{P_3}$.

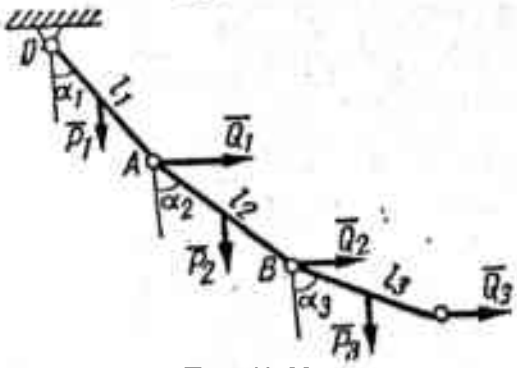


Fig. 19.22

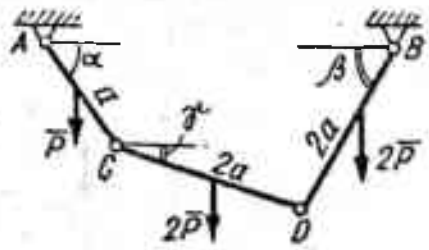


Fig. 19.23

19.23. Trei bare grele, alcătuite din acelaşi material, sînt articulate între ele (fig. 19.23). Să se determine relaţiile dintre unghiurile α, β, γ pentru poziţia de echilibru a sistemului.

R. $4\operatorname{tg}\alpha + 11\operatorname{tg}\beta + 7\operatorname{tg}\gamma = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

19.24. Să se determine forţa $\bar{P}$ care echilibrează momentul $\bar{M}$, pentru sistemul dat în figura 19.24, prin aplicarea principiului vitezelor virtuale.

R. $P = \dfrac{Ma \sin \beta}{rb \sin \alpha \sin \gamma}$

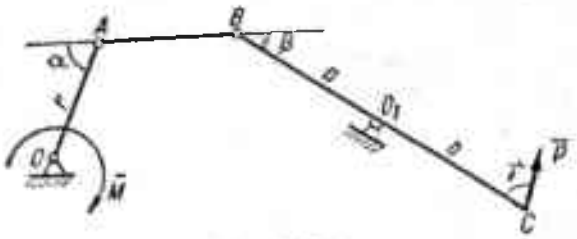


Fig. 19.24

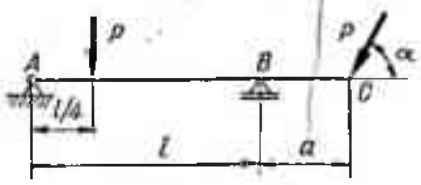


Fig. 19.25

19.25. Să se determine reacţiunile din reazemele grinzii cu consolă ABC din figura 19.25. Grinda este încărcată cu o sarcină concentrată $\bar{P}$ la distanţa $\frac{l}{4}$ de reazemul A şi cu o altă sarcină concentrată $\bar{P}$ înclinată cu unghiul α faţă de orizontală în capătul C al consolei.

R. $V_A = \dfrac{3P}{4} - \dfrac{Pa}{l} \sin \alpha, \quad H_A = P \cos \alpha$

$$V_B = \frac{P}{4} + P \sin \alpha \left(\frac{a}{l} + 1 \right).$$

19.26. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 19.26.

R.

Bara	S_{1-2}	S_{2-3}	S_{3-4}	I_{5-6}	I_{6-7}	D_{1-7}	D_{3-7}	D_{4-6}	M_{2-7}	M_{3-6}	M_{4-5}
Efort	$+F$	$+F$	$+3F$	$-6F$	$-3F$	$+\frac{2F}{\sqrt{2}}$	$+\frac{4F}{\sqrt{2}}$	$+\frac{6F}{\sqrt{2}}$	$-F$	$-3F$	0

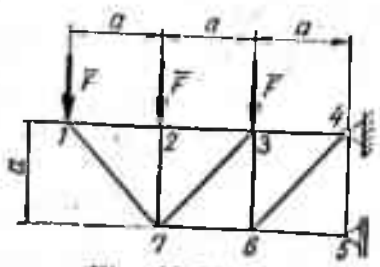


Fig. 19.26

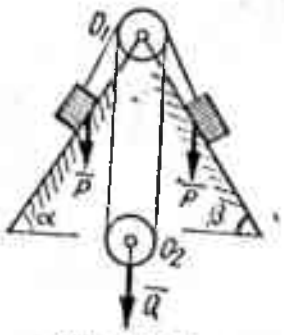


Fig. 19.27

19.27. Sistemul din figura 19.27 este format din greutăţile $\bar{P}$, scripeţii liceşi coaxiali O şi O_1, scripetele mobil O_2 şi greutatea $\bar{Q}$.

Să se determine accelerația greutății $\bar{Q}$, cunoscînd unghiurile α și β, neglijînd frecările și masele scripeților.

R. $a = g\dfrac{Q - P(\sin\alpha + \sin\beta)}{Q + 2P}$.

19.28. Să se determine accelerația sistemului din figura 19.28. Cuplul $\bar{M}$, aplicat roții O_1 (de rază R_1 și moment de inerție I_1 în raport cu O_1), ridică

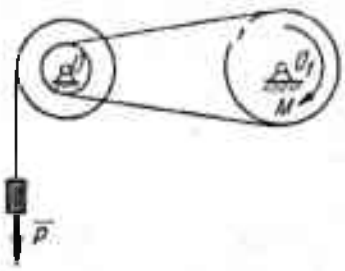


Fig. 19.28

greutatea $\bar{P}$ cu ajutorul troliului O (de raze r, R și moment de inerție I în raport cu O).

R. $a = \dfrac{M\dfrac{r}{RR_1} - P}{\dfrac{P}{g} + \dfrac{I}{R^2} + \dfrac{I_1 r^2}{R^2 R_1^2}}$.

XX. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

Definiții și formule

Obiectul capitolului. Ecuațiile lui Lagrange constituie o metodă generală pentru studiul mișcării sistemelor de puncte materiale a căror poziție poate fi determinată în orice moment prin parametrii geometrici independenți ai sistemului (coordonate generalizate).

Formule de bază. Ecuațiile lui Lagrange sînt de forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots n)$$

unde s-a notat cu q_i coordonatele generalizate, $\dot{q}_i$ vitezele generalizate, E energia cinetică a sistemului, $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ funcția de forță a sistemului.

Dacă forțele sînt conservative, ecuația se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots n)$$

unde

$$L = E + U$$

(funcţia lui Lagrange sau potenţialul cinetic).

Un caz important de aplicare a ecuaţiilor lui Lagrange îl constituie studiul mişcărilor oscilatorii — în particular, micile oscilaţii în jurul poziţiilor de echilibru stabil.

Dacă forţele care acţionează asupra sistemului admit o funcţie de forţă $U(q_1, \ldots, q_n)$, poziţia de echilibru este dată de sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

cu necunoscutele $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

În cazul echilibrului, funcţia U este maximă, minimă sau constantă, respectiv energia potenţială $V = -U$ este minimă, maximă sau constantă.

Probleme rezolvate

20.1. Să se studieze mişcarea unei bare omogene OA, de lungime l şi masă M, articulată în O şi lăsată să penduleze liber într-un plan vertical (fig. 20.1), utilizînd ecuaţia lui Lagrange.

Rezolvare. Energia cinetică a barei este

$$E = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = \frac{Ml^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

Funcţia de forţă U are expresia

$$U = -Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta).$$

Mişcarea sistemului depinde de un singur parametru θ — coordonata generalizată. Derivatele parţiale care intervin în ecuaţia lui Lagrange sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{Ml^2}{3} \ddot{\theta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{Mgl}{2} \sin \theta.$$

Cu acestea, ecuaţia lui Lagrange are forma

$$\frac{Ml^2}{3} \ddot{\theta} = -\frac{Mgl}{2} \sin \theta$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \sin \theta = 0.$$

Pentru $\sin \theta \approx 0$, mişcarea barei este oscilatorie armonică.

Soluția ecuației lui Lagrange este

$$\theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t = a \sin (\omega t + \varphi)$$

în care constantele A, B sau a, φ se determină din condițiile inițiale.

Pulsația mișcării este $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$, iar perioada

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

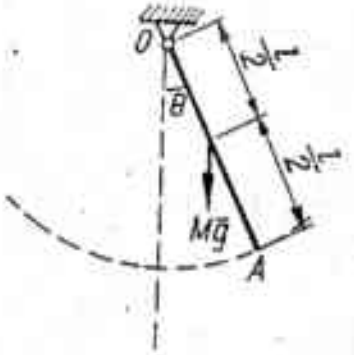


Fig. 20.1

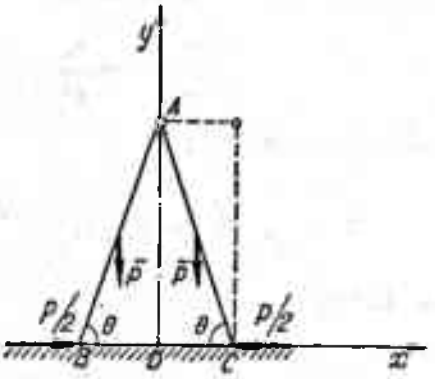


Fig. 20.2

20.2. Două bare $AB = AC = 2l$, omogene, de greutăți egale cu P, sînt articulate între ele în A, capetele B și C putînd aluneca fără frecare pe orizontala BC (barele rămînînd în același plan vertical). În B și C sînt aplicate forțele orizontale egale $P/2$, îndreptate spre D (fig. 20.2). Presupunînd că lăsăm barele să cadă liber din poziția $\theta = \frac{\pi}{6}$, fără viteză inițială, se cere viteza cu care ajunge punctul A pe orizontala BC.

Rezolvare. Energia cinetică a sistemului este

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_1 \dot{\theta}^2 = \left(\frac{1}{3} Ml^2 + Ml^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} Ml^2 \dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} \frac{P}{g} \cdot l^2 \dot{\theta}^2$$

(barele efectuează mișcări plan-paralele, centrele instantanee de rotație, găsindu-se la intersecția perpendicularelor ridicate în punctele C și A, respectiv B și A, pe axele Dx și Dy).

Diferențiala funcției de forță U este

$$dU = -2\,Pl \cos \theta \, d\theta + 2 \frac{P}{2} \cdot 2l \sin \theta \, d\theta = 2\,Pl (\sin \theta - \cos \theta)\, d\theta.$$

Derivatele parțiale din ecuația lui Lagrange sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{P}{g} l^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{P}{g} \cdot l^2 \ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 2Pl (\sin \theta - \cos \theta).$$

Ecuaţia lui Lagrange va fi

$$\frac{8}{3}\frac{P}{g}l^2\ddot{\theta} = 2\,Pl(\sin\theta - \cos\theta)$$

sau

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}(\sin\theta - \cos\theta).$$

Multiplicînd această ecuaţie cu $\dot{\theta}$ şi integrînd se obţine o integrală primă

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{3g}{4l}(\sin\theta + \cos\theta) + C_1.$$

Cu condiţiile iniţiale

$$t = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

constanta este:

$$C_1 = \frac{3g}{4l}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

şi integrala devine

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{3g}{4l}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \sin\theta - \cos\theta\right).$$

Cînd ajunge punctul A pe orizontală, $\dot{\theta}$ este

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{4l}(\sqrt{3}-1)},$$

iar viteza punctului A

$$v_A = 2l\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{3}{2}gl(\sqrt{3}-1)}.$$

20.3. Un disc circular, de greutate P, este ataşat excentric la un arbore înclinat ca în fig. 20.3. Arborele formează unghiul α cu orizontala şi este rezemat fără frecare. Excentricitatea discului este e şi diametrul d. Să se determine perioada micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru.

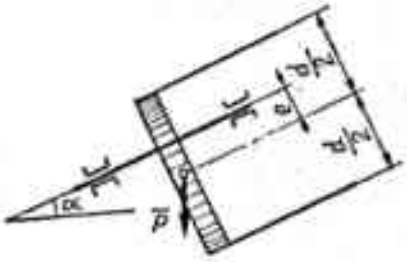


Fig. 20.3

Rezolvare. Energia cinetică a discului este

$$E = \frac{1}{2}\cdot I_\Delta \cdot \dot{\theta}^2,$$

unde

$$I_\Delta = I_O + \frac{P}{g}e^2 = \frac{P}{g}\left(\frac{d^2}{8} + e^2\right).$$

Diferențiala funcției de forță este

$$dU = Pd\,[e\cos\alpha\cos\theta] = -Pe\cdot\cos\alpha\sin\theta\,d\theta.$$

Ecuația lui Lagrange este în acest caz

$$\frac{P}{8g}(d^2+8e^2)\ddot{\theta} + Pe\cos\alpha\sin\theta = 0.$$

Pentru mici mișcări în jurul poziției de echilibru stabil, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ și ecuația devine

$$\ddot{\theta} + \frac{8eg\cos\alpha}{d^2+8e^2}\theta = 0.$$

În acest caz, perioada oscilațiilor are forma

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^2+8e^2}{8eg\cos\alpha}}.$$

20.4. Să se stabilească ecuația lui Lagrange pentru mișcarea unui punct material m în coordonate polare.

Rezolvare.

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Expresia lucrului mecanic elementar al forței F este:

$$dL = F_r\delta_r + F_n r\delta_\theta.$$

Ecuațiile vor fi:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\frac{m}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_n.$$

20.5. Să se aplice metoda din problema precedentă la cazul unui pendul elastic de lungime inițială r_0 (fig. 20.5).

Rezolvare. Ecuațiile lui Lagrange sînt:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_n,$$

în care:

$$F_r = mg\cos\theta - k(r - r_0)$$

$$F_n = mg\sin\theta.$$

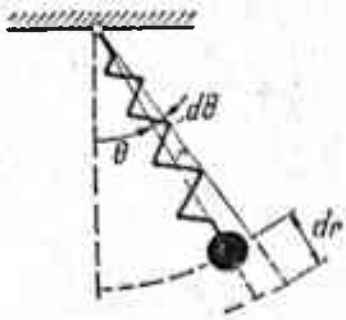


Fig. 20.5

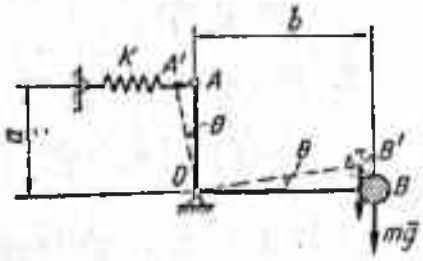


Fig. 20.6

20.6. Să se determine ecuaţia diferenţială a micilor oscilaţii ale sistemului din figura 20.6 şi să se găsească frecvenţa proprie, neglijînd masa barei cotite AOB şi frecările.

Rezolvare. Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{mb^2}{2} \dot{\theta}^2.$$

Diferenţiala funcţiei de forţă este

$$dU = -mg\, d(b \sin\theta) - ak \sin\theta d(a \sin\theta) = \cos\theta\,(-mgb - a^2k \sin\theta)\, d\theta.$$

Derivatele parţiale din ecuaţia lui Lagrange, în raport cu parametrul θ, sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\cos\theta\,(mgb + a^2k \sin\theta).$$

Ecuaţia de mişcare are forma

$$mb^2\ddot{\theta} + \cos\theta\,(mgb + a^2k \sin\theta) = 0.$$

În cazul micilor oscilaţii,

$$\ddot{\theta} + \frac{a^2k}{mb^2}\theta = -\frac{g}{b}.$$

Mişcarea sistemului este oscilatorie armonică şi are perioada

$$T = 2\pi \frac{b}{a}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

20.7. Să se scrie ecuaţia diferenţială a mişcării pendulului din figura 20.7, *a* şi să se determine frecvenţa proprie a acestei mişcări. (Se vor considera numai micile oscilaţii şi se va neglija masa barei). Ce se întîmplă dacă bara este prinsă cu două resoarte simetrice, în dreptul masei m (fig. 20.7, *b*). (Constanţa elastică a resoartelor este k).

Rezolvare. Energia cinetică a pendulului este

$$E = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2.$$

Diferenţiala funcţiei de forţă U este

$$dU = -mg\,dy - kx_1dx_1 = -mg\,d(l\cos\theta) - ka\sin\theta d(a\sin\theta) =$$
$$= \sin\theta\,d\theta(mgl - ka^2\cos\theta).$$

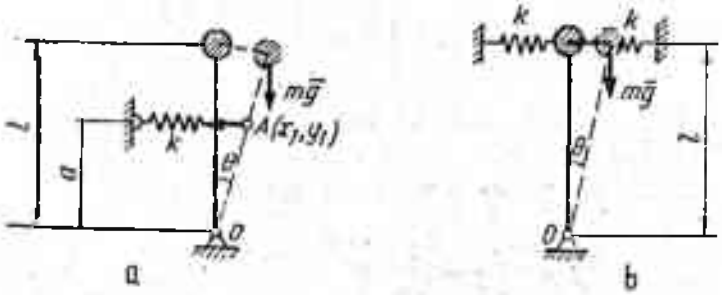


Fig. 20.7

Derivatele parţiale din ecuaţia lui Lagrange au expresiile

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial E}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial\theta} = \sin\theta(mgl - ka^2\cos\theta).$$

Ecuaţia lui Lagrange are deci forma

$$ml^2\ddot{\theta} - \sin\theta(mgl - ka^2\cos\theta) = 0.$$

Pentru mici oscilaţii $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ şi deci

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\theta = 0.$$

Mişcarea este oscilatorie, numai dacă coeficientul lui θ este pozitiv, sau

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = mgl - ka^2 < 0 \quad \text{sau} \quad mg < \frac{ka^2}{l}.$$

Frecvenţa proprie a mişcării va fi

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\cdot\pi l}\sqrt{\frac{ka^2 - mgl}{m}}.$$

În cazul a două resoarte prinse în dreptul masei m, energia cinetică are aceeaşi expresie; se modifică numai expresia diferenţialei funcţiei de forţă, care devine

$$dU = -mg\,dy - 2kx\,dx = -mgl\,d(\cos\theta) - 2kl\sin\theta d(l\sin\theta) =$$
$$= l\sin\theta(mg - 2kl\cos\theta)d\theta$$

deci

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = l \sin \theta (mg - 2kl \cos \theta).$$

Ecuaţia lui Lagrange are forma

$$ml\ddot{\theta} = \sin \theta (mg - 2kl \cos \theta)$$

care pentru mici oscilaţii devine

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{l}\right) \theta = 0.$$

Şi în acest caz, mişcarea este oscilatorie, dacă paranteza care multiplică pe θ este pozitivă, adică $2kl > mg$.

Frecvenţa oscilaţiilor proprii va fi în acest caz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2kl - mg}{ml}}.$$

20.8. O roată avînd momentul de inerţie I în raport cu axul său, poate oscila într-un plan vertical, arborele său de rază r rostogolindu-se pe două şine circulare de rază $OA = R$ (fig. 20.8). Masa roţii fiind m, să se determine frecvenţa mişcării.

Rezolvare. Mişcarea roţii depinde de un singur parametru, unghiul θ, deoarece între unghiul θ şi φ există relaţia

$$\varphi = \frac{R - r}{r} \theta.$$

Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{1}{2} I_{O_1} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}(R - r)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3m}{4}(R - r)^2 \dot{\theta}^2.$$

Diferenţiala funcţiei de forţă este

$$dU = -mgd[(R - r)(1 - \cos \theta)] = -mg(R - r) \sin \theta \, d\theta.$$

Derivatele parţiale care intră în ecuaţia lui Lagrange au expresiile

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3m}{2}(R - r)^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -mg(R - r) \sin \theta,$$

deci ecuaţia de mişcare va fi

$$\frac{3m}{2}(R - r)^2 \ddot{\theta} = -mg(R - r) \sin \theta$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R - r)} \sin \theta = 0$$

care pentru $\sin \theta \approx \theta$ este ecuaţia unei mişcări oscilatorii armonice.

Perioada mișcării este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}.$$

Frecvența mișcării este

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}.$$

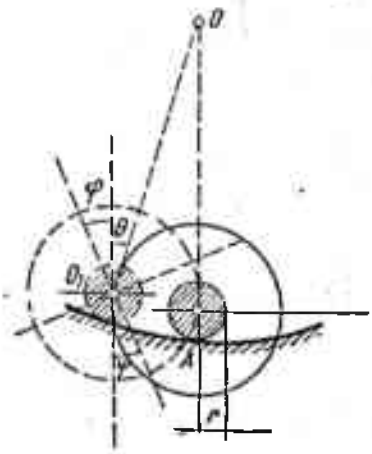


Fig. 20.8

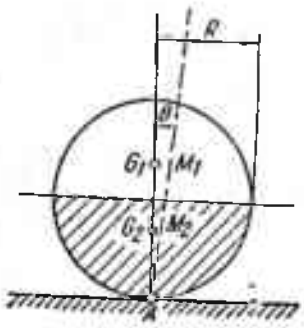


Fig. 20.9

20.9. Un disc circular de rază R, este format din două jumătăți de disc alcătuite din materiale diferite și mase M_1 și M_2 ($M_1 < M_2$). Discul se reazemă într-un plan vertical pe o dreaptă orizontală, în punctul A (fig. 20.9). Se cere: să se studieze oscilațiile foarte mici în jurul poziției de echilibru stabil. G_1 și G_2 sînt centrele de greutate ale celor două jumătăți de disc.

Rezolvare. Energia cinetică a discului este

$$E = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 ,$$

unde

$$I_A = I_{G1} + M_1\left(R + \frac{4R}{3\pi}\right)^2 + I_{G2} + M_2\left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)^2 =$$

$$= \frac{M_1 + M_2}{2} R^2\left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right) + (M_1 + M_2) R^2\left(1 + \frac{16}{9\pi^2}\right) +$$

$$+ (M_1 - M_2)\frac{8R^2}{3\pi} = \frac{R^2}{6\pi}[M_1(9\pi + 16) + M_2(9\pi - 16)].$$

Funcția de forță U este

$$U = -gR\left[M_1\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) + M_2\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)\right](1 - \cos\theta).$$

Ecuaţia lui Lagrange are forma

$$I_A\ddot{\theta} = -gR\left[M_1\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)+M_2\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)\right]\sin\theta,$$

iar în cazul micilor oscilaţii

$$\ddot{\theta}+\frac{6\pi g\left[M_1\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)+M_2\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)\right]}{R\,[M_1(9\pi+16)+M_2(9\pi+16)]}\,\theta=0.$$

Poziţia de echilibru stabil corespunde lui $\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}<0$.

În cazul de faţă,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}=-gR\left[M_1\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)+M_2\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)\right]\cos\theta.$$

Condiţia de echilibru stabil corespunde pentru $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

20.10. O sferă plină, de rază R, omogenă (greutate specifică $\gamma<1$), se scufundă în apă (fig. 20.10). Să se găsească poziţia de echilibru şi să se arate că echilibrul e stabil. Să se aplice în cazul cînd $\gamma=0{,}5$ şi să se studieze oscilaţiile în jurul poziţiei de echilibru.

Rezolvare. Energia cinetică este

$$E=\frac{1}{2}Mv_G^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\frac{\gamma}{g}\dot{z}^2.$$

Fie $Q=\frac{\pi}{3}z^2(3R-z)$ greutatea volumului de apă dezlocuit de sferă; diferenţiala funcţiei de forţă este

$$\mathrm{d}U=(Mg-Q)\,\mathrm{d}z=\left[\frac{4}{3}\pi R^3\gamma-\frac{1}{3}\pi z^2(3R-z)\right]\mathrm{d}z.$$

Derivatele parţiale din ecuaţia lui Lagrange în raport cu parametrul z sînt

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{z}}=\frac{4}{3}\pi R^3\frac{\gamma}{g}\dot{z},\quad \frac{\partial E}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=\frac{4}{3}\pi R^2\gamma-\frac{1}{3}\pi z^2(3R-z).$$

Ecuaţia de mişcare este

$$\frac{4}{3}\pi R^3\frac{\gamma}{g}\ddot{z}=\frac{4}{3}\pi R^3\gamma-\frac{1}{3}\pi z^2(3R-z)$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M\dot{z}^2\right)=\frac{dz}{dt}(Mg-Q),$$

dacă se multiplică ecuația cu $\dot{z}$. Rezultă

$$v^2=2gz-\frac{gz^2\left(R-\frac{z}{4}\right)}{2R^3\gamma}.$$

Pornind de la $z=0$, v crește pînă ce se anulează derivata în raport cu z a lui v^2

$$\frac{d(v^2)}{dz}=2g-\frac{gz^2(3R-z)}{2R^3\gamma}=0.$$

Pentru $\gamma=\frac{1}{2}$ ecuația de mai sus devine

$$z^3-3Rz^2+2R^3=0$$

și admite rădăcina $z=R$. Deci viteza va crește pînă ce centrul sferei ajunge la nivelul apei, după aceea va descrește și se va anula pentru $v^2=0$, adică

$$z^3-4Rz^2+8R^3=0,$$

cu soluția reală $z=2R$. Echilibrul se realizează pentru

$$P-Q=0,$$

adică pentru

$$P-\frac{1}{3}\pi z^2(3R-z)=0.$$

Această expresie reprezintă derivata funcției de forță U în raport cu z

$$\frac{\partial U}{\partial z}=P-\frac{1}{3}\pi z^2(3R-z).$$

Echilibrul este stabil dacă U este maxim, deci

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}<0.$$

Dar

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\pi z(z-2R),$$

care este negativ, căci $z<2R$. Echilibrul este stabil.

Scanned with OKEN Scanner

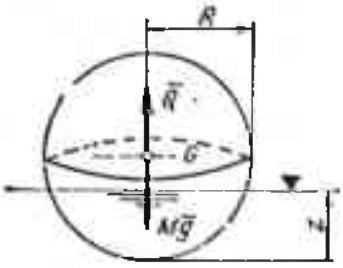


Fig. 20.10

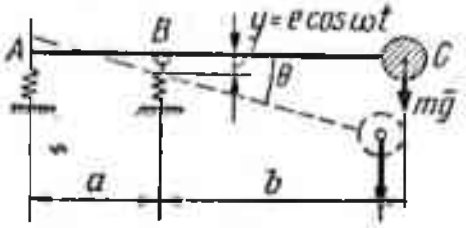


Fig. 20.11

20.11. Reazemului articulat B al barei AC din figura 20.11 i se imprimă o mişcare verticală după legea $y = e \cos \omega t$. Să se determine ecuaţia diferenţială a mişcării masei m. (Se neglijează masa barei.)

Rezolvare. Sistemul din figura 20.11 are două grade de libertate, deplasările independente fiind y şi θ. Energia cinetică a masei m este

$$E = \frac{1}{2} mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2.$$

Diferenţiala funcţiei de forţă U este

$$dU = mg\, dy - ky\, dy + mg\, d(b \sin \theta) - ka \sin \theta d\, (a \sin \theta) =$$

$$= (mg - ky)\, dy + (mgb - ka^2 \sin \theta) \cos \theta d\, \theta.$$

Derivatele parţiale din cele două ecuaţii Lagrange scrise în raport cu parametrii y şi θ sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = mg - ky$$

$$\frac{E\partial}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = (mgb - ka^2 \sin \theta) \cos \theta.$$

Ecuaţiile de mişcare vor fi deci

$$m\ddot{y} = mg - ky$$

$$mb^2\ddot{\theta} = (mgb - ka^2 \sin \theta) \cos \theta.$$

În cazul micilor mişcări, rezultă

$$\ddot{y} + \frac{ky}{m} = g$$

$$\ddot{\theta} + \frac{ka^2}{mb^2}\theta = \frac{g}{b}.$$

Mişcarea sistemului este o suprapunere de două mişcări oscilatorii armonice de forma

$$y = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{mg}{k}$$

$$\theta = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \frac{mgb}{ka^2}$$

unde A_1, A_2, φ_1, φ_2 sînt constante de integrare, care se determină prin condiţiile iniţiale ale problemei.

20.12. Un pendul simplu este suspendat astfel încît punctul material se poate mişca liber pe o suprafaţă sferică de rază l, cu centrul O, formînd astfel un pendul sferic (fig. 20.12). Să se studieze oscilaţiile. Cazuri particulare:

a) traiectoria să fie cercul din planul orizontal, cu centrul în punctul care împarte raza verticală în două părţi egale (pendul conic);

b) traiectoria să fie o curbă cuprinsă între cercul precedent şi cercul orizontal ce trece prin centrul sferei.

Rezolvare. Coordonatele unui punct de pe sferă sînt

$$x = l \cos\theta \sin\varphi$$

$$y = l \cos\theta \cos\varphi$$

$$z = -l \sin\theta,$$

iar componentele vitezei punctului M pe axe

$$\dot{x} = -l\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi + l\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi$$
$$\dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi + l\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi$$
$$\dot{z} = -l\dot{\theta}\cos\theta.$$

Energia cinetică a punctului M este

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot \cos^2\theta).$$

Funcţia de forţă este

$$U = -mgl(1 - \sin\theta).$$

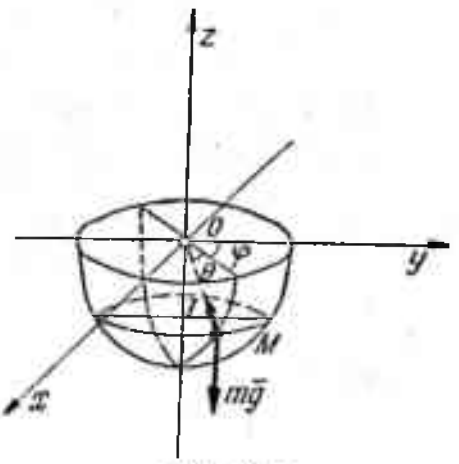


Fig. 20.12

Scanned with OKEN Scanner

Mişcarea depinde de doi parametri θ şi φ; se vor scrie două ecuaţii Lagrange. Derivatele parţiale care intervin în calcule sînt:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = -ml^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cos\theta \sin\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}\cos^2\theta, \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0.$$

Ecuaţiile lui Lagrange formează sistemul

$$ml^2(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta) = mgl\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}\cos^2\theta) = 0$$

Ecuaţia a doua admite o integrală primă de forma

$$\dot{\varphi}\cos^2\theta = C_1$$

şi sistemul de ecuaţii se reduce la ecuaţia diferenţială

$$\ddot{\theta} + C_1^2\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} = \frac{g}{l}\cos\theta.$$

Cazuri particulare:

a) $l\sin\theta = \frac{l}{2}$, adică $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\theta = 30°$.

Sistemul devine în acest caz

$$\dot{\varphi} = \frac{4}{3}C_1 = C_2.$$

Pendulul conic are viteza unghiulară $\dot{\varphi} = C_2$. Punctul M este supus acţiunii greutăţii sale $m\bar{g}$, tensiunii $\bar{T}$ din fir şi unei forţe de inerţie dirijată după direcţia razei la cerc în sens contrar centrului cercului (fig. 20.12).

b) Pentru ca traiectoria punctului să fie o curbă cuprinsă între cercul de rază $l\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi cercul de rază l, trebuie ca $0 < \theta < 30°$.

20.13. Un pendul matematic M_1, de lungime l şi masă m, poate oscila într-un plan vertical. De masa m este legat un al doilea pendul matematic M_2 de aceeaşi lungime şi de aceeaşi masă (fig. 20.13). Să se studieze micile oscilaţii ale acestui sistem şi să se determine pulsaţiile proprii.

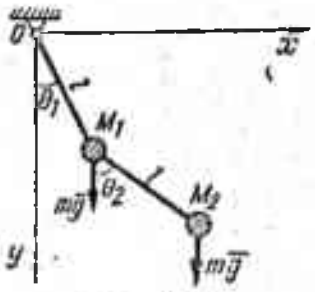


Fig. 20.13

Rezolvare. Coordonatele punctelor M_1 şi M_2 sînt

$$x_{M_1} = l\sin\theta_1, \quad y_{M_1} = l\cos\theta_1$$

$$x_{M_2} = l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2),$$

$$y_{M_2} = l(\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

Vitezele celor două puncte sînt

$$\dot{x}_{M_1} = l\dot{\theta}_1 \cos\theta_1, \quad \dot{y}_{M_1} = -l\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

$$\dot{x}_{M_2} = l(\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_2), \quad \dot{y}_{M_2} = -l(\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin\theta_2).$$

Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) = \frac{m}{2} l^2[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)].$$

Diferenţiala funcţiei de forţă a sistemului este

$$dU = -mgl(2\sin\theta_1\, d\theta_1 + \sin\theta_2\, d\theta_2).$$

Deoarece se cere studiul micilor oscilaţii, putem considera $\sin\theta_1 \approx \theta_1$, $\sin\theta_2 \approx \theta_2$, $\cos\theta_1 \approx 1$, $\cos\theta_2 \approx 1$. Energia cinetică şi diferenţiala funcţiei de forţă devin

$$E = \frac{ml^2}{2}(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$$

$$dU = -mgl(2\theta_1 d\theta_1 + \theta_2\, d\theta_2).$$

Derivatele parţiale din cele două ecuaţii Lagrange referitoare la parametrii θ_1 şi θ_2 sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1} = ml^2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = ml^2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2), \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = -2mgl\theta_1$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = ml^2(\ddot{\theta}_1 + \theta_2),$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = -mgl\theta_2.$$

Ecuaţiile lui Lagrange respective sînt

$$ml^2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = -2mgl\theta_1$$

$$ml^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = -mgl\theta_2$$

sau

$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 = 0$$

$$l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Primul sistem admite soluţii de forma

$$\theta_1 = A \sin \omega t, \quad \theta_2 = B \sin \omega t,$$

care, înlocuite în al doilea conduc la

$$A(2g - 2l\omega^2) - Bl\omega^2 = 0$$

$$-Al\omega^2 + B(g - l\omega^2) = 0.$$

Acest sistem dă soluţii diferite de zero pentru A şi B, numai dacă determinantul coeficienţilor este nul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2g - 2l\omega^2 & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Frecvenţele proprii ale mişcării sînt:

$$\omega_1^2 = \frac{\sqrt{2}g}{l}(\sqrt{2} - 1), \quad \omega_2^2 = \frac{\sqrt{2}g}{l}(\sqrt{2} + 1).$$

20.14. O bară omogenă $OA = l$, se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei Oz. Pe această bară alunecă fără frecare, un punct material greu N, de masă m (fig. 20.14). Se cere să se studieze mişcarea punctului N: a) neglijînd masa barei şi b) ţinînd cont de masa barei M.

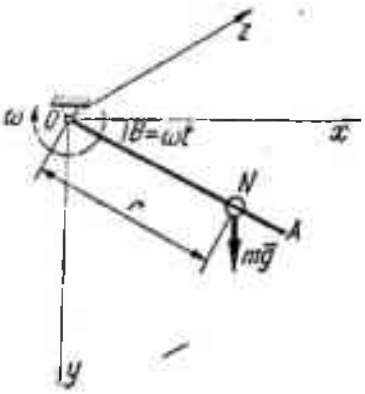


Fig. 20.14

Rezolvare. a) Coordonatele punctului M sînt

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

iar componentele vitezei sale pe axele de coordonate

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \, \dot{\theta}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \, \dot{\theta}.$$

Energia cinetică a punctului este

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2),$$

iar funcţia de forţă

$$U = mgr \sin \theta.$$

Derivatele parțiale care intervin în ecuațiile lui Lagrange scrise în raport cu cei doi parametri r și θ sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\,(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}),$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgr\cos\theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r},$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = mg\sin\theta.$$

Sistemul ecuațiilor de mișcare este

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = g\cos\theta$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = g\sin\theta$$

sau, înlocuind $\theta = \omega t$,

$$2\omega\dot{r} = g\cos\omega t$$

$$\ddot{r} - r\omega^2 = g\sin\omega t.$$

Sistemul se integrează ușor, deoarece

$$\dot{r} = \frac{g}{2\omega}\cos\omega t;$$

prin integrare

$$r = \frac{g}{2\omega}\sin\omega t + r_0$$

și prin derivare în raport cu timpul

$$\ddot{r} = -\frac{g}{2}\sin\omega t.$$

Introducînd aceste valori în cea de-a doua ecuație a sistemului ecuațiilor de mișcare obținem pentru constanta r_0 valoarea

$$r_0 = -\frac{2g}{\omega^2}\sin\omega t.$$

Soluția sistemului este deci

$$r = -\frac{3g}{2\omega^2}\sin\omega t.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2),$$

iar funcția de forță U

$$U = mgr \sin\theta + Mg\frac{l}{2}\sin\theta.$$

Derivatele parțiale sînt în acest caz

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{Ml^2}{3} + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{Ml^2}{3} + \frac{mr^2}{2}\right)\ddot{\theta} + mr\dot{r}\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \left(mgr + Mg\frac{l}{2}\right)\cos\theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial E}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = mg\sin\theta.$$

Ecuațiile de mișcare formează sistemul

$$\left(\frac{Ml^2}{3} + \frac{mr^2}{2}\right)\ddot{\theta} + mr\dot{r}\dot{\theta} = \left(mgr + Mg\frac{l}{2}\right)\cos\theta$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = g\sin\theta.$$

20.15. O bară omogenă, $AB = l$, de greutate $\vec{P}$, se sprijină cu un capăt pe verticala Oz iar cu celălalt, pe un plan orizontal xOy. Să se studieze mișcarea ei (fig. 20.15).

Rezolvare. Poziția unui punct de pe bară este definită prin parametrii θ și φ.

Coordonatele unui punct curent, cînd $\overline{BM} = r$, sînt

$$x = (l - r)\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = (l - r)\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta.$$

Componentele vitezei punctului curent pe axe sînt

$$\dot{x} = (l - r)(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi)$$

$$\dot{y} = (l - r)(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi)$$

$$\dot{z} = -r\dot{\theta}\sin\theta.$$

Energia cinetică a barei este

$$E = \frac{1}{2}\int v^2\,dm = \frac{P}{2g}\int(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,dr = \frac{P}{2g}\int[(l-r)^2\cdot(\dot{\theta}^2\cos^2\theta +$$

$$+ \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta]\,dr = \frac{Pl^3}{6g}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta).$$

Diferențiala funcției de forță este

$$dU = -\frac{Pl}{2}\sin\theta\,d\theta.$$

Derivatele parțiale din ecuația lui Lagrange, pentru fiecare din cei doi parametri φ și θ, sînt

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{Pl^3}{3g}\dot{\varphi}\sin^2\theta,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{Pl^3}{3g}(\dot{\varphi}\cdot\dot{\theta}\sin 2\theta + \ddot{\varphi}\sin^2\theta),\quad \frac{\partial E}{\partial\varphi} = 0,\quad \frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}} = \frac{Pl^3}{3g}\dot{\theta},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{Pl^3}{3g}\ddot{\theta},\quad \frac{\partial E}{\partial\theta} = \frac{Pl^3}{6g}\dot{\varphi}^2\sin 2\theta,\quad \frac{\partial U}{\partial\theta} = -\frac{Pl}{2}\sin\theta.$$

Sistemul ecuațiilor de mișcare este

$$\frac{Pl^3}{3g}\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\sin^2\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0$$

sau

$$\dot{\varphi}\sin^2\theta = C$$

$$\ddot{\theta} - \frac{C^2\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0,$$

în care C se determină din condițiile inițiale ale problemei.

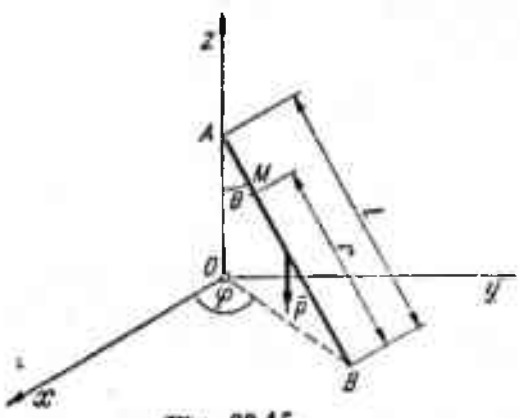


Fig. 20.15

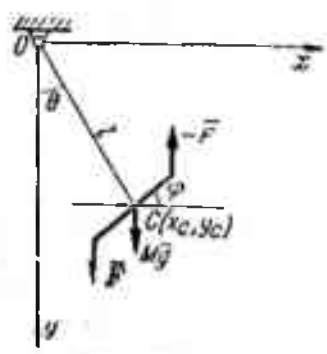


Fig. 20.16

20.16. Se dă într-un plan vertical xOy, un fir inextensibil OC, de lungime l și masă neglijabilă. Mijlocul C al unei bare grele, omogene, de lungime l

şi masă M din planul xOy este legat de fir. Bara mai este supusă la două forţe verticale $\bar{F}$ şi $-\bar{F}$. Să se studieze mişcarea sistemului (fig. 20.16).

Rezolvare. Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{1}{2} Ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_C\dot{\varphi}^2 = \frac{Ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{12}\right).$$

Diferenţiala funcţiei de forţă este

$$dU = -Mgl \sin\theta \, d\theta + Fl \cos\varphi \, d\varphi.$$

Derivatele parţiale care intervin în ecuaţiile lui Lagrange, scrise pentru parametrii φ şi θ, sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = Ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = Ml^2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -Mgl \sin\theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{Ml^2}{12}\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{Ml^2}{12}\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Fl \cos\varphi.$$

Sistemul ecuaţiilor de mişcare este

$$Ml^2\ddot{\theta} = -Mgl \sin\theta$$

$$\frac{Ml^2}{12}\ddot{\varphi} = Fl \cos\varphi$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{12F}{Ml}\cos\varphi = 0.$$

Pentru mici oscilaţii $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\varphi \approx 1$; sistemul se comportă ca un pendul matematic, masa barei fiind concentrată în centrul său de greutate, iar bara are o mişcare de rotaţie uniformă în jurul acestui punct: $\theta = A \sin(\omega t + \varphi_0)$.

20.17. Se dă o tijă Oz_1 făcînd cu verticala Oz unghiul α. De-a lungul lui Oz_1, cade fără frecare, printr-un canal diametral din sferă, o sferă de masă M de dimensiuni neglijabile (fig. 20.17).

a) Să se studieze mişcarea.

b) Să se arate ce se întîmplă dacă și tija Oz_1 are o rotație în jurul lui Oz, cu vteza unghiulară ω, iar sfera nu mai are d imensiuni neglijabile.

Rezolvare. a) Dacă tija Oz_1 nu se rotește în jurul lui Oz, energia cinetică a sferei este

$$E = \frac{1}{2} M \dot{z}_1^2,$$

iar diferențiala funcției de forță are expresia

$$dU = Mg \cos \alpha \, dz_1.$$

Ecuația lui Lagrange este în acest caz

$$\ddot{z}_1 = g \cos \alpha,$$

adică sfera efectuează în lungul barei Oz_1 o translație cu accelerație constantă.

b) Dacă și bara Oz_1 se rotește în jurul lui Oz energia cinetică a sferei are expresia

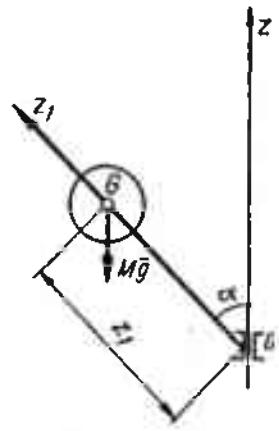


Fig. 20.17

$$E = E_{rot} + E_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

cu

$$I_z = I_0 + M(z_1 \sin \alpha)^2$$

unde I_0 este momentul de inerție al sferei în raport cu un diametru paralel cu axa Oz. Formula devine astfel

$$E = \frac{1}{2} M \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M z_1^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\theta}^2.$$

Diferențiala funcției de forță are aceeași expresie ca în cazul precedent

$$dU = Mg \cos \alpha \, dz_1.$$

Mișcarea depinde, în acest caz, de parametrii θ și z_1.
Derivatele parțiale din cele două ecuații Lagrange sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{z}_1} = M \dot{z}_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{z}_1}\right) = M \ddot{z}_1, \quad \frac{\partial E}{\partial z_1} = M z_1 \sin^2 \alpha, \quad \frac{\partial U}{\partial z_1} = Mg \cos \alpha$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = (I_0 + M z_1^2 \sin^2 \alpha)\dot{\theta}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de mișcare sînt

$$\ddot{z}_1 - \dot{\theta}^2 z_1 \sin^2 \alpha = g \cos \alpha$$

$$\frac{d}{dt}(I_0\dot{\theta} + mz_1^2\dot{\theta} \sin^2 \alpha) = 0.$$

A doua ecuație admite o integrală primă de forma

$$\dot{\theta} = \frac{C}{I_0 + mz_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

C este o constantă de integrare ce se determină prin condițiile inițiale: la $t = 0$, $z_1 = a$, $\dot{\theta} = \omega_0$, $\dot{z}_1 = v_0$, deci $C = \omega_0(I_0 + ma^2 \sin^2 \alpha)$.

Prima ecuație devine astfel

$$\ddot{z}_1 = -\frac{z_1 C^2 \sin^2 \alpha}{(I_0 + mz_1^2 \sin^2 \alpha)^2} = g \cos \alpha$$

sau

$$\ddot{z}_1 = \frac{(I_0 + ma^2 \sin^2 \alpha)^2}{(I_0 + mz_1^2 \sin^2 \alpha)^2} \omega_0^2 \sin^2 \alpha \, z_1 = g \cos \alpha.$$

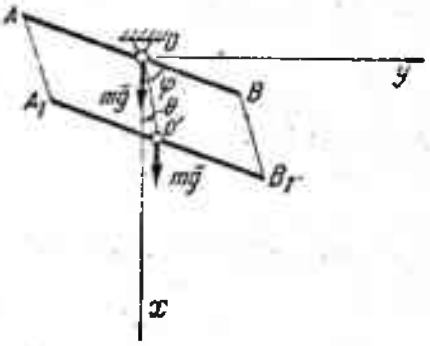


Fig. 20.18

20.18. Două bare grele, omogene, de lungimi egale $AB = A_1B_1 = 2l$ și greutate $m\vec{g}$, sînt legate între ele prin fire inextensibile de lungimi egale și mase neglijabile $AA_1 = BB_1 = a$, care se găsesc în planul barelor (fig. 20.18). Bara AB este articulată în mijlocul ei O (originea sistemului de axe xOy). Să se studieze mișcarea sistemului în planul vertical.

Rezolvare. Fie O și O' mijloacele barelor AB și A_1B_1, θ unghiul format de direcția OO' cu axa Ox și φ unghiul format de direcția AB cu axa Ox.

Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{1}{2}[I_O\dot{\varphi}^2 + (I_O' + ma^2)\dot{\theta}^2] = \frac{m}{6}[2l^2\dot{\varphi}^2 + (2l^2 + 3a^2)\dot{\theta}^2],$$

iar diferențiala funcției de forță are forma

$$dU = -mg\, a \sin \theta \, d\theta.$$

Derivatele parțiale din ecuațiile Lagrange scrise în raport cu parametrii θ și φ sînt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2ml^2}{3}\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m(2l^2 + 3a^2)}{3}\dot{\theta}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mga \sin \theta.$$

Ecuațiile de mișcare vor fi

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3ga}{2l^2 + 3a^2}\sin \theta = 0.$$

Se observă că bara AB execută o rotație uniformă în jurul punctului fix O ($\dot{\varphi} = C$), iar punctul O' execută mișcarea unui pendul matematic de lungime l_1

$$l_1 = \frac{2l^2 + 3a^2}{3a}.$$

20.19. Un tub inelar, de rază R și greutate $\bar{P}$, se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal. În interiorul tubului se poate mișca fără frecare, o bilă M de masă m (fig. 20.19). Să se studieze mișcarea sistemului.

Rezolvare. Coordonatele punctului M sînt

$$x_M = x + R \sin \varphi.$$

$$y_M = R(1 - \cos \varphi).$$

Componentele vitezei punctului M pe axe sînt

$$\dot{x}_M = \dot{x} + R\dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\dot{y}_M = R\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{O'}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi)$$

unde

$$I_{O'} = \frac{P}{g}R^2.$$

Diferențiala funcției de forță este

$$dU = -mgR \sin \varphi \, d\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru scrierea ecuațiilor lui Lagrange în raport cu parametrii x, φ și θ calculăm derivatele parțiale

$$\frac{\partial E}{\partial \dot\theta} = \frac{P}{g} R^2\dot\theta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{P}{g} R^2\ddot\theta, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot x} = \left(\frac{P}{g} + m\right)\dot x + m R\dot\varphi \cos\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot x}\right) = \left(\frac{P}{g} + m\right)\ddot x + mR(\ddot\varphi \cos\varphi - \dot\varphi^2 \sin\varphi), \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot\varphi} = m(R^2\dot\varphi + R\dot x \cos\varphi), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\varphi}\right) = mR(R\ddot\varphi + \ddot x \cos\varphi - \dot x\dot\varphi \sin\varphi)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -mR\dot x\dot\varphi \sin\varphi, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgR \sin\varphi.$$

Sistemul de ecuații de mișcare va fi

$$\frac{P}{g} R^2\ddot\theta = 0$$

$$\left(\frac{P}{g} + m\right)\ddot x + mR(\ddot\varphi \cos\varphi - \dot\varphi^2 \sin\varphi) = 0$$

$$\ddot x \cos\varphi + R\ddot\varphi + g \sin\varphi = 0.$$

Din ecuația $\frac{P}{g} R^2\ddot\theta = 0$ rezultă că tubul se rostogolește fără să alunece pe planul orizontal; celelalte două ecuații determină mișcarea bilei.

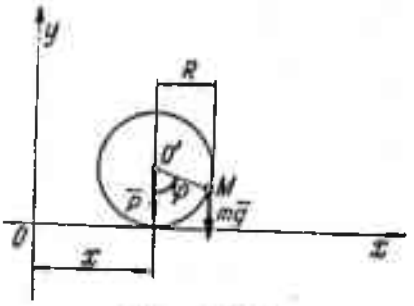


Fig. 20.19

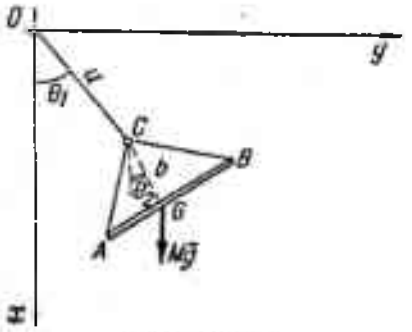


Fig. 20.20

20.20. O bară AB, de lungime $2l$ și masă M este suspendată cu ajutorul a două fire de lungimi egale de capătul C al tijei OC de lungime a și masă neglijabilă (fig. 20.20). Să se determine ecuațiile micilor oscilații ale barei AB Distanța $CG = b$.

Rezolvare. Coordonatele centrului de masă al barei sînt:

$$x_G = a\cos\theta_1 + b\cos\theta_2$$

$$y_G = a\sin\theta_1 + b\sin\theta_2.$$

Viteza punctului G va avea componentele:

$$\dot{x}_G = -a\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - b\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$

$$\dot{y}_G = a\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + b\dot{\theta}_2\cos\theta_2.$$

Ținînd seama că se cere studiul micilor oscilații, energia cinetică și diferențiala funcției de forță sînt:

$$E = \frac{Mv_G^2}{2} + \frac{I_G\omega^2}{2} = \frac{M}{2}(a^2\dot{\theta}_1^2 + b^2\dot{\theta}_2^2 + 2ab\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + \frac{Ml^2}{6}\dot{\theta}_2^2$$

$$dU = -Mg(a\theta_1\,d\theta_1 + b\theta_2\,d\theta_2).$$

Calculînd derivatele parțiale din cele două ecuații Lagrange, referitoare la parametrii θ_1 și θ_2 și scriind ecuațiile, se obține sistemul:

$$a\ddot{\theta}_1 + b\ddot{\theta}_2 = -g\theta_1$$

$$ab\ddot{\theta}_1 + \left(b^2 + \frac{l^2}{3}\right)\ddot{\theta}_2 = -gb\theta_2.$$

20.21. Sistemul din figură este alcătuit din două discuri de masă neglijabilă, avînd razele R_1, R_2 și din trei mase m_1, m_2, m_3, suspendate de fire trecute peste aceste discuri. Să se studieze mișcarea sistemului utilizînd ecuațiile lui Lagrange.

Rezolvare. Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{R_1^2\dot{\theta}_1^2}{2}(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{R_2^2\dot{\theta}_2^2}{2}(m_2 + m_3) + $$
$$+ R_1R_2\cdot\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_2 - m_3).$$

Funcția de forță este:

$$U = gR_1\theta_1(-m_1 + m_2 + m_3) + gR_2\theta_2(m_2 - m_3).$$

Mișcarea depinde de doi parametri θ_1 și θ_2; se vor scrie două ecuații Lagrange.

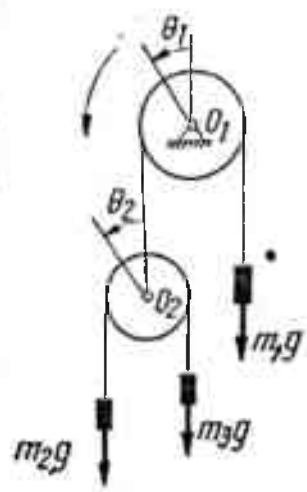


Fig. 20.21

Derivatele parţiale care intervin în calcule sînt:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1} = R_1^2\dot{\theta}_1(m_1 + m_2 + m_3) + R_1R_2\dot{\theta}_2(m_2 - m_3), \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = R_1^2\ddot{\theta}_1(m_1 + m_2 + m_3) + R_1R_2\ddot{\theta}_2(m_2 - m_3), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_1} =$$

$$= gR_1(-m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2} = R_2^2\dot{\theta}_2(m_2 + m_3) + R_1R_2\dot{\theta}_1(m_2 - m_3), \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = R_2^2\ddot{\theta}_2(m_2 + m_3) + R_1R_2\ddot{\theta}_1(m_2 - m_3), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} =$$

$$= gR_2(m_2 - m_3).$$

Ecuaţiile lui Lagrange formează sistemul:

$$R_1\ddot{\theta}_1(m_1 + m_2 + m_3) + R_2\ddot{\theta}_2(m_2 - m_3) = g(-m_1 + m_2 + m_3)$$

$$R_1\ddot{\theta}_1(m_2 - m_3) + R_2\ddot{\theta}_2(m_2 + m_3) = g(m_2 - m_3).$$

Probleme propuse pentru rezolvare

20.22. Părţii superioare a resortului R, de constantă k, din figura 20.22 i se imprimă o mişcare armonică $y = e\cos\omega t$. Să se determine mişcarea orizontală a masei m, neglijînd masa barei AOB, masa resortului R şi frecările.

R. $mb^2\ddot{\theta} + mgb\dot{\theta}\cos\theta = kae\cos\omega t$

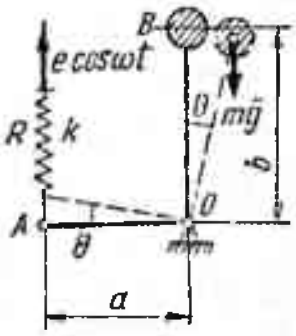


Fig. 20.22

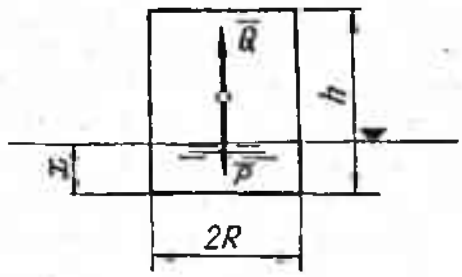


Fig. 20.23

20.23. Un cilindru plin, avînd raza bazei R, înălţimea h şi greutatea specifică γ, se scufundă în apă (fig. 20.23). a) Să se găsească poziţia de echilibru şi să se deducă natura echilibrului. b) Să se studieze oscilaţiile în jurul poziţiei de echilibru.

R. a) Echilibrul este stabil. b) $\ddot{z} + \frac{g}{h\gamma}z = g$.

20.24. Un punct material C, de masă m, se mișcă fără frecare pe o bară OB, de greutate neglijabilă, pornind din O fără viteză inițială. Bara face unghiul constant α cu axa verticală Oy, în jurul căreia se rotește în același timp cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$ (fig. 20.24). Să se studieze mișcarea punctului material.

R. $\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2 \alpha = g \sin \alpha$.

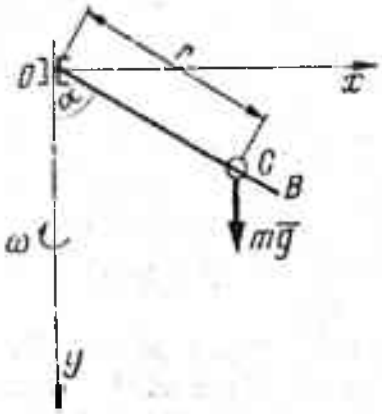


Fig. 20.24

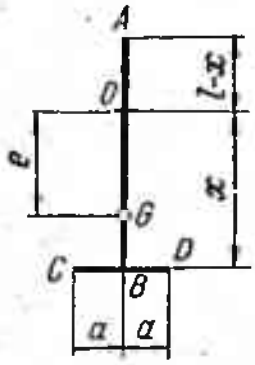


Fig. 20.25

20.25. Să se studieze micile oscilații ale pendulului fizic format din bara verticală AB și bara orizontală CD (fig. 20.25). Bara AB are lungimea l și greutatea $\bar{P}$, iar bara DC are lungimea $2a$ și greutatea $\bar{Q}$. Barele sînt omogene, iar punctul de suspensie este în O, la distanța x de punctul B.

R. Ecuația mișcării este

$$\ddot{\theta} + (P + Q)\frac{e}{I_O}\theta = 0,$$

în care $e = x - \dfrac{Pl}{2(P+Q)}$, iar $I_O = \dfrac{1}{g}\left[P\left(\dfrac{l^2}{3} - lx + x^2\right) + Q\left(\dfrac{a^2}{12} + x^2\right)\right]$.

20.26. Se dă un triunghi echilateral OAB, format din trei bare de lungime a și greutate p kN/m, articulat în O și putînd oscila într-un plan vertical. O bilă M, de masă m, alunecă fără frecare pe OB (fig. 20.26). Bila pornește din O fără viteză inițială. Să se studieze mișcarea.

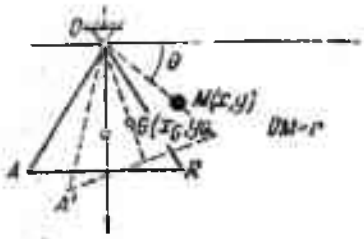


Fig. 20.26

R. $\ddot{r} = g\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\frac{3}{2g}pa^3\ddot{\theta} = -a^2p\sqrt{3}\sin\theta - mgr\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

20.27. O bară M_1M_2, de lungime l și greutate neglijabilă, are fixate în capete două greutăți $m_1\bar{g}$ și $m_2\bar{g}$. Capătul M_1 al barei alunecă fără frecare

pe o dreaptă orizontală, iar bara se rotește în planul vertical în jurul lui M_1 (fig. 20.27). Să se studieze mișcarea sistemului.

R. $\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta] = 0$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0.$$

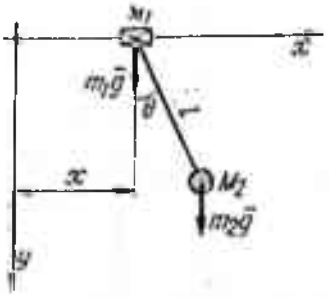


Fig. 20.27

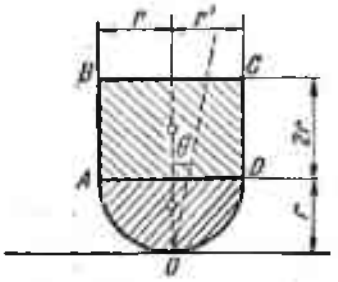


Fig. 20.28

20.28. Să se studieze oscilațiile în jurul poziției de echilibru stabil din figura 20.28, pentru o semisferă AOD de rază r și densitate γ, solidară cu un cilindru drept $ABCD$ de rază r, înălțime $2r$ și densitate $\gamma/10$. (Corpul, oricum ar fi așezat, revine la poziția de echilibru din figură).

R. Ecuația micilor oscilații în jurul poziției de echilibru stabil este

$$\ddot{\theta} + \frac{0{,}4r^3\gamma}{3I_O}\theta = 0,$$

în care I_O este momentul de inerție al solidului în raport cu punctul O.

20.29. Să se studieze micile oscilații ale pendulului format din bara AB verticală și bara CD orizontală (fig. 20.29). Bara AB are lungimea l și greutatea P, iar bara BC are lungimea $2a$ și greutatea Q. Barele sînt neomogene, ($\gamma_{AB} = \gamma$; $\gamma_{CD} = 2\gamma$) iar punctul de suspensie este în O, la distanța x de punctul B.

R. Se scriu E și U pentru o deplasare $d\theta$ a lui AB, apoi ecuația lui Lagrange.

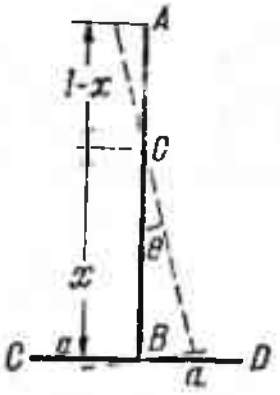


Fig. 20.29

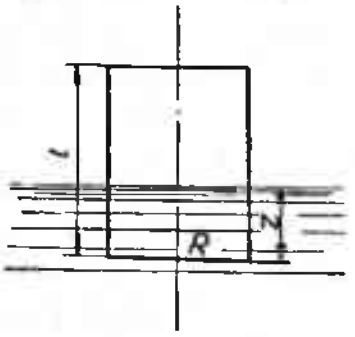


Fig. 20.30

20.30. Un cilindru plin, avînd raza barei R, înălțimea i și densitatea δ se scufundă în apă. a) Să se găsească poziția de echilibru și să se deducă

natura echilibrului; b) Să se studieze oscilațiile în jurul poziției de echilibru.

R. $dU = \pi R^2 i\delta\, dz - \pi R^2 z\, dz$; $\frac{dU}{dz} = 0$;

Echilibrul stabil:

$$U = \pi R^2 i\delta z - \pi R^2 \frac{z^2}{2}; \quad E = \frac{1}{2}\dot{z}^2 \pi \cdot R^2 \cdot i\delta$$

$$\frac{dE}{d\dot{z}} = \pi R^2 i\delta \dot{z}; \quad \frac{dE}{dz} = 0; \quad \frac{dU}{dz} = \pi R^2 i\delta - \pi R^2 z.$$

Ecuația Lagrange $i\delta\ddot{z} + z - i\delta = 0$.

20.31. Bara AOB din figura 20.31 este suspendată în O, astfel încît poate oscila în jurul acestui punct. $OA = OB = a$. Să se studieze micile oscilații în jurul poziției de echilibru stabil (Examen S.P.B.).

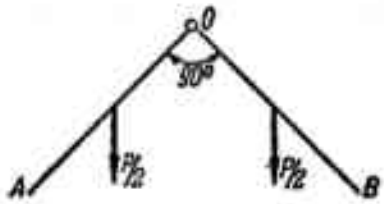


Fig. 20.31

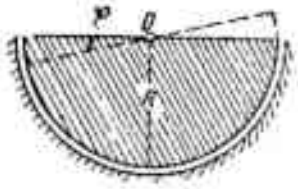


Fig. 20.32

20.32. Un disc semicircular, omogen, de rază R și greutate P, situat într-un plan vertical, poate aluneca fără frecare într-un inel fix, de aceeași rază R. Să se studieze micile oscilații ale discului, în jurul poziției sale de echilibru stabil.

R. Se vor scrie E și V pentru o poziție infinit apropiată de cea de echilibru și apoi ecuația lui Lagrange.

XXI. ECUAȚII CANONICE

Ecuațiile lui Lagrange de speța a doua,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0,$$

permit studiul mișcării sistemelor de puncte materiale cu ajutorul unui sistem de s ecuații diferențiale de ordinul al doilea pentru parametrii

$q_k (k = 1, ..., s)$. S-a notat $\mathcal{L} = E + U$, funcția lui Lagrange sau potențialul cinetic.

Utilizînd transformarea

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \ (k = 1, ..., s)$$

și trecînd de la funcția $\mathcal{L}$ la funcția $\mathcal{H}$ — funcția lui Hamilton — definită prin relația

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - \mathcal{L},$$

ecuațiile lui Lagrange pot fi înlocuite printr-un sistem de $2s$ ecuații diferențiale — ecuațiile canonice Hamilton

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

avînd $2s$ necunoscute p_k, $q_k (k = 1, ..., s)$, funcții de timpul t.

În cazul legăturilor scleronome și al forțelor conservative funcția $\mathcal{H}$ are forma particulară

$$\mathcal{H} = T - U.$$

Probleme rezolvate

21.1. Să se studieze mișcarea unei bare omogene OA, de lungime l și masă M, articulată în O și lăsată să penduleze liber într-un plan vertical (fig. 21.1).

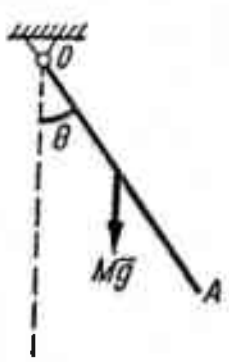


Fig. 21.1

Rezolvare. Energia cinetică a barei este

$$E = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta}^2.$$

Funcția de forță U are expresia

$$U = -Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta).$$

Impulsul generalizat p este

$$p = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta}, \text{ de unde } \dot{\theta} = \frac{3p}{Ml^2}.$$

Energia cinetică are forma

$$E = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{3} \frac{9p^2}{M^2 l^4} = \frac{3p^2}{2Ml^2},$$

iar funcția lui Hamilton va fi

$$\mathcal{H} = p\dot{\theta} - (E + U) = \frac{3p^2}{Ml^2} - \left(\frac{3p^2}{2Ml^2} + \frac{Mgl}{2}\cos\theta - \frac{Mgl}{2}\right) =$$

$$= \frac{3p^2}{2Ml^2} - \frac{Mgl}{2}\cos\theta + \frac{Mgl}{2}.$$

Ecuațiile canonice Hamilton vor fi în acest caz

$$\dot{\theta} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{3p}{Ml^2}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = -\frac{Mgl}{2}\sin\theta.$$

Din prima obținem

$$p = \frac{Ml^2}{3}\dot{\theta}, \quad \dot{p} = \frac{Ml^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{Mgl}{2}\sin\theta$$

și rezultă ecuația de mișcare a barei

$$\frac{Ml^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{Mgl}{2}\sin\theta$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0,$$

ecuație cunoscută, care determină oscilațiile unei bare ce se rotește în planul său, în jurul unui capăt.

21.2. Să se scrie mișcarea proiectilului folosind ecuațiile canonice:

Rezolvare.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} = p_x; \quad p_y = m\dot{y}; \; p_z = m\dot{z}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz$$

Ecuațiile canonice sînt:

a) $\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m} = \dot{x}; \quad \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_y} = \dfrac{p_y}{m} = \dot{y}; \quad \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m} = \dot{z}$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = 0 = -\dot{p}_x; \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} = 0 = -\dot{p}_y; \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = mg = -\dot{p}_z.$$

Diferențiind a) și eliminînd $\dot{p}_x$, $\dot{p}_y$, $\dot{p}_z$ se obțin ecuațiile mișcării proiectilului:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -my$$

Scanned with OKEN Scanner

21.3. Să se scrie ecuațiile canonice pentru mișcarea unui pendul suspendat cu un resort.

Rezolvare.

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2} k(r - r_0)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = p_r = m\dot{r}\,; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = p_\theta = mr^2\dot{\theta}.$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2\right) - mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

Se ajunge la ecuațiile canonice:

a) $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \dot{r}\,; \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$

b) $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} - mg\cos\theta + k(r - r_0) = -\dot{p}_r$

c) $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = mgr\sin\theta = -\dot{p}_\theta.$

Eliminînd $\dot{p}_r$, p_θ din a) și b) și $\dot{p}_\theta$, p_r din a) și c) se obține:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(r - r_0) = 0$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta = 0.$$

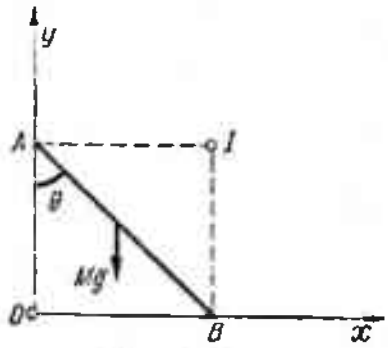


Fig. 21.4

21.4. Să se studieze mișcarea într-un plan vertical, a unei bare AB omogene, de masă M și lungime l, extremitățile A și B ale barei fiind obligate a descrie respectiv verticala Oy și orizontala Ox (fig. 21.4).

Rezolvare. Bara AB deplasîndu-se în planul vertical xOy, efectuează o mișcare plan-paralelă, al cărei centru instantaneu I se găsește la intersecția normalelor ridicate în punctele A și B pe axele Oy și Ox.

Energia cinetică a barei este

$$E = \frac{1}{2} I_I\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\left[\frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4}\right] = \frac{Ml^2}{6}\dot{\theta}^2.$$

Considerînd poziția inițială a barei definită printr-un unghi θ_0 format cu axa Oy, funcția de forță este

$$U = Mg\frac{l}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Introducem impulsul generalizat p definit prin expresia

$$p = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{Ml^2}{3} = \dot{\theta} \text{ sau } \dot{\theta} = \frac{3p}{Ml^2}.$$

Energia cinetică devine

$$E = \frac{Ml^2}{6} \frac{9p^2}{M^2l^4} = \frac{3p^2}{2Ml^2}.$$

Funcţia lui Hamilton este

$$\mathcal{H} = p\dot{\theta} - (E + U) = \frac{3p^2}{Ml^2} - \left[\frac{3p^2}{2Ml^2} + \frac{Mgl}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right] =$$

$$= \frac{3p^2}{2Ml^2} + \frac{Mgl}{2}\cos\theta - \frac{Mgl}{2}\cos\theta_0.$$

Ecuaţiile canonice Hamilton devin în acest caz

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{3p}{Ml^2}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = +\frac{Mgl}{2}\sin\theta.$$

Din prima ecuaţie

$$p = \frac{Ml^2}{3}\dot{\theta}, \quad \dot{p} = \frac{Ml^2}{3}\ddot{\theta} = \frac{Mgl}{2}\sin\theta.$$

Rezultă ecuaţia de mişcare a barei

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0.$$

21.5. O bară omogenă, de lungime $l = OA$ şi greutate p kgf/m, se poate roti într-un plan vertical în jurul capătului său O. Pe bară se deplasează fără frecare o culisă M de masă m (fig. 21.5). Să se studieze mişcarea sistemului.

Rezolvare. Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

sau, ţinînd seama de expresia momentului de inerţie

$$I = \frac{pl}{g} \cdot \frac{l^2}{3} = \frac{Ml^2}{3},$$

$$E = \frac{Ml^2}{3}\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

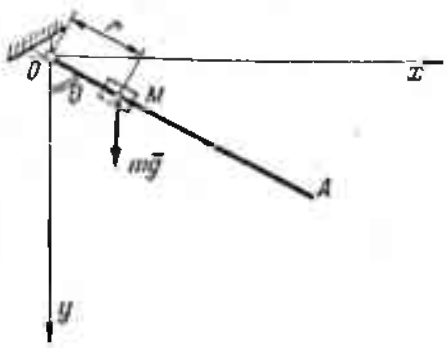


Fig. 21.5

(am notat cu $r = OM$ poziţia culisei pe bară).

Funcţia de forţă U este

$$U = mgr\cos\theta + Mg\frac{l}{2}\cos\theta.$$

Variabilele p_i sînt în acest caz

$$p_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_2 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)\dot{\theta}$$

de unde

$$\dot{r} = \frac{p_1}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_2}{\frac{Ml^2}{3} + mr^2}.$$

Energia cinetică devine, cu aceste notaţii,

$$E = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_2^2}{2\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)}.$$

Funcţia $\mathcal{H}$ a lui Hamilton are forma

$$\mathcal{H} = \Sigma p_i \dot{q}_i - (E + U) = \frac{p_1^2}{m} + \frac{p_2^2}{\frac{Ml^2}{3} + mr^2} -$$

$$- \left[\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)} + mgr\cos\theta + Mg\frac{l}{2}\cos\theta\right] =$$

$$= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)} - mgr\cos\theta - Mg\frac{l}{2}\cos\theta.$$

Ecuaţiile canonice sînt

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = \frac{p_2}{\frac{Ml^2}{3} + mr^2}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\left(mgr + \frac{Mgl}{2}\right)\sin\theta, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = mg\cos\theta + \frac{mrp_2^2}{\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)^2}$$

şi formează un sistem de patru ecuaţii diferenţiale de ordinul I, cu patru necunoscute: p_1, p_2, r, θ. Rezolvînd sistemul obţinem

$$p_1 = m\dot{r}, \ \dot{p}_1 = m\ddot{r}, \ p_2 = \left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)\dot{\theta}, \ \dot{p}_2 = \left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

sau

$$m\ddot{r} = mg\cos\theta + \frac{mr\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)^2\dot{\theta}^2}{2\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -\left(\frac{Mgl}{2} + mgr\right)\sin\theta,$$

respectiv

$$m\ddot{r} = mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2$$

$$\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -\left(\frac{Mgl}{2} + mgr\right)\sin\theta.$$

Acest sistem de ecuații poate fi obținut și prin aplicarea ecuațiilor lui Lagrange.

21.6. Să se studieze mișcarea unui punct material greu care se poate deplasa pe o suprafață sferică de rază R — fără frecare.

Rezolvare. Coordonatele punctului pe sferă sînt

$$x = R\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = R\cos\theta,$$

unde am notat cu φ unghiul dintre proiecția pe planul xOy a razei OA cu axa Ox și cu θ unghiul dintre raza OA și axa Oz. Viteza punctului are drept componente

$$\dot{x} = R(\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta} - \sin\theta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi})$$

$$\dot{y} = R(\cos\theta\sin\varphi\dot{\theta} + \sin\theta\cos\varphi\cdot\dot{\varphi})$$

$$\dot{z} = -R\sin\theta\cdot\dot{\theta}.$$

Mărimea pătratului vitezei punctului este

$$v^2 = mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta).$$

Energia cinetică a punctului este

$$E = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

Funcția de forță are expresia

$$U = mgR\cos\theta.$$

Presupunem că θ și φ sînt coordonatele generalizate ale punctului; impulsurile generalizate sînt deci

$$p_1 = \frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta},\ p_2 = \frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

de unde $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, exprimate în funcție de p_1, p_2, θ și φ, au expresiile

$$\dot{\theta} = \frac{p_1}{mR^2},\quad \dot{\varphi} = \frac{p_2}{mR^2\sin^2\theta}.$$

Energia cinetică devine

$$E = \frac{1}{2mR^2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2\theta}\right).$$

Funcţia Hamilton are forma

$$\mathcal{H} = E - U = \frac{1}{2mR^2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2\theta}\right) - mgR\cos\theta.$$

Ecuaţiile canonice se scriu sub forma sistemului

$$\dot{\theta} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{p_1}{mR^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_2} = \frac{p_2}{mR^2\sin^2\theta}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = +\frac{p_2^2\cos\theta}{mR^2\sin^3\theta} - mg\,R\sin\theta$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = 0,$$

adică patru ecuaţii diferenţiale pentru cele patru necunoscute: θ, φ, p_1, p_2. Deoarece $\dot{p}_2 = 0$, rezultă $p_2 = \text{const}$ — o integrală primă a sistemului

$$mR^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{const}.$$

Din eliminarea parametrului p_1 rezultă cea de-a doua ecuaţie de mişcare sub forma

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta.$$

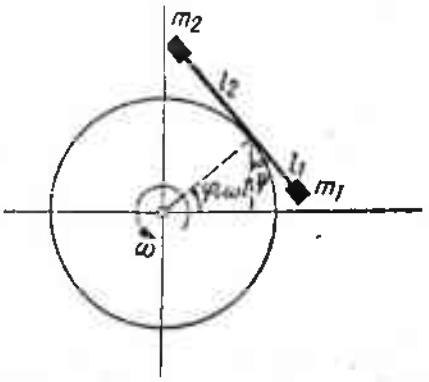


Fig. 2.17

21.7. De periferia unui disc omogen de rază R este rigid legată o pîrghie avînd la capetele sale masele concentrate m_1 şi m_2. Distanţele maselor de punctul de fixare al pîrghiei sînt l_1 şi l_2 (fig. 21.7). Discul se roteşte în jurul unei axe verticale, perpendiculare pe planul său, cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}$.

a) Neglijînd masa pîrghiei să se stabilească ecuaţia de mişcare a acesteia.

b) Ce devine problema dacă discul se roteşte într-un plan vertical? (Se va ţine seama de greutăţile proprii din capetele pîrghiei).

Rezolvare. a) Vitezele punctelor m_1 şi m_2 se obţin prin derivarea în raport cu timpul a coordonatelor

$$x_1 = R\cos\varphi + l_1\sin\psi$$

$$y_1 = R\sin\varphi - l_1\cos\psi;$$

$$x_2 = R\cos\varphi - l_2\sin\psi$$

$$y_2 = R\sin\varphi + l_2\cos\psi.$$

Obținem

$$\dot{x}_1 = R\dot{\varphi}\sin\varphi + l_1\dot{\psi}\cos\psi$$

$$\dot{y}_1 = R\dot{\varphi}\cos\varphi + l_1\dot{\psi}\sin\psi;$$

$$\dot{x}_2 = -R\dot{\varphi}\sin\varphi - l_2\dot{\psi}\cos\psi$$

$$\dot{y}_2 = R\dot{\varphi}\cos\varphi - l_2\dot{\psi}\sin\psi.$$

Vitezele celor două puncte sînt

$$v_1^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + l_1^2\dot{\psi}^2 + 2Rl_1\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\psi - \varphi)$$

$$v_2^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + l_2^2\dot{\psi}^2 - 2Rl_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\psi - \varphi).$$

Energia cinetică a sistemului este

$$E = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}{2}\dot{\psi}^2 + R\dot{\varphi}\dot{\psi}(m_1l_1 - m_2l_2)\sin(\psi - \varphi).$$

Funcția de forță este $U = 0$, în cazul mișcării sistemului într-un plan orizontal (a), și are expresia $U = (m_1 + m_2)\,gR\sin\varphi - (m_1l_1 - m_2l_2)\cos\psi$ în cazul mișcării sistemului în plan vertical (b).

a) Impulsul generalizat p_1 este

$$p_1 = \frac{\partial E}{\partial\dot{\psi}} = (m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\,\dot{\psi} + R\omega(m_1l_1 - m_2l_2)\sin(\psi - \omega t)$$

Energia cinetică devine

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2}R^2\omega^2 + \frac{[p_1 - R\omega)\,(m_1l_1 - m_2l_2)\sin(\psi - \omega t)]^2}{2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)} +$$

$$+ 2R\omega\,\frac{p_1 - R\omega(m_1l_1 - m_2l_2)\sin(\psi - \omega t)}{2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)}(m_1l_1 - m_2l_2)\sin(\psi - \omega t) =$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2}R^2\omega^2 + \frac{p^2 - R^2\omega^2(m_1l_1 - m_2l_2)^2\sin^2(\psi - \omega t)}{2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)}.$$

Funcția lui Hamilton $\mathcal{H}$ este în acest caz

$$\mathcal{H} = p\dot{\psi} - E = \frac{p^2 - pR\omega(m_1l_1 - m_2l_2)\sin(\psi - \omega t)}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2} -$$

$$- \frac{m_1 + m_2}{2}R^2\omega^2 - \frac{p^2 - R^2\omega^2(m_1l_1 - m_2l_2)^2\sin^2(\psi - \omega t)}{2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)} =$$

$$= \frac{p^2}{2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)} - \frac{2pR\omega(m_1l_1 - m_2l_2)\sin(\psi - \omega t)}{2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)} +$$

$$+ \frac{R^2\omega^2(m_1l_1 - m_2l_2)^2\sin^2(\psi - \omega t)}{2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)} - \frac{m_1 + m_2}{2}R^2\omega^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile canonice Hamilton sînt

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} - \frac{R\omega(m_1 l_1 - m_2 l_2)\sin(\psi - \omega t)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = -\frac{[-pR\omega(m_1 l_1 - m_2 l_2) + R^2\omega^2(m_1 l_1 - m_2 l_2)^2 \sin(\psi - \omega t)]\cos(\psi - \omega t)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)}.$$

Din eliminarea variabilei p se obține pentru mișcarea sistemului ecuația

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2(m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) = 0.$$

Pentru $m_1 l_1 = m_2 l_2$ pîrghia se găsește în echilibru relativ indiferent. Pentru $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ rezultă poziția de echilibru relativ pentru $\psi = \omega t + \frac{\pi}{2}$, adică pîrghia este dirijată după rază.

b) Ținînd seamă de expresia funcției de forță U

$$U = (m_1 + m_2) Rg \sin \omega t - (m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos \psi,$$

calculele se conduc în mod absolut analog ca la punctul a). Rezultatul are forma

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2(m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \cos \psi = 0.$$

În acest caz, pentru $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ poziția de echilibru relativ nu este posibilă.

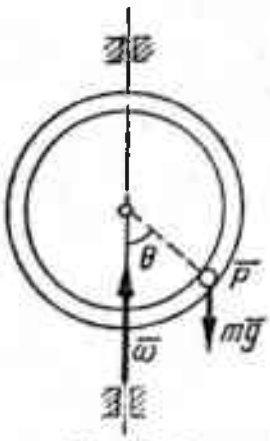


Fig. 21.8

21.8. Un punct material P, de masă m, se mișcă în interiorul unui tub circular luciu, de rază R, care se rotește în jurul diametrului său vertical; momentul de inerție al tubului față de diametrul vertical este I (fig. 21.8). Să se stabilească ecuațiile de mișcare ale sistemului, considerînd că tubul se rotește datorită unui moment constant M.

Rezolvare. Coordonatele punctului P sînt

$$x = R \sin \theta \cos \varphi$$
$$y = R \sin \theta \sin \varphi$$
$$z = R \cos \theta.$$

Componentele vitezei punctului P sînt

$$\dot{x} = R(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi)$$

$$\dot{y} = R(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi)$$

$$\dot{z} = -R\dot{\theta} \sin \theta$$

iar mărimea pătratului vitezei punctului P

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta).$$

Energia cinetică a sistemului are expresia

$$E = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 + \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta),$$

iar funcţia de forţă este

$$U = mg\, R \cos \theta + M\dot{\varphi}.$$

Impulsurile generalizate p_i sînt

$$p_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}, \quad p_2 = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta + I\dot{\varphi},$$

astfel încît expresia energiei cinetice devine

$$E = \frac{p_1^2}{2mR^2} + \frac{p_2^2}{2(I + mR^2 \sin^2 \theta)}.$$

Funcţia Hamilton are forma

$$\mathcal{H} = E - U = \frac{p_1^2}{2mR^2} + \frac{p_2^2}{2(I + mR^2 \sin^2 \theta)} - mg\, R \cos \theta + M\varphi.$$

Ecuaţiile canonice Hamilton vor fi date de sistemele

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{p_1}{mR^2}, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = \frac{p_2}{I + mR^2 \sin^2 \theta}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -mgR \sin \theta + \frac{mR^2 p_2^2 \sin \theta \cos \theta}{(I + mR^2 \sin^2 \theta)^2}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -M$$

sau, eliminînd variabilele p_1 şi p_2 între ecuaţiile sistemului,

$$mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin \theta + mR^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$-M = \frac{d}{dt} [\dot{\varphi}(I + mR^2 \sin^2 \theta)].$$

Problemă propusă pentru rezolvare

21.9. O bară omogenă grea $\vec{G} = M\vec{g}$, de lungime $AB = l$ se poate mişca fără frecare pe o suprafaţă care se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}$, în jurul unei axe verticale fixe Oy cuprinsă în planul suprafeţei (fig. 21.9). Să se studieze mişcarea barei.

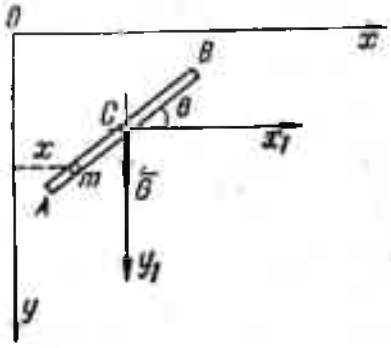


Fig. 21.9

R. Ecuaţiile canonice au expresia

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = M\omega^2\xi, \quad \dot{p}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = -Mg$$

$$\dot{p}_3 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -M\omega^2 k^2 \sin\theta\cos\theta,$$

unde

$$\dot{\xi} = \frac{p_1}{M}, \quad \dot{\eta} = \frac{p_2}{M}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_3}{Mk^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

ANEXĂ

1. Unităţile mărimilor geometrice şi mecanice

Mărimea	Simbol	Ecuaţia de definiţie	Dimensiuni în sistemul SI	Unităţi în sistemul SI	CGS	MKfS
Lungime	l	—	L	m	cm	m
Masă	m	$m = \frac{F}{a}$ *)	M	kg	g	$\frac{kgf \cdot s^2}{m}$
Timp	t	—	T	s	s	s
Arie	A	$A = l^2$	L^2	m^2	cm^2	m^2
Volum	V	$V = l^3$	L^3	m^3	cm^3	m^3
Unghi plan	α	$\alpha = \frac{s}{r}$	1	rad	rad	rad
Viteză	v	$v = \frac{s}{t}$	LT^{-1}	m/s	cm/s	m/s
Accelerație	a	$a = \frac{v}{t}$	LT^{-2}	m/s^2	cm/s^2	m/s^2
Viteză unghiulară	ω	$\omega = \frac{\theta}{t}$	T^{-1}	rad/s	rad/s	rad/s
Accelerație unghiulară	ε	$\varepsilon = \frac{\omega}{t}$	T^{-2}	rad/s^2	rad/s^2	rad/s^2
Perioadă	T	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	T	s	s	s
Frecvență	f	$f = \frac{1}{T}$	T^{-1}	Hz	Hz	Hz
Forță	F	$F = ma$ **)	LMT^{-2}	N	dyn	kgf
Percuție	P	$P = Ft$	LMT^{-1}	N · s	dyn · s	kgf · s
Momentul unei forțe (cuplu)	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M} = Fl$	L^2MT^{-2}	N · m	dyn · cm	kgf · m
Impuls (cantitate de mișcare)	H	$H = mv$	LMT^{-1}	$\frac{kg \cdot m}{s}$	$\frac{g \cdot cm}{s}$	$\frac{kg \cdot m}{s}$
Energie	W, E	$E = \frac{1}{2} mv^2$	L^2MT^{-2}	J	erg	kgf · m
Lucru mecanic	W, L	$L = Fl \cos(F, l)$	L^2MT^{-2}	J	erg	kgf · m
Putere	P	$P = \frac{W}{t}$	L^2MT^{-3}	W	erg/s	kgf · m/s
Moment de inerție al masei	J	$J = ml^2$	L^2M	$kg \cdot m^2$	$g \cdot cm^2$	$kg \cdot m^2$
Moment cinetic	K	$K = mvr = J\omega$	L^2MT^{-1}	$\frac{kg \cdot m^2}{s}$	$\frac{g \cdot cm^2}{s}$	$\frac{kg \cdot m^2}{s}$
Presiune	P	$P = \frac{F}{A}$	$L^{-1}MT^{-2}$	N/m^2	dyn/cm^2	kgf/m^2
Masă specifică (densitate)	ρ	$\rho = \frac{m}{V}$ **)	$L^{-3}M$	kg/m^3	g/cm^3	$kgf \cdot s^2/m^4$
Greutatea specifică	γ	$\gamma = \frac{G}{V}$	$L^{-2}MT^{-2}$	N/m^3	dyn/cm^3	kgf/m^3

* Definiția în sistemul MKfs.
** Definiția în sistemul CGS și SI.

Scanned with OKEN Scanner

2. Multiplii şi submultiplii unităţilor de măsură:

10^n	Prefix	Prescurtare
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^5	hectokilo	hk
10^4	miria	ma
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10^1	deca	da
10^0	...	...
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-4}	decimili	dm
10^{-5}	centimili	cm
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	fento	f
10^{-18}	atto	a

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Appell, P., *Traité de Mécanique rationelle*. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1932.
2. Bălan, Şt., *Culegere de probleme de mecanică*. Cinematica, Dinamica. Bucureşti, Ed. Politehnica 1939; Ed. C.F.R., 1947.
3. Bălan, Şt şi Vlad, Octavian, *Culegere de probleme de Statică*. Bucureşti, Ed. C.F.R. 1946.
4. Bălan, Şt. şi Beiu-Paladi, E. *Curs de mecanică teoretică*, Bucureşti, Ed. Ministerul Învăţămîntului, 1960.
5. Beleş, A. şi Bălan, St. *Mecanica teoretică şi aplicată*, Bucureşti, Ed. C.F.R. 1942.
6. Buchholtz, N. N., Voronkov, I. M., Monakov, I. A. *Culegere de probleme de Mecanică raţională*. Bucureşti, Editura tehnică, 1951.
7. Burileanu, Şt. *Curs de Mecanică raţională*. Bucureşti, Editura Socec, 1944.
8. Buzdugan, Gh. *Culegere de probleme de Mecanică*. Bucureşti, Ed. Tehnică, 1950.
9. Ciorănescu, N. *Ecuaţiile mecanicii analitice*. Bucureşti, Editura Politehnică, 1938.
10. Ioachimescu, A. G. *Mecanica raţională*. Bucureşti, Editura Tehnică, 1947.
11. Kraft, F. *Sammlungen von Problemen der analytischen Mechanik*. Stuttgard, Ed. Metzler, 1885.
12. Landau et Lefschitz, *Mecanique*
13. И. В. Мещерский. *Сборник задач по теоретической механике*, Москва, Ленинград. 1950
14. Meriam, J. L., *Statics and Dynamics*. New York, Ed. John Wiley, 1967.
15. Nekrasov, A. I. *Curs de Mecanică teoretică*. Bucureşti, Ed. Tehnică, 1955.
16. Nihoul, J. C. J., *Cours moderne de Mécanique rationelle*. Paris, (Ed. Albin Michel, 1968).
17. Sarian, M., şi Boiangiu, D. D., *Culegere de probleme de Mecanică*. Bucureşti, Ed. Tehnică, 1960.
18. Stoenescu, Al. şi Silaş, Gh., *Curs de Mecanică teoretică*. Bucureşti, Editura Tehnică, 1957.
19. Vâlcovici, V., Bălan, St. şi Voinea, R. *Mecanică teoretică*. Bucureşti, Editura Tehnică, 1963.
20. Walton, W., *Collection of Problems of theoretical Mechanics*. Cambridge, 1876.
21. Wittenbauer, F., *Aufgaben aus der technischen Mechanik*. Berlin, Ed. Springer, 1929.
22. * * * Colecţia „*Gazeta matematică*".

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Prefață 5

I. Calculul vectorial 7

Partea întîi

Statica

II. Statica punctului material 21
III. Sisteme de forțe 44
IV. Centre de masă 64
V. Statica solidului rigid 88
VI. Echilibrul sistemelor de puncte și corpuri materiale 132

Partea a doua

Cinematica

VII. Cinematica punctului 171
VIII. Cinematica solidului rigid 215
IX. Mișcarea relativă a punctului 256
X. Aplicații ale cinematicii în tehnică 281

Partea a treia

Dinamica

XI. Dinamica punctului material liber 301
XII. Dinamica punctului material supus la legături 332
XIII. Momente de inerție 350
XIV. Dinamica solidului 384

Scanned with OKEN Scanner

XV. Mişcarea relativă a punctului material. Echilibrul relativ 406
XVI Mişcări oscilatorii 423
XVII. Ciocniri şi percuţii 455

Partea a patra

Mecanica analitică

XVIII. Principiul lui d'Alembert 485
XIX. Principiul lucrului mecanic virtual 509
XX. Ecuaţiile lui Lagrange..... 531
XXI. Ecuaţii canonice 559
Bibliografie..... 573

Coli tipo 36

Tiparul executat sub comanda
nr. 1441
la Întreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97
Bucureşti,
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner

ERATĂ

Pag.	Rîndul	În loc de	Se va citi
16	4 de jos	$\cdots 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$	$\cdots 2x + 2y + 2z$
	3 de jos	$\cdots \frac{\bar{i}}{yz} + \frac{\bar{j}}{zx} + \frac{\bar{k}}{xy}$	$\cdots \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}$
176	2 de jos	$C = 4v_0^3$	$C = -4v_0^3$
238	Fig. 8.19	(C_0)	(C_m)
246	8—9 de jos	Baza este deci cercul $\xi_1^2 + \eta_1^2 = f'^2$	—
271	2	$\sqrt{\cdots + \frac{v_r}{R^2} \cdots + \frac{v_r}{R} \cdots}$	$\sqrt{\cdots + \frac{v_r^4}{R^2} \cdots + \frac{v_r^2}{R} \cdots}$
303	7 de jos	$\cdots \frac{1}{m} F(t)\,dt + \cdots$	$\cdots \frac{1}{m} \int F(t)\,dt + \cdots$
311	9	—	$\ddot{x}\,dx = \frac{d\dot{x}}{dt}\,dx = d\dot{x}\,\dot{x}.$
316	4	$\cdots \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\cdots \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
364	7	$\frac{X^2}{} + \frac{Y^2}{i^2} = 1$	$\frac{X^2}{i_Y^2} + \frac{Y^2}{i_X^2} = 1$
368	2	$\cdots 1{,}785\,a^2.$	$\cdots 1{,}785\,a^2\rho,$
467	6 de jos	$\sqrt{-1\,\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$
473	4 de jos	$y_B = \cdots \quad z_B = \cdots$	$Y_B = \cdots \quad Z_B = \cdots$
480	7 de jos	$x = \frac{l^2\omega^2}{2fg} \cdots$	$x = \frac{l^2\omega^2}{2fg}.$
500	4	O	O_1
505	8 și 10	$2R$	$2r$
565	5 de jos	$\cdots \dot{m} \cdots$	$\cdots m \cdots$
569	6 de jos	$\cdots \dot{\varphi}\,\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial p_2} \cdots$	$\cdots \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial p_2} \cdots$
573	poz. 12	*Lefschitz, Mecanique*	*Lifschitz, Mécanique*

Scanned with OKEN Scanner